

机械零件的强度



知识图谱 学习指南

机械零件的强度可分为静应力强度和变应力强度（疲劳强度）。根据设计经验及材料的特性，通常认为，在工作寿命期间应力变化次数小于 10^3 的零件，可按照静应力强度进行设计。运用材料力学的知识，已可按静应力强度对零件做初步设计，所以本章对此不再加以讨论。要说明的一点是，在机械零件的设计实践中，按静强度设计计算之处还是很多的。即使是承受变应力的零件，在按疲劳强度进行设计的同时，还有不少情况需要根据受载过程中作用次数很少而数值很大的峰值载荷做静应力强度校核。本章主要讨论零件在变应力作用下的疲劳、低应力作用下的脆断、接触应力作用下的接触强度以及机械零件的强度可靠性等问题。

3-1 材料的疲劳强度

材料的疲劳特性可用最大应力 σ_{\max} 、应力循环次数 N 、应力比（或称为循环特性） $r \left(= \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \right)$ 来描述。机械零件材料的抗疲劳性能是通过试验来测定的，即在材料的标准试样上加上一定应力比的等幅变应力，通常是加上应力比 $r = -1$ 的**对称循环应力**或是 $r = 0$ 的**脉动循环应力**，通过试验，记录在不同最大应力下引起试件疲劳破坏所经历的应力循环次数 N 。把试验的结果用图 3-1 或图 3-2 来表达，就得到材料的疲劳特性曲线。图 3-1 描述了在一定的应力比 r 下，疲劳极限（以最大应力 σ_{\max} 表征）与应力循环次数 N 的关系，通常称为 $\sigma-N$ 疲劳曲线。图 3-2 描述的是在一定的应力循环次数 N 下，疲劳极限的应力幅值 σ_a 与平均应力 σ_m 的关系。这一曲线实际上反映了在特定寿命条件下，最大应力 $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ 与应力比 $r = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a}$ 的关系，故常称其为等寿命疲劳曲线或极限应力线图。



应力变化
线图

在循环次数小于 10^3 时，相应于图 3-1 中的曲线 AB 段，使试件发生破坏的最大应力值基本不变，或者说下降得很小，因此可以将应力循环次数 $N \leq 10^3$ 时的变应力强度看作静应力强度。

在曲线的 BC 段，随着循环次数的增加，材料发生疲劳破坏的最大应力将不断下降。

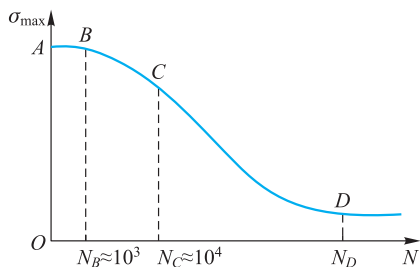


图 3-1 材料的疲劳特性曲线之一
($\sigma-N$ 疲劳曲线)

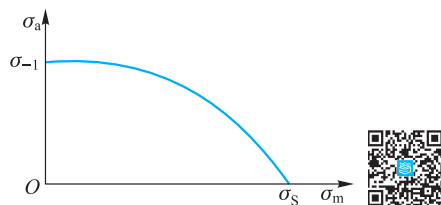


图 3-2 材料的疲劳特性曲线之二
(等寿命疲劳曲线)

仔细检查试件在这一阶段的破坏断口状况，总能见到材料已发生塑性变形的特征。点 C 相应的循环次数大约为 10^4 。这一阶段的疲劳破坏，由于应力较大，材料已出现局部的塑性变形，所以用应变 - 循环次数来说明材料的行为更符合实际。因此，把这一阶段的疲劳现象称为应变疲劳。由于这一阶段的应力循环次数相对很少，所以也称为**低周疲劳**。有些机械零件在整个工作寿命期间应力变化次数只有几百到几千次，但应力值较大，故其疲劳属于低周疲劳范畴。但对绝大多数通用零件来说，当其承受变应力作用时，其应力循环次数总是大于 10^4 的。所以，本书中不讨论低周疲劳问题，若需要可参见参考文献 [19]。

1. $\sigma-N$ 疲劳曲线

图 3-1 中曲线 CD 段代表有限寿命疲劳阶段。在此范围内，材料试件经过一定次数的交变应力作用后总会发生疲劳破坏。曲线 CD 段上任何一点所代表的疲劳极限，称为有限寿命疲劳极限，用符号 σ_{rN} 表示。脚标 r 代表该变应力的应力比， N 代表该变应力的循环次数。曲线 CD 段可用下式来描述：

$$\sigma_{rN}^m N = C, \quad N_C \leq N \leq N_D \quad (3-1)$$

式中， C 和 m 均为材料常数。

图 3-1 中 D 点以后的曲线几乎为一水平线，这表明若作用的变应力的最大值小于点 D 的应力值，则无论应力变化多少次，材料都不会破坏。故点 D 以后的线段代表了试件无限寿命疲劳阶段，可用下式描述：

$$\sigma_{rN} = \sigma_{r\infty}, \quad N > N_D \quad (3-2)$$

式中， $\sigma_{r\infty}$ 表示点 D 对应的疲劳极限，常称为持久疲劳极限。点 D 所对应的循环次数 N_D ，对于各种钢材来说，为 $10^6 \sim 10^8$ 。由于 N_D 有时很大，所以人们在做疲劳试验时，常规定一个循环次数 N_0 (称为**循环基数**)，用 N_0 和与 N_0 相对应的疲劳极限 σ_{rN_0} (简称为 σ_r) 来近似代表 N_D 和 $\sigma_{r\infty}$ 。这样，式 (3-1) 可改写为

$$\sigma_{rN}^m N = \sigma_r^m N_0 = C \quad (3-1a)$$

由式 (3-1a) 便得到了根据 σ_r 及 N_0 来求有限寿命区间内任意循环次数 N ($N_C \leq N \leq N_D$) 时的疲劳极限 σ_{rN} 的表达式：

$$\sigma_{rN} = \sigma_r \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}} = K_N \sigma_r \quad (3-3)$$

式中， K_N 称为**寿命系数**，其值为 σ_{rN} 与 σ_r 的比值。



以上各式中,材料常数 m 的值由试验来决定。对于钢材,在弯曲疲劳和拉压疲劳时, $m=6\sim 20$ 、 $N_0=(1\sim 10)\times 10^6$ 。在初步计算中,钢制零件受弯曲疲劳时,中等尺寸零件取 $m=9$ 、 $N_0=5\times 10^6$,大尺寸零件取 $m=9$ 、 $N_0=10^7$ 。

当 N 大于疲劳曲线转折点 D 所对应的循环次数 N_D 时,式(3-3)中的 N 就取为 N_D 而不再增加(即当 $N>N_D$ 时, $\sigma_{rN}=\sigma_{rND}$)。实际计算中,常用 N_0 代表 N_D ,用 σ_r 代表 σ_{rN_0} (即 $\sigma_{r\infty}$)。

图 3-1 中的曲线 CD 和点 D 以后两段所代表的疲劳通常统称为**高周疲劳**,大多数机械零件的疲劳失效都是由高周疲劳引起的。

2. 等寿命疲劳曲线

图 3-2 所示的疲劳特性曲线可用于表达某一给定循环次数条件下疲劳极限的特性。按试验的结果,这一疲劳特性曲线为二次曲线。在工程应用中,常将其以直线或折线来近似替代,图 3-3 所示的极限应力线图就是一种常用的近似替代折线图(其他的近似替代线图可参见参考文献 [19])。

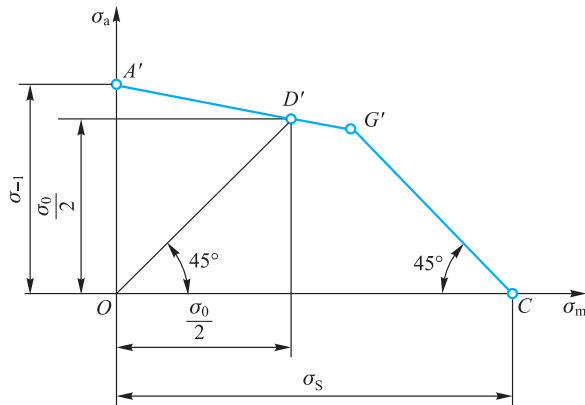


图 3-3 材料的极限应力线图

在做材料疲劳试验时,通常是测出对称循环疲劳极限 σ_{-1} 及脉动循环疲劳极限 σ_0 。由于对称循环变应力的平均应力 $\sigma_m=0$,应力幅等于疲劳极限 σ_{-1} ,所以对称循环疲劳极限在图 3-3 中以纵坐标轴上的点 A' 来表示。脉动循环变应力的平均应力及应力幅均为 $\sigma_m=\sigma_a=\frac{\sigma_0}{2}$,所以脉动循环疲劳极限以由原点 O 所作 45° 射线上的点 D' 来表示。连接点 A' 、 D' 得直线 $A'D'$ 。由于这条直线与不同应力比的情况下进行试验所求得的疲劳极限应力曲线(即曲线 $A'D'$,图 3-3 中未示出)非常接近,故用此直线近似代替曲线,所以直线 $A'D'$ 上任何一点都代表了一定应力比时的疲劳极限。横坐标上任何一点都代表应力幅等于零的应力,即静应力。取点 C 的坐标值等于材料的屈服极限 σ_s ^①,并自点 C 作一直

① 国家标准 GB/T 228.1—2021 中规定了应力、抗拉强度、上屈服强度、下屈服强度等术语,分别采用 R 、 R_m 、 R_{eH} 、 R_{eL} 等表示。由于在本课程的先学课程“材料力学”中仍采用旧国标中的 σ 、 σ_B 、 σ_s 表示应力、强度极限(或抗拉强度)和屈服极限(屈服极限一般对应下屈服强度),所以为了课程的延续,本书中采用材料力学中的符号和术语。



线与直线 CO 成 45° 的夹角, 交 $A'D'$ 的延长线于点 G' , 则 CG' 上任何一点均代表 $\sigma_{\max} = \sigma'_m + \sigma'_a = \sigma_s$ 的变应力状况。

于是, 材料试件的极限应力线图近似为折线 $A'G'C$ 。材料中发生的应力若处于 $OA'G'C$ 区域以内, 则表示不发生破坏; 若在此区域以外, 则表示一定要发生破坏; 若正好处于折线上, 则表示工作应力状况正好达到极限状态。

图 3-3 中, 直线 $A'G'$ 的方程可由两点坐标 $A'(0, \sigma_{-1})$ 及 $D'(\frac{\sigma_0}{2}, \frac{\sigma_0}{2})$ 求得, 即

$$\sigma_{-1} = \sigma'_a + \varphi_\sigma \sigma'_m \quad (3-4)$$

直线 CG' 的方程为

$$\sigma'_m + \sigma'_a = \sigma_s \quad (3-5)$$

式中: σ'_m 、 σ'_a ——试件受循环弯曲应力时疲劳极限的平均应力与应力幅值。

φ_σ ——试件受循环弯曲应力时的材料常数, 其值由试验及下式决定:

$$\varphi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (3-6)$$

根据试验, 对碳钢, $\varphi_\sigma \approx 0.1 \sim 0.2$; 对合金钢, $\varphi_\sigma \approx 0.2 \sim 0.3$ 。



拓展资源

3-2 机械零件的疲劳强度

1. 影响机械零件疲劳极限的因素

由于机械零件在几何尺寸和形状、加工质量和表面强化工艺等方面与材料试件存在一定的差异, 往往会导致**零件的疲劳极限小于材料试件的疲劳极限**。若以综合影响系数 K_σ 表示材料对称循环弯曲疲劳极限 σ_{-1} 与零件对称循环弯曲疲劳极限 σ_{-1e} 的比值, 即

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1e}} \quad (3-7)$$

则当已知 K_σ 及 σ_{-1} 时, 就可按下式估算出零件的对称循环弯曲疲劳极限:

$$\sigma_{-1e} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma} \quad (3-8)$$

在不对称循环时, K_σ 是试件与零件的极限应力幅的比值。把零件材料的极限应力线图(图 3-3)中的直线 $A'D'G'$ 按比例 K_σ 向下移, 成为图 3-4 所示的直线 ADG 。而图 3-3 中的 CG' 部分, 由于是按照静应力的要求来考虑的, 故不需进行修正。这样一来, 零件的极限应力曲线即可由折线 AGC (极限应力折线) 表示。直线 AG

的方程由两点坐标 $A(0, \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma})$ 及 $D(\frac{\sigma_0}{2}, \frac{\sigma_0}{2K_\sigma})$

求得:

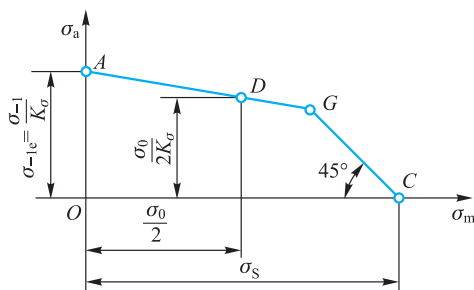


图 3-4 零件的极限应力线图



视频讲解



$$\sigma_{-1e} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma} = \sigma'_{ac} + \varphi_{\sigma c} \sigma'_{mc} \quad (3-9)$$

或

$$\sigma_{-1} = K_\sigma \sigma'_{ac} + \varphi_{\sigma c} \sigma'_{mc} \quad (3-9a)$$

直线 CG 的方程为

$$\sigma'_{ac} + \sigma'_{mc} = \sigma_s \quad (3-10)$$

式中: σ'_{ac} ——零件受循环弯曲应力时的极限应力幅。

σ'_{mc} ——零件受循环弯曲应力时的极限平均应力。

$\varphi_{\sigma c}$ ——零件受循环弯曲应力时的材料常数, $\varphi_{\sigma c}$ 可用下式计算:

$$\varphi_{\sigma c} = \frac{\varphi_\sigma}{K_\sigma} = \frac{1}{K_\sigma} \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \quad (3-11)$$

上述各式中, 系数 K_σ 称为**弯曲疲劳极限综合影响系数**, 可用下式计算^[18, 19]:

$$K_\sigma = \left(\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma} + \frac{1}{\beta_\sigma} - 1 \right) \frac{1}{\beta_q} \quad (3-12)$$

式中: k_σ ——零件的有效应力集中系数(脚标 σ 表示在正应力条件下, 下同);

ε_σ ——零件的尺寸及截面形状系数;

β_σ ——零件的表面质量系数;

β_q ——零件的强化系数。

以上各系数的值可参见本章附录或有关资料。

同样, 对于切应力的情况, 也可以仿照式(3-9)及式(3-10), 并以 τ 代换 σ , 得出极限应力线图的方程为

$$\tau_{-1e} = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau} = \tau'_{ac} + \varphi_{\tau c} \tau'_{mc} \quad (3-13)$$

或

$$\tau_{-1} = K_\tau \tau'_{ac} + \varphi_{\tau c} \tau'_{mc} \quad (3-13a)$$

及

$$\tau'_{ac} + \tau'_{mc} = \tau_s \quad (3-14)$$

式中, $\varphi_{\tau c}$ 为零件受循环切应力时的材料常数。

仿照式(3-11)得

$$\varphi_{\tau c} = \frac{\varphi_\tau}{K_\tau} = \frac{1}{K_\tau} \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} \quad (3-15)$$

式中: φ_τ ——试件受循环切应力时的材料常数, $\varphi_\tau \approx 0.5\varphi_\sigma$;

K_τ ——**剪切疲劳极限综合影响系数**。

仿照式(3-12)得

$$K_\tau = \left(\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau} + \frac{1}{\beta_\tau} - 1 \right) \frac{1}{\beta_q} \quad (3-16)$$

式中, k_τ 、 ε_τ 、 β_τ 的含义分别与上述 k_σ 、 ε_σ 、 β_σ 相对应, 脚标 τ 则表示在切应力条件下。各系数的值可参见本章附录或有关资料。



2. 单向稳定变应力时机械零件的疲劳强度计算

在做机械零件的疲劳强度计算时, 首先需求出机械零件危险截面上交变工作应力的最大值 σ_{\max} 及最小值 σ_{\min} , 据此计算出平均工作应力 σ_m 及工作应力幅 σ_a 。然后, 在极限应力线图的坐标上即可确定相应于 σ_m 及 σ_a 的工作应力点 M (或者点 N), 如图 3-5 所示。

显然, 强度计算时所用的极限应力应是零件的极限应力线图 (AGC) 上的某一个点所代表的应力。到底用哪一个点来表示极限应力才算合适, 这要根据零件所承载荷的变化规律, 以及零件与相邻零件互相约束情况的不同而使工作应力可能发生的变化规律来决定。可能发生的典型的应力变化规律常有下列三种: 第一种, 变应力的应力比保持不变, 即 $r=C$ (例如绝大多数转轴中的应力状态); 第二种, 变应力的平均应力保持不变, 即 $\sigma_m=C$ (例如振动着的受载弹簧中的应力状态); 第三种, 变应力的最小应力保持不变, 即 $\sigma_{\min}=C$ (例如紧螺栓连接中螺栓受轴向变载荷时的应力状态)。下面分别讨论这三种情况。

(1) $r=C$ 的情况

当 $r=C$ 时, 需找到一个其应力比与零件工作应力的应力比相同的极限应力值。因为

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1-r}{1+r} = C' \quad (3-17)$$

式中, C' 也是一个常数。所以在图 3-6 中, 从坐标原点引射线通过工作应力点 M (或 N), 与极限应力折线交于点 M_1 (或 N_1), 得到 OM_1 (或 ON_1), 则在此射线上任何一个点所代表的应力循环都具有相同的应力比。因为点 M_1 (或 N_1) 为极限应力折线上的一个点, 它所代表的最大应力值就是强度计算时所用的极限应力。

联解 OM 及 AG 两直线的方程式, 可求出点 M_1 的坐标值 σ'_{me} 及 σ'_{ac} , 把它们加起来, 就可求出对应于点 M 的零件的疲劳极限为

$$\sigma'_{\max} = \sigma'_{ac} + \sigma'_{me} = \frac{\sigma_{-1}(\sigma_m + \sigma_a)}{K_\sigma \sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1} \sigma_{\max}}{K_\sigma \sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_m} \quad (3-18)$$

于是, 计算安全系数 S_{ca} 及强度条件式为

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma} = \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_m} \geq S \quad (3-19)$$

式中, S 为零件的设计安全系数。

对应于点 N 的极限应力点 N_1 位于直线 CG 上。此时的极限应力即为屈服极限 σ_s 。这就是说, 工作应力为 N 点时, 可能发生的是屈服失效, 故只需进行静强度计算。在工作

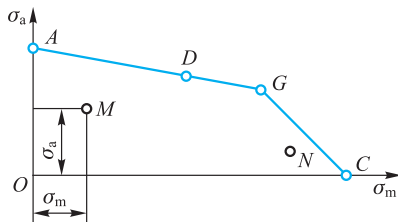


图 3-5 零件的工作应力在极限应力线图上的位置

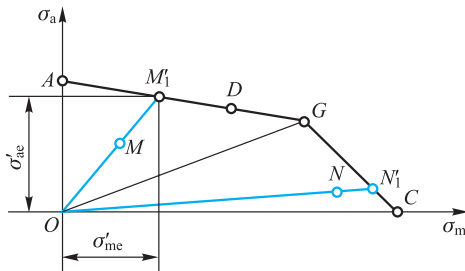


图 3-6 $r=C$ 时极限应力的确定



应力为单向应力时, 强度条件式为

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma} = \frac{\sigma_s}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_s}{\sigma_a + \sigma_m} \geq S \quad (3-20)$$

分析图 3-6 得知, 凡是工作应力点位于 OGC 区域内时, 在应力比等于常数的条件下, 极限应力统为屈服极限, 都只需进行静强度计算。

(2) $\sigma_m = C$ 的情况

当 $\sigma_m = C$ 时, 需找到一个平均应力与零件平均工作应力相同的极限应力。在图 3-7 中, 通过点 M (或 N) 作纵轴的平行线 MM_2' (或 NN_2'), 则此线上任何一个点所代表的循环应力都具有相同的平均应力值。因为点 M_2' (或 N_2') 为极限应力折线上的点, 所以它代表的最大应力值就是强度计算时所用的极限应力。

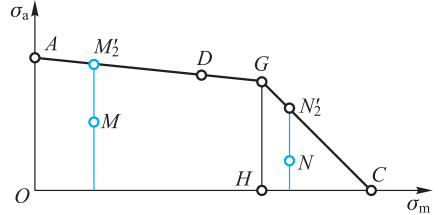


图 3-7 $\sigma_m = C$ 时极限应力的确定

MM_2' 的方程为 $\sigma'_{me} = \sigma_m$ 。联解 MM_2' 及 AG 两直线的方程式, 求出点 M_2' 的坐标 σ'_{me} 及 σ'_{ae} , 把它们加起来, 就可求得对应于点 M 的零件的疲劳极限 σ'_{max} 。疲劳极限 σ'_{max} 和极限应力幅 σ'_{ae} 的计算式为

$$\sigma'_{max} = \sigma_{-1e} + \sigma_m \left(1 - \frac{\varphi_\sigma}{K_\sigma} \right) = \frac{\sigma_{-1} + (K_\sigma - \varphi_\sigma)\sigma_m}{K_\sigma} \quad (3-21)$$

$$\sigma'_{ae} = \frac{\sigma_{-1} - \varphi_\sigma \sigma_m}{K_\sigma} \quad (3-22)$$

根据最大应力求得的计算安全系数 S_{ca} 及强度条件式为

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma} = \frac{\sigma'_{max}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{-1} + (K_\sigma - \varphi_\sigma)\sigma_m}{K_\sigma(\sigma_m + \sigma_a)} \geq S \quad (3-23)$$

也有文献建议, 在 $\sigma_m = C$ 的情况下, 按照应力幅来校核零件的疲劳强度, 即按应力幅求得安全系数计算值为

$$S'_a = \frac{\sigma'_{ae}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1} - \varphi_\sigma \sigma_m}{K_\sigma \sigma_a} \geq S \quad (3-24)$$

对应于点 N 的极限应力由点 N_2' 表示, 它位于直线 CG 上, 故仍只按式 (3-20) 进行静强度计算, 分析图 3-7 可知, 凡是工作应力点位于 CGH 区域内时, 在 $\sigma_m = C$ 的条件下, 极限应力统为屈服极限, 只需按式 (3-20) 进行静强度计算。

(3) $\sigma_{min} = C$ 的情况

当 $\sigma_{min} = C$ 时, 需找到一个最小应力与零件工作应力的最小应力相同的极限应力。因为

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a = C \quad (3-25)$$

所以在图 3-8 中, 通过点 M (或 N), 作与横坐标轴夹角为 45° 的直线, 则此直线上任何一个点所代表的应力均具有相同的最小应力。该直线与 AG (或 CG) 线的交点 M_3' (或 N_3') 在极限应力折线上, 所以它所代表的最大应力就是强度计算时所用的极限应力。

通过点 O 及点 G 作与横坐标轴夹角为 45° 的直线, 得 OJ 及 IG , 把安全工作区域分



成三个部分。当工作应力点位于 AOJ 区域内时, 最小应力均为负值。这在实际的机械结构中是极为罕见的, 所以无须讨论这一情况。当工作应力点位于 GIC 区域内时, 极限应力统为屈服极限, 故只需按式 (3-20) 进行静强度计算。工作应力点位于 $OJGI$ 区域内时, 极限应力在疲劳极限应力折线 AG 上。计算时所用的分析方法和前述两种情况相同, 而所得到的计算安全系数 S_{ca} 及强度条件式为

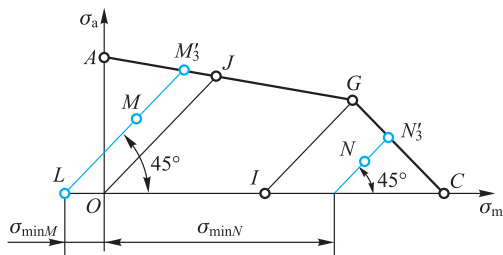


图 3-8 $\sigma_{\min}=C$ 时极限应力的确定

$$S_{ca} = \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{2\sigma_{-1} + (K_{\sigma} - \varphi_{\sigma})\sigma_{\min}}{(K_{\sigma} + \varphi_{\sigma})(2\sigma_a + \sigma_{\min})} \geq S \quad (3-26)$$

在 $\sigma_{\min}=C$ 的条件下, 也可以写出按极限应力幅求得的计算安全系数 S'_a 及强度条件为

$$S'_a = \frac{\sigma'_{ae}}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1} - \varphi_{\sigma}\sigma_{\min}}{(K_{\sigma} + \varphi_{\sigma})\sigma_a} \geq S_a \quad (3-27)$$

具体设计零件时, 如果难以确定应力可能的变化规律, 在实践中往往采用 $r=C$ 时的公式。

(4) 等效对称循环变应力

进一步分析式 (3-19), 分子为材料的对称循环弯曲疲劳极限, 分母为工作应力幅乘以应力幅的综合影响系数 (即 $K_{\sigma}\sigma_a$) 再加上 $\varphi_{\sigma}\sigma_m$ 。从实际效果来看, 可以把 $\varphi_{\sigma}\sigma_m$ 项看作一个应力幅, 而 φ_{σ} 是把平均应力折算为等效的应力幅的折算系数。因此, 可以把 $K_{\sigma}\sigma_a + \varphi_{\sigma}\sigma_m$ 看作一个与原来作用的不对称循环变应力等效的对称循环变应力。由于是对称循环, 所以它是一个应力幅, 记为 σ_{ad} 。这个过程称为**应力的等效转化**。由此得

$$\sigma_{ad} = K_{\sigma}\sigma_a + \varphi_{\sigma}\sigma_m \quad (3-28)$$

于是计算安全系数为

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ad}} \quad (3-29)$$

对于剪切变应力的疲劳强度计算, 只需把以上各公式中的正应力符号 σ 改为切应力符号 τ 即可。

(5) 零件的有限寿命疲劳强度计算

如果只要求机械零件在有限的使用期限内不发生疲劳破坏, 具体地讲, 当零件应力循环次数 $10^4 < N < N_0$ 时, 在做疲劳强度计算时所采用的极限应力 σ_{lim} 应当为所要求的寿命时的疲劳极限。即在以上有关计算公式中, 统统以按式 (3-3) 求出的 σ_{rN} 来代替 σ_r (即以 σ_{-1N} 代替 σ_{-1} , 以 σ_{0N} 代替 σ_0 等)。显然, 这时零件的计算安全系数就会增大。

3. 单向不稳定变应力时机械零件的疲劳强度计算

不稳定变应力可分为非规律性不稳定变应力和规律性不稳定变应力两大类。

非规律性不稳定变应力, 其变应力参数的变化要受到很多偶然因素的影响, 是随机变化的。承受非规律性不稳定变应力作用的典型零件, 可以汽车的钢板弹簧为例, 作用在它



上面的载荷和应力的的大小,要受到载重量大小、行车速度、轮胎充气程度、路面状况以及驾驶员的技术水平等一系列因素的影响。对于这一类问题,应根据大量的试验求得载荷及应力的统计分布规律,然后用统计疲劳强度理论的方法来处理。

规律性不稳定变应力,其变应力参数的变化有一个简单的规律。承受近似于规律性不稳定变应力作用的零件,可以专用机床的主轴、高炉上料机构的零件等为例。对于这一类问题,是根据**疲劳损伤线性累积假说**(常称为 Miner 法则)进行计算的。下面就来讨论这一问题。

图 3-9 为规律性不稳定变应力示意图。变应力 σ_1 (对称循环变应力的应力幅,或不对称循环变应力的等效对称循环变应力的应力幅,下同)作用了 n_1 次, σ_2 作用了 n_2 次……。把图 3-9 中所示的应力图放在材料的 $\sigma-N$ 曲线上,如图 3-10 所示。根据 $\sigma-N$ 曲线,可以找出仅有 σ_1 作用时使材料发生疲劳破坏的应力循环次数 N_1 。假使应力每循环一次都对材料的破坏起相同的作用,则应力 σ_1 每循环一次对材料的损伤率即为 $\frac{1}{N_1}$,而循环了 n_1 次的 σ_1 对材料的损伤率即为 $\frac{n_1}{N_1}$ 。如此类推,循环 n_2 次的 σ_2 对材料的损伤率为 $\frac{n_2}{N_2}$ 等。

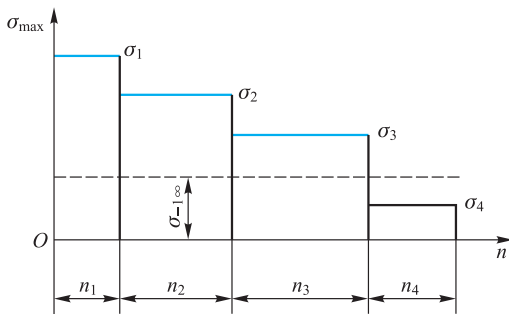


图 3-9 规律性不稳定变应力示意图

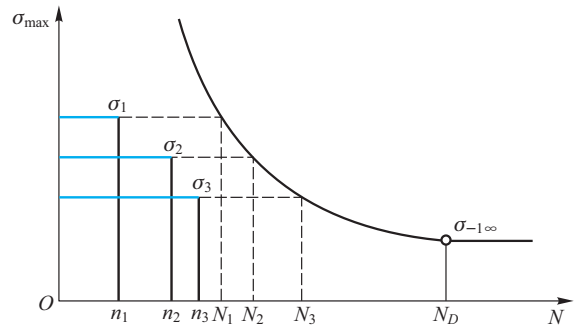


图 3-10 不稳定变应力在 $\sigma-N$ 曲线上的表示

按图 3-9 所示, σ_4 小于材料的持久疲劳极限 $\sigma_{-1\infty}$, 它当然可以作用无限多次循环而不引起疲劳破坏。这就是说, 小于材料持久疲劳极限的工作应力对材料不起疲劳损伤的作用, 故在计算疲劳损伤时可以不予考虑。

因为当损伤率达到 100% 时, 材料即发生疲劳破坏, 故对应于极限状况有

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \frac{n_3}{N_3} = 1$$

一般地写成

$$\sum_{i=1}^z \frac{n_i}{N_i} = 1 \quad (3-30)$$

式 (3-30) 是疲劳损伤线性累积假说的数学表达式。自从此假说提出后, 学术界和工程界都做了大量的试验研究, 以验证此假说的正确性。试验证明, 当各级应力的应力幅



无很大的差别以及无短时的强烈过载时, 这个规律是正确的; 当各级应力是先作用最大的, 然后依次降低时, 式(3-30)中等号右边的值小于1; 当各级应力是先作用最小的, 然后依次升高时, 式(3-30)中等号右边的值要大于1。通过大量的试验, 可以有以下关系:

$$\sum_{i=1}^z \frac{n_i}{N_i} = 0.7 \sim 2.2 \quad (3-31)$$

当式(3-31)右边的值小于1时, 表示每一循环的变应力的损伤率实际上是大于 $\frac{1}{N_i}$ 的。这一现象可以解释为: 使初始疲劳裂纹产生和使裂纹扩展所需的应力水平是不同的。递升的变应力不易产生破坏, 是由于前面施加的较小的应力对材料不但没有产生初始疲劳裂纹, 而且起了强化的作用; 递减的变应力却由于开始作用了最大的变应力, 引起了初始裂纹, 则以后施加的应力虽然较小, 但仍能够使裂纹扩展, 故对材料有削弱的作用, 因此使式(3-31)右边的值小于1。虽然如此, 由于疲劳试验的数据具有很大的离散性, 从平均的意义上来说, 在设计中应用式(3-30)还是可以得出一个较为合理的结果。

根据式(3-1a)可得

$$N_1 = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_1} \right)^m, \quad N_2 = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_2} \right)^m, \quad \dots, \quad N_z = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_z} \right)^m$$

把它们代入式(3-30), 即得到不稳定变应力时的极限条件为

$$\frac{1}{N_0 \sigma_{-1}^m} (n_1 \sigma_1^m + n_2 \sigma_2^m + \dots + n_z \sigma_z^m) = \frac{\sum_{i=1}^z n_i \sigma_i^m}{N_0 \sigma_{-1}^m} = 1$$

如果材料在上述应力作用下还未达到破坏, 则

$$\frac{\sum_{i=1}^z n_i \sigma_i^m}{N_0 \sigma_{-1}^m} < 1 \quad \text{或} \quad \sum_{i=1}^z n_i \sigma_i^m < N_0 \sigma_{-1}^m \quad (3-32)$$

$$\text{令} \quad \sigma_{ca} = \sqrt[m]{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^z n_i \sigma_i^m} \quad (3-33)$$

σ_{ca} 称为不稳定变应力的计算应力。这时式(3-32)为

$$\sigma_{ca} < \sigma_{-1} \quad (3-34)$$

此时, 计算安全系数 S_{ca} 及强度条件式为

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ca}} \geq S \quad (3-35)$$

应注意的是, 上述各式中的 σ_i 是对称循环变应力的应力幅。在对零件进行疲劳强度计算时, 应计入 K_σ 的影响, 即用 $K_\sigma \sigma_i$ 代替上述各式中的 σ_i 。

对于非对称循环的不稳定变应力, 可先按式(3-28)求出各等效的对称循环变应力



σ_{ad1} 、 σ_{ad2} 、 \dots 、 σ_{adz} ，然后应用式(3-33)及式(3-35)进行强度计算。

例题 3-1 45 钢经过调质后的性能为 $\sigma_{-1}=307$ MPa，材料常数 $m=9$ ， $N_0=5 \times 10^6$ 。现用此材料做试件进行试验，以对称循环变应力 $\sigma_1=500$ MPa 作用 10^4 次， $\sigma_2=400$ MPa 作用 10^5 次。试计算该试件在此条件下的计算安全系数。若以后再以 $\sigma_3=350$ MPa 作用于试件，则还能再循环多少次才会使试件破坏？

[解] 根据式(3-33)

$$\sigma_{ca} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^z n_i \sigma_i^m} = \sqrt{\frac{1}{5 \times 10^6} \times (10^4 \times 500^9 + 10^5 \times 400^9)} \text{ MPa} = 275.52 \text{ MPa}$$

根据式(3-35)，试件的计算安全系数为

$$S_{ca} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{ca}} = \frac{307}{275.52} = 1.114$$

又根据式(3-1a)

$$N_1 = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_1} \right)^m = 5 \times 10^6 \times \left(\frac{307}{500} \right)^9 = 0.062 \times 10^6$$

$$N_2 = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_2} \right)^m = 5 \times 10^6 \times \left(\frac{307}{400} \right)^9 = 0.462 \times 10^6$$

$$N_3 = N_0 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_3} \right)^m = 5 \times 10^6 \times \left(\frac{307}{350} \right)^9 = 1.537 \times 10^6$$

若要使试件破坏，则由式(3-30)得

$$\frac{10^4}{0.062 \times 10^6} + \frac{10^5}{0.462 \times 10^6} + \frac{n_3}{1.537 \times 10^6} = 1$$

$$\text{故 } n_3 = 1.537 \times 10^6 \times \left(1 - \frac{10^4}{0.062 \times 10^6} - \frac{10^5}{0.462 \times 10^6} \right) = 9.564 \times 10^5$$

即该试件再在 $\sigma_3=350$ MPa 的对称循环变应力作用下，估计可再承受 9.564×10^5 次应力循环。

事实上，试件还可以再工作的循环次数并不会准确地等于以上所求的值。如按 $\sum_{i=1}^z \frac{n_i}{N_i} = 0.7 \sim 2.2$ 来计算，则 n_3 将在 $4.953 \times 10^5 \sim 2.801 \times 10^6$ 范围内。

4. 双向稳定变应力时机械零件的疲劳强度计算

当零件上同时作用有同相位的法向对称循环稳定变应力（简称法向应力） σ_a 及切向对称循环稳定变应力（简称切应力） τ_a 时，对于钢材，经过试验得出的极限应力关系式为

$$\left(\frac{\tau'_a}{\tau_{-1e}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma'_a}{\sigma_{-1e}} \right)^2 = 1 \quad (3-36)$$

根据式(3-36)， $\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1e}} - \frac{\tau_a}{\tau_{-1e}}$ 曲线是一个四分之一单位

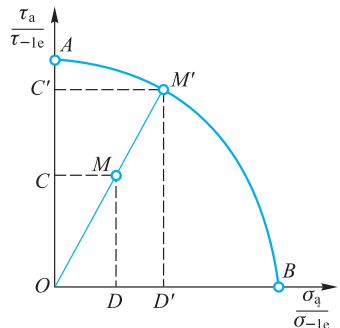


图 3-11 双向应力时的极限应力线图



圆,如图3-11所示。式中 τ'_a 及 σ'_a 分别为同时作用的切应力幅及法向应力幅的极限值。由于是对称循环变应力,故应力幅即为最大应力。圆弧 $AM'B$ 上任何一个点即代表一对极限应力 σ'_a 及 τ'_a 。如果作用于零件上的应力幅 σ_a 及 τ_a 在坐标系中用点 M 表示,则由于此工作应力点在极限圆以内,未达到极限条件,因而是安全的。引直线 OM 与 AB 交于点 M' ,则计算安全系数 S_{ca} 为

$$S_{ca} = \frac{OM'}{OM} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD} \quad (3-36a)$$

式中,各线段的长度为 $OC' = \frac{\tau'_a}{\tau_{-1e}}$ 、 $OC = \frac{\tau_a}{\tau_{-1e}}$ 、 $OD' = \frac{\sigma'_a}{\sigma_{-1e}}$ 、 $OD = \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1e}}$,代入式(3-36a)后得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau'_a}{\tau_{-1e}} &= S_{ca} \frac{\tau_a}{\tau_{-1e}}, \text{即 } \tau'_a = S_{ca} \tau_a \\ \frac{\sigma'_a}{\sigma_{-1e}} &= S_{ca} \frac{\sigma_a}{\sigma_{-1e}}, \text{即 } \sigma'_a = S_{ca} \sigma_a \end{aligned} \right\} \quad (3-36b)$$

将式(3-36b)代入式(3-36),得

$$\left(\frac{S_{ca} \tau_a}{\tau_{-1e}} \right)^2 + \left(\frac{S_{ca} \sigma_a}{\sigma_{-1e}} \right)^2 = 1 \quad (3-36c)$$

从强度计算的观点来看, $\frac{\tau_{-1e}}{\tau_a} = S_\tau$ 是零件只承受切应力 τ_a 时的计算安全系数, $\frac{\sigma_{-1e}}{\sigma_a} = S_\sigma$ 是零件只承受法向应力 σ_a 时的计算安全系数,故

$$\left(\frac{S_{ca}}{S_\tau} \right)^2 + \left(\frac{S_{ca}}{S_\sigma} \right)^2 = 1$$

亦即

$$S_{ca} = \frac{S_\sigma S_\tau}{\sqrt{S_\sigma^2 + S_\tau^2}} \quad (3-37)$$

当零件上所承受的两个变应力均为不对称循环变应力时,可先由式(3-19)分别求出

$$S_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_m} \quad \text{及} \quad S_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \tau_a + \varphi_\tau \tau_m}$$

然后按式(3-37)求出零件的计算安全系数 S_{ca} 。

5. 提高机械零件疲劳强度的措施

在零件的设计阶段,除了采取提高零件强度的一般措施(如选用更好的材料、适当增大危险结构的尺寸等)外,还可以通过以下一些设计措施来提高机械零件的疲劳强度。

1) 尽可能降低零件上应力集中的影响,是提高零件疲劳强度的首要措施。零件结构形状和尺寸的突变是应力集中的结构根源。因此,为了减少应力集中,应尽量避免零件结构形状和尺寸的突变或使其变化尽可能地平滑和均匀。为此,要尽可能地增大尺寸过渡处的圆角半径,同一零件上相邻截面处的刚性变化应尽可能小等。



在不可避免地要产生较大的应力集中的结构处,可采用减载槽来降低应力集中的影响。例如图 3-12 中用加开环槽作为减载槽的办法来降低轴肩处的应力集中。

2) 选用疲劳强度高的材料和规定能够提高材料疲劳强度的热处理方法及强化工艺。

3) 提高零件的表面质量。如将处在应力较高区域的零件表面加工得较为光洁,对于工作在腐蚀性介质中的零件规定适当的表面保护等。

4) 尽可能消除零件表面可能发生的初始裂纹或减小其尺寸,对于延长零件的疲劳寿命有着比提高材料性能更为显著的作用。因此,对于重要的零件,在设计图样上应规定严格的检验方法及要求。

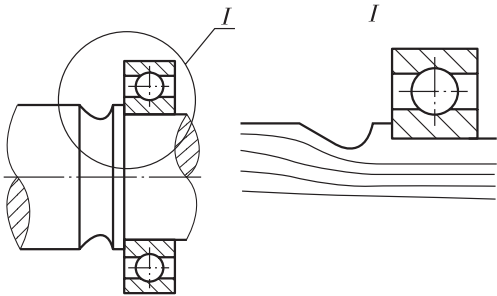


图 3-12 减载槽

3-3 机械零件的抗断裂强度

在工程实际中,有这样一些结构,若按常规的强度理论来分析,它们是能满足强度条件的,即工作应力小于许用应力。但是在实际使用中,又往往会发生突然性的断裂。这种在工作应力小于许用应力时所发生的突然断裂,常称为**低应力脆断**。

对大量结构断裂事故的分析表明,大部分低应力脆断事故都是发生在应用了高强度钢材的结构或大型的结构件中,例如飞机机身、机器中的重载构件以及高压容器等结构。在发生脆断的构件断口处,往往可以找到原有的宏观裂纹的痕迹。进一步的研究和分析发现,高强度材料的大量采用、结构的大型化、焊接工艺使用的普遍化、结构工作条件的复杂化和载荷形式的多样化,是低应力脆断大量发生的外在原因;而结构内部裂纹和缺陷的存在,则是导致低应力脆断的内在原因。

试验研究表明,对于高强度材料,一方面是它的强度高(即许用应力大),另一方面则是它抵抗裂纹扩展的能力可能会随着强度的增高而下降。因此,用传统的强度理论计算高强度材料结构的强度问题,就存在一定的局限性。为了解决这一问题,断裂力学便应运而生。

断裂力学是研究带有裂纹或带有尖缺口的结构或构件的强度和变形规律的学科。准确地说,上述裂纹是指宏观裂纹,即用肉眼或低倍显微镜能看得见的裂纹。工程中常认为裂纹尺寸大于 0.1 mm,就称为宏观裂纹。断裂力学建立了构件的裂纹尺寸、工作应力以及材料抵抗裂纹扩展能力三者之间的定量关系。

对于传统的强度理论,是运用应力和许用应力来度量和控制结构的强度与安全性。为了度量含裂纹结构或构件的强度,在断裂力学中运用了应力强度因子 K_I (或 K_{II} 、 K_{III})^① 和平面应变断裂韧度 K_{IC} (或 K_{IIc} 、 K_{IIIc}) 两个度量指标。应力强度因子 K_I 是反映裂纹顶端附近各点应力大小的物理量,表征裂纹顶端附近应力场的强弱。 K_I 的值越大,裂纹顶端附近

① 脚标 I、II、III 分别表示按承载时裂纹产生不同的变形现象(或趋势)而划分的裂纹类型,如 I 表示张开型。



的应力场越强。平面应变断裂韧度 K_{IC} 是取决于材料性质的参数,反映了材料阻止裂纹失稳扩展的能力。 K_{IC} 的值越大,材料抵抗裂纹失稳扩展的能力越强。利用这两项指标判别结构安全性的判别式是:若 $K_I < K_{IC}$,则裂纹不会失稳扩展;若 $K_I \geq K_{IC}$,则裂纹会失稳扩展。 K_I 和 K_{IC} 的常用单位为 $\text{MPa} \cdot \text{mm}^{\frac{1}{2}}$ 。

高强度材料的广泛应用,推进了断裂力学的发展。随着对断裂力学研究的不断深入,其应用范围不断扩大。目前,断裂力学在工程上主要用于估计含裂纹构件的安全性和使用寿命,确定构件在工作条件下所允许的最大裂纹尺寸,用断裂力学指导结构的安全性设计。

运用断裂力学对含裂纹构件进行强度分析和安全性评价时,通常应做以下几方面的工作:

1) 分析确定裂纹的形状、大小及分布,以确定初始裂纹的尺寸 a_0 ,通常用对构件进行精确的无损探伤来确定 a_0 。

2) 对构件的工作载荷进行充分的分析,运用断裂力学的知识,确定裂纹顶端的应力强度因子 K_I 。

3) 通过断裂力学试验,测定构件材料的断裂韧度 K_{IC} 。目前已有一些工程手册中列出了常用结构材料的平面应变断裂韧度。

4) 对构件进行安全性判断。

例如,某燃气轮机的一个零件是由高强度合金钢制成的。工作时,零件所受最大应力为 410 MPa 。经超声波无损探伤以及进一步的分析,确定其结构内部可能有最大长度为 3 mm 的等效裂纹。根据断裂力学计算得到应力强度因子 $K_I = 1.8 \times 10^7 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{\frac{1}{2}}$ 。由试验可以确定该零件材料的断裂韧度 $K_{IC} = 7.5 \times 10^7 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^{\frac{1}{2}}$ 。进一步可计算出断裂破坏

的计算安全系数 $S_{ca} = \frac{K_{IC}}{K_I} = \frac{7.5}{1.8} = 4.17$ 。因此,可以判断该零件的安全性是足够的。

断裂力学自 20 世纪 50 年代诞生以来,已逐步得到学术界及工程界的广泛重视。现在断裂力学已应用于航空、航天、交通、机械、化工等许多领域。由于断裂力学涉及较深的数学和力学理论,所以本节只简略介绍了一些有关的基本概念。应该说,这点知识对于认识和运用断裂力学还相差甚远。进一步了解和学习断裂力学知识,可参考有关专著或教材。应该指出的是,实践表明,对于采用低中强度材料的小型结构,用传统的强度计算方法进行设计是足够的。在很多情况下,传统的强度理论仍不失其使用价值。

3-4 机械零件的接触强度

机械中各零件之间力的传递,总是通过两零件的接触来实现的。除了共形面(即两相互接触面的几何形态完全相同,处处贴合)相接触(例如平面与平面相接触)的情况外,大量存在着异形曲面相接触的情况。这些异形曲面在未受外力时的初始接触情况,不外乎是线接触(图 3-13a、b)和点接触(图 3-13c、d)两种。图 3-13a、c 所示的接触称为**外接触**,图 3-13b、d 所示的接触称为**内接触**。在通用机械零件中,渐开线直齿圆柱齿轮齿面间的接触为线接触,外啮合时为外接触,内啮合时为内接触。滚动轴承中,钢球与套



圈的接触则为点接触。

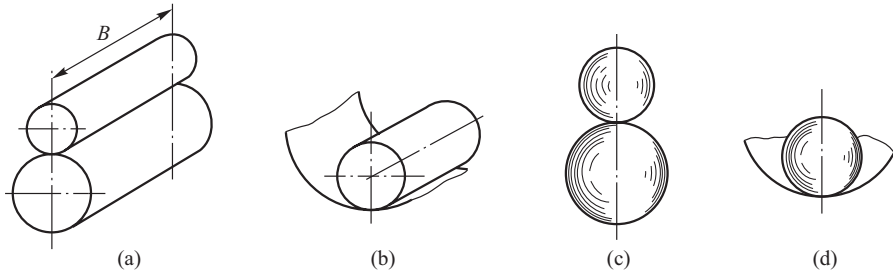


图 3-13 几种曲面接触情况

图 3-14 表示两个轴线平行的圆柱外接触和内接触受力后的横截面示意图。受力前，两圆柱沿与轴线相平行的一条线（在图上投影为一个点）相接触；受力后，由于材料的弹性变形，接触线变成宽度为 $2b$ 的一个矩形接触面。由图可看出，两零件接触面上沿接触宽度不同点处材料发生的弹性位移量在连心线方向上是不相同的。因此，接触表面上所承受的压应力也是处处不相同的，其分布呈半圆柱形。初始接触线处的压应力最大，以此最大压应力代表两零件间接触受力后的应力，称为**接触应力**，用符号 σ_H 表示。图中， ω_1 及 ω_2 分别为零件 1 和零件 2 初始接触线上沿连心线方向的弹性变形（即最大弹性变形）。在点接触情形下，受力后也会发生类似的变形，不过接触区一般呈椭圆形，而不是线接触时的矩形。接触应力的分布呈半椭球形。当两个球面相接触时，接触区则变成一个圆形。

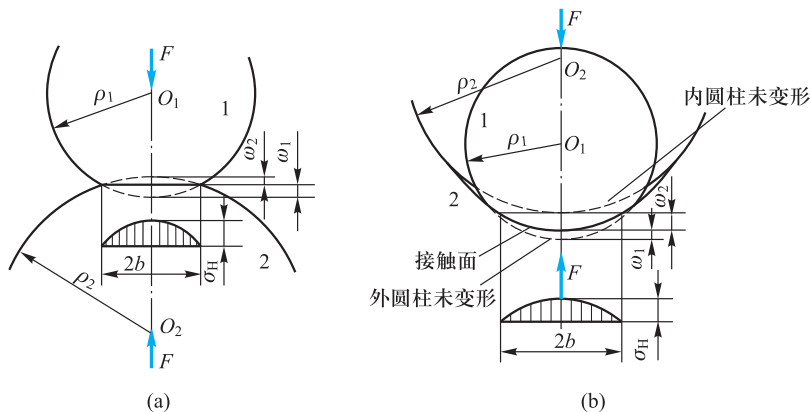


图 3-14 两圆柱接触受力后的变形与应力分布

在本书中，用到接触应力计算的地方仅为线接触的情况。球轴承及圆弧齿轮中虽用到点接触的概念，但未做接触应力计算。接触应力的计算是一个弹性力学问题。对于线接触，弹性力学给出的接触应力计算公式为

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{\frac{F}{B} \left(\frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2} \right)}{\pi \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (3-38)$$



式中： F ——作用于接触面上的总压力；

B ——初始接触线长度；

ρ_1 、 ρ_2 ——零件1和零件2初始接触线处的曲率半径，通常令 $\frac{1}{\rho_\Sigma} = \frac{1}{\rho_1} \pm \frac{1}{\rho_2}$ ，称为综合

曲率，而 $\rho_\Sigma = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2}$ 称为综合曲率半径，其中正号用于外接触，负号用于内接触；

μ_1 、 μ_2 ——零件1和零件2材料的泊松比；

E_1 、 E_2 ——零件1和零件2材料的弹性模量。

当接触位置连续改变时，显然对于零件上任一点处的接触应力只能在 $0 \sim \sigma_H$ 范围内改变，因此接触变应力是一个脉动循环变应力。在做接触疲劳计算时，极限应力也应是一个脉动循环的极限接触应力。

在一些文献中，接触应力也称为**赫兹应力**，以纪念首先解决接触应力计算问题的德国科学家赫兹（H. R. Hertz）。



拓展资源

3-5 机械零件可靠性设计简介

可靠性作为产品一个重要的质量指标特征，表示产品在规定的工作条件下及规定的使用期限内完成规定功能的能力。传统的设计方法是把设计变量当作确定性变量来处理。但是，对于一大批同类产品中任何特定的一件来讲，许多设计变量（例如工作载荷、极限应力、零件尺寸等）都是随机变量。在传统的设计方法中，为考虑随机变量的影响，是通过引入一个经验性的安全系数来处理的。如果在产品的设计过程中通过概率与统计的方法来分析 and 处理这些随机变量，则可以更为准确地把握产品的可靠性。

基于上述思想及相应的方法进行的产品设计可称为概率设计。通过产品的概率设计，可以确定产品在规定的工作条件下及规定的使用期限内完成规定功能的概率。这一概率就是反映产品可靠性的定量指标之一，称为可靠度（常用 R 表示）。机械零件的概率设计和相应的可靠度计算是机械可靠性设计的一项重要内容，下面就机械强度的可靠度计算方法做一简介。

1. 基本概念及公式

广义地讲，可以把一切引起失效的外部作用的参数称为应力，把零件本身抵抗失效的能力称为强度，通过判断应力是否超过强度就可以判断零件的安全性。若将应力与强度视为随机变量，通过计算强度高于应力的概率，就得到零件的可靠度。根据这一思想建立的可靠度计算模型称为**应力-强度干涉模型**，这也是进行各种机械零件概率设计的基础。

狭义概念的应力-强度干涉模型是以零件的强度指标（例如零件的极限应力 σ_{lim} ）和工作应力都是随机变量的客观事实为基础的。由于它们都是随机变量，因而必然会有相应的概率分布规律。令 $g(r)$ 表示强度 r 的概率密度函数， $p(s)$ 表示工作应力 s ^① 的概率密

① 由于概率计算中常用 σ 表示随机变量标准差，为了区别，本节暂用 s 表示工作应力。



度函数。显然，零件失效的条件可以用以下两式中的任一个来描述：

$$r < s \quad (3-39)$$

$$z = r - s < 0 \quad (3-40)$$

式中， z 可理解为安全裕度。图 3-15 给出了强度 r 的概率密度函数 $g(r)$ 曲线和工作应力 s 的概率密度函数 $p(s)$ 曲线。由于 r 和 s 都用同样的单位，所以可以表示在同一个坐标系中。图 3-15 中两曲线相交部分即表示干涉。零件失效的概率 F 应等于强度 r 小于工作应力 s 的概率，可用式 (3-41) 来描述。

$$\left. \begin{aligned} F &= P(r < s) \\ F &= P(z < 0) \end{aligned} \right\} \quad (3-41)$$

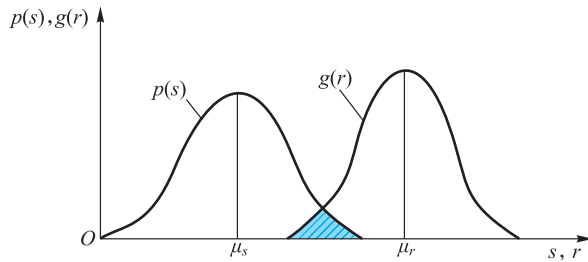


图 3-15 应力 - 强度干涉模型

2. 强度及应力均为正态分布时的可靠度计算

根据实际情况的不同，应力和强度的概率密度函数可以有各种不同的表达式。应力和强度均服从正态分布是最简单的且又比较典型的情况。

由概率论可知，两个正态分布的随机变量的代数和也是一个正态分布的随机变量。所以，变量 z 的数学期望（亦称均值） μ_z 、标准差 σ_z 及概率密度函数 $f(z)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \mu_z &= \mu_r - \mu_s \\ \sigma_z &= \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2} \\ f(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{(z - \mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] \end{aligned} \right\} \quad (3-42)$$

式中： μ_r 、 μ_s ——强度、应力的数学期望；

σ_r 、 σ_s ——强度、应力的标准差。

变量 z 小于零即表示失效，所以零件的失效概率 F 为

$$F = P(z < 0) = \int_{-\infty}^0 f(z) dz \quad (3-43)$$

因此，零件的可靠度 R 为

$$R = 1 - F = \int_0^{\infty} f(z) dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \exp\left[-\frac{(z - \mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] dz \quad (3-44)$$



令 $u = \frac{z - \mu_z}{\sigma_z}$, 则 $dz = \sigma_z du$, 代入式 (3-44) 得

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$$

根据正态分布的概率密度函数的对称性, 上式可以表示为

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi\left(\frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}}\right) \quad (3-45)$$

式中, Φ 为标准正态分布随机变量的积分函数值 (参见附表 3-12), 若令

$$\beta = \frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}} \quad (3-46)$$

则有

$$R = \Phi(\beta) \quad (3-47)$$

式中, 参数 β 是正态分布的分位数, 在可靠性设计中常称为正态分布的可靠性系数, 其值取决于零件的强度和应力的数学期望与标准差。式 (3-46) 称为正态分布的联结方程。

利用式 (3-46)、式 (3-47), 可以根据已知的 μ_r 、 μ_s 、 σ_r 、 σ_s 来决定强度及应力均服从正态分布时零件的可靠度 R , 这属于零件的可靠性评估或可靠性分析问题; 也可以根据规定的零件可靠度来决定 μ_r 、 μ_s 、 σ_r 、 σ_s 中的任何一个值, 这属于零件的可靠性设计问题。

3. 例题分析

例题 3-2 某齿轮材料的齿根弯曲疲劳极限的数学期望 $\mu_r = 425$ MPa, 其标准差 $\sigma_r = 40$ MPa。齿根弯曲应力的数学期望 $\mu_s = 325$ MPa, 其标准差 $\sigma_s = 30$ MPa。若齿根弯曲疲劳极限和齿根弯曲应力均是服从正态分布的随机变量, 试求该齿轮齿根弯曲疲劳强度的可靠度。

[解] 按式 (3-46) 给出的联结方程, 求出可靠性系数 β

$$\beta = \frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}} = \frac{425 - 325}{\sqrt{40^2 + 30^2}} = 2$$

由附表 3-12 即可查得对应的可靠度 $R = \Phi(2) = 0.977 25$ 。

例题 3-3 有一螺栓在工作中受到静拉伸载荷的作用, 拉伸载荷的平均值 $\mu_p = 5 600$ N, 其标准差 $\sigma_p = 0.06\mu_p = 336$ N。螺栓屈服极限的平均值为 $\mu_r = 240$ MPa, 其标准差 $\sigma_r = 0.08\mu_r = 19.2$ MPa。若拉伸载荷与螺栓屈服极限均为服从正态分布的随机变量, 试按可靠度为 90% 的要求设计螺栓小径 d_1 的下限值。

[解] 设螺栓的横截面面积为 A , 则螺栓中应力的平均值及标准差分别为

$$\mu_s = \frac{\mu_p}{A}, \quad \sigma_s = \frac{\sigma_p}{A}$$

按照可靠度为 90% 的要求, 由标准正态随机函数表 (附表 3-12) 可查得 $R = \Phi(\beta) = 0.9$ 时, 其对应的可靠性系数 $\beta = 1.28$, 于是按式 (3-46) 有



$$1.28 = \frac{\mu_r - \mu_s}{\sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_s^2}} = \frac{240 - \frac{5600}{A}}{\sqrt{19.2^2 + \left(\frac{336}{A}\right)^2}}$$

解出螺栓小径处的横截面积

$$A = 26.60 \text{ mm}^2$$

螺栓的小径应满足

$$d_1 \geq \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 26.6}{\pi}} \text{ mm} = 5.82 \text{ mm}$$

所以，满足可靠度为 90% 要求的螺栓小径 d_1 的下限值为 5.82 mm。



重难点分析



本章附录

1. 零件结构的理论应力集中系数

用弹性理论或试验的方法（即把零件材料看作理想的弹性体）求出的零件几何不连续处的应力集中系数 α_σ (α_τ) 称为**理论应力集中系数**。引起应力集中的几何不连续因素称为**应力集中源**。理论应力集中系数的定义为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_\sigma &= \frac{\sigma_{\max}}{\sigma} \quad (\text{对正应力}) \\ \alpha_\tau &= \frac{\tau_{\max}}{\tau} \quad (\text{对切应力}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 3-1})$$

式中： σ_{\max} (τ_{\max})——应力集中源处产生的弹性最大正（切）应力；

σ (τ)——按无应力集中的简化的材料力学公式求出的公称正（切）应力。

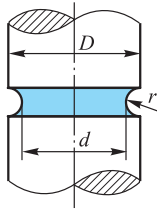
对于常见的几种应力集中源的情况， α_σ (α_τ) 的数值可从附表 3-1~附表 3-3 中查到^[17]。

附表 3-1 轴上环槽处的理论应力集中系数

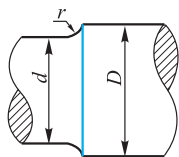
简图	应力	公称应力公式	α_σ (拉伸、弯曲) 或 α_τ (扭转剪切)										
			r/d	D/d									
	拉伸	$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2}$	>2	2.00	1.50	1.30	1.20	1.10	1.05	1.03	1.02	1.01	
			0.04					2.70	2.37	2.15	1.94	1.70	
			0.10	2.45	2.39	2.33	2.27	2.18	2.01	1.81	1.68	1.58	1.42
			0.15	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.78	1.64	1.55	1.47	1.33
			0.20	1.86	1.83	1.80	1.77	1.73	1.65	1.54	1.46	1.40	1.28
			0.25	1.72	1.69	1.67	1.65	1.62	1.55	1.46	1.40	1.34	1.24
			0.30	1.61	1.59	1.58	1.55	1.53	1.47	1.40	1.36	1.31	1.22



续表

简图	应力	公称应力公式	α_σ (拉伸、弯曲) 或 α_τ (扭转剪切)										
	弯曲	$\sigma_b = \frac{32M}{\pi d^3}$	D/d										
			r/d	>2	2.00	1.50	1.30	1.20	1.10	1.05	1.03	1.02	1.01
			0.04	2.83	2.79	2.74	2.70	2.61	2.45	2.22	2.02	1.88	1.66
			0.10	1.99	1.98	1.96	1.92	1.89	1.81	1.70	1.61	1.53	1.41
			0.15	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.63	1.56	1.49	1.42	1.33
			0.20	1.61	1.59	1.58	1.57	1.56	1.51	1.46	1.40	1.34	1.27
			0.25	1.49	1.48	1.47	1.46	1.45	1.42	1.38	1.34	1.29	1.23
	0.30	1.41	1.41	1.40	1.39	1.38	1.36	1.33	1.29	1.24	1.21		
	扭转剪切	$\tau_T = \frac{16T}{\pi d^3}$	D/d										
			r/d	>2	2.00	1.30	1.20	1.10	1.05	1.02	1.01		
			0.04	1.97	1.93	1.89	1.85	1.74	1.61	1.45	1.33		
			0.10	1.52	1.51	1.48	1.46	1.41	1.35	1.27	1.20		
			0.15	1.39	1.38	1.37	1.35	1.32	1.27	1.21	1.16		
			0.20	1.32	1.31	1.30	1.28	1.26	1.22	1.18	1.14		
0.25			1.27	1.26	1.25	1.24	1.22	1.19	1.16	1.13			
0.30	1.22	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.15	1.12					

附表 3-2 轴肩圆角处的理论应力集中系数



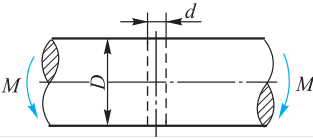
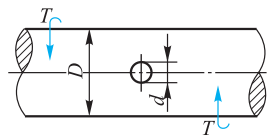
应力	公称应力公式	α_σ (拉伸、弯曲) 或 α_τ (扭转剪切)										
拉伸	$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2}$	D/d										
		r/d	2.00	1.50	1.30	1.20	1.15	1.10	1.07	1.05	1.02	1.01
		0.04	2.80	2.57	2.39	2.28	2.14	1.99	1.92	1.82	1.56	1.42
		0.10	1.99	1.89	1.79	1.69	1.63	1.56	1.52	1.46	1.33	1.23
		0.15	1.77	1.68	1.59	1.53	1.48	1.44	1.40	1.36	1.26	1.18
		0.20	1.63	1.56	1.49	1.44	1.40	1.37	1.33	1.31	1.22	1.15
		0.25	1.54	1.49	1.43	1.37	1.34	1.31	1.29	1.27	1.20	1.13
		0.30	1.47	1.43	1.39	1.33	1.30	1.28	1.26	1.24	1.19	1.12



续表

应力	公称应力公式	α_σ (拉伸、弯曲) 或 α_τ (扭转剪切)											
弯曲	$\sigma_b = \frac{32M}{\pi d^3}$	r/d	D/d										
			6.0	3.0	2.0	1.50	1.20	1.10	1.05	1.03	1.02	1.01	
		0.04	2.59	2.40	2.33	2.21	2.09	2.00	1.88	1.80	1.72	1.61	
		0.10	1.88	1.80	1.73	1.68	1.62	1.59	1.53	1.49	1.44	1.36	
		0.15	1.64	1.59	1.55	1.52	1.48	1.46	1.42	1.38	1.34	1.26	
		0.20	1.49	1.46	1.44	1.42	1.39	1.38	1.34	1.31	1.27	1.20	
		0.25	1.39	1.37	1.35	1.34	1.33	1.31	1.29	1.27	1.22	1.17	
0.30	1.32	1.31	1.30	1.29	1.27	1.26	1.25	1.23	1.20	1.14			
扭转剪切	$\tau_T = \frac{16T}{\pi d^3}$	r/d	D/d										
			2.0	1.33	1.20	1.09							
		0.04	1.84	1.79	1.66	1.32							
		0.10	1.46	1.41	1.33	1.17							
		0.15	1.34	1.29	1.23	1.13							
		0.20	1.26	1.23	1.17	1.11							
		0.25	1.21	1.18	1.14	1.09							
0.30	1.18	1.16	1.12	1.09									

附表 3-3 轴上径向孔处的理论应力集中系数

															
公称弯曲应力 $\sigma_b = \frac{M}{\pi D^3 \frac{dD^2}{32 \cdot 6}}$								公称扭转切应力 $\tau_T = \frac{T}{\pi D^3 \frac{dD^2}{16 \cdot 6}}$							
d/D	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	d/D	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
α_σ	3.00	2.46	2.25	2.13	2.03	1.96	1.89	α_τ	2.00	1.78	1.66	1.57	1.50	1.46	1.42

2. 有效应力集中系数

在有应力集中源的试件上，应力集中对其疲劳强度降低的影响用**有效应力集中系数** k_σ (k_τ) 来表示。其定义为

$$\left. \begin{aligned} k_\sigma &= \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}} \\ k_\tau &= \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 3-2})$$

式中： σ_{-1} (τ_{-1}) —— 无应力集中源的光滑试件的对称循环弯曲（扭转剪切）疲劳极限；

σ_{-1k} (τ_{-1k}) —— 有应力集中源的试件的对称循环弯曲（扭转剪切）疲劳极限。

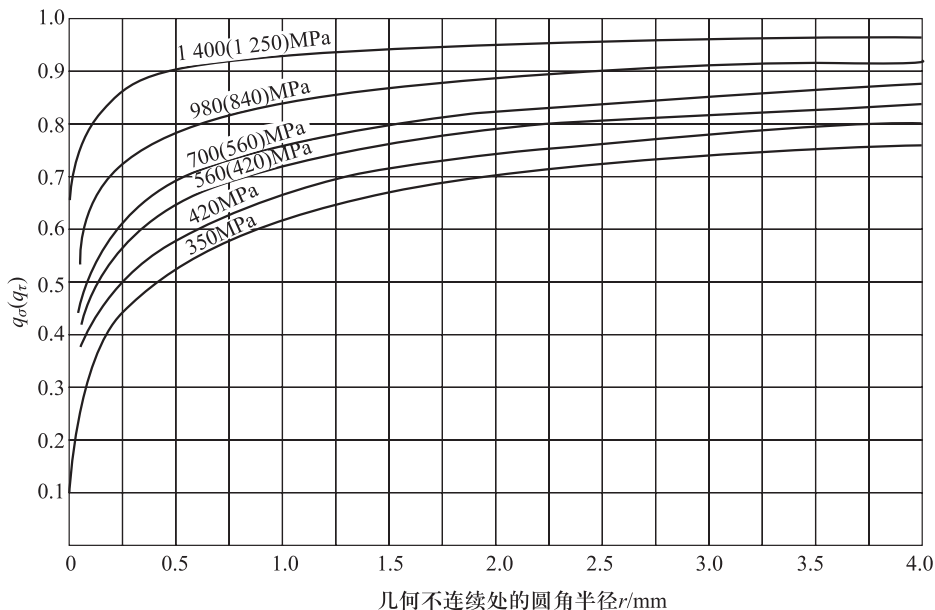
试验结果证明， k_σ (k_τ) 总是小于 α_σ (α_τ) 的。为了工程设计上的需要，根据大量试验总结出了理论



应力集中系数与有效应力集中系数的关系式为

$$k-1=q(\alpha-1) \quad (\text{附 3-3})$$

式中, q 为材料的敏性系数, 其值见附图 3-1。



曲线上的数字为材料的强度极限。查 q_σ 时用不带括号的数字, 查 q_r 时用括号内的数字

附图 3-1 钢材的敏性系数

根据式 (附 3-3) 即可求出有效应力集中系数值为

$$\left. \begin{aligned} k_\sigma &= 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1) \\ k_r &= 1 + q_r(\alpha_r - 1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 3-4})$$

对于若干典型的零件结构, 在有关文献中已直接列出了根据疲劳试验求出的有效应力集中系数的数值。本书中最常用到的见附表 3-4~附表 3-6^[18]。

附表 3-4 轴上键槽处的有效应力集中系数

轴材料的 σ_B/MPa	500	600	700	750	800	900	1 000
k_σ	1.5	—	—	1.75	—	—	2.0
k_r	—	1.5	1.6	—	1.7	1.8	1.9

注: 公称应力按照扣除键槽的净截面积来求。

附表 3-5 外花键的有效应力集中系数

轴材料的 σ_B/MPa	400	500	600	700	800	900	1 000	1 200
k_σ	1.35	1.45	1.55	1.60	1.65	1.70	1.72	1.75
k_r	矩形齿	2.10	2.25	2.36	2.45	2.55	2.70	2.80
	渐开线形齿	1.40	1.43	1.46	1.49	1.52	1.55	1.60



附表 3-6 公称直径 12 mm 的普通螺纹的有效应力集中系数

材料的 σ_B/MPa	400	600	800	1 000
k_σ	3.0	3.9	4.8	5.2

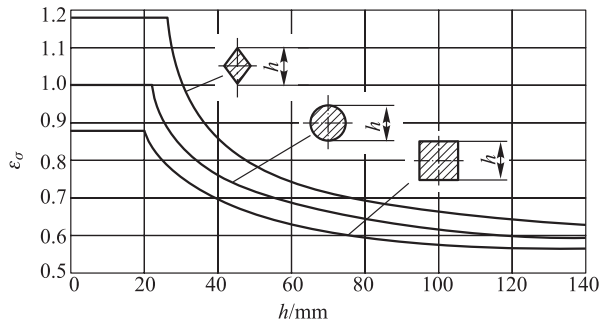
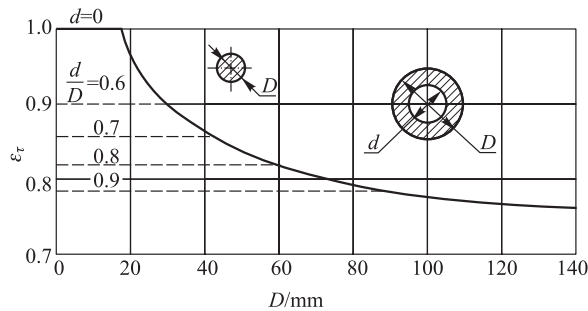
3. 绝对尺寸及截面形状影响系数 (简称尺寸及截面形状系数)

零件真实尺寸及截面形状与标准试件尺寸 ($d=10\text{ mm}$) 及形状 (圆柱形) 不同时对材料疲劳极限的影响, 用**尺寸及截面形状系数** ε_σ (**扭转剪切尺寸系数** ε_τ) 来表示, 其定义为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\sigma &= \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} \\ \varepsilon_\tau &= \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附 3-5})$$

式中, σ_{-1d} (τ_{-1d}) 表示尺寸为 d 的无应力集中的各截面形状试件的弯曲 (扭转剪切) 疲劳极限。

钢材的尺寸及截面形状系数 ε_σ 和圆截面钢材的扭转剪切尺寸系数 ε_τ 的值见附图 3-2 和附图 3-3^[17]。

附图 3-2 钢材的尺寸及截面形状系数 ε_σ 附图 3-3 圆截面钢材的扭转剪切尺寸系数 ε_τ

螺纹连接件的尺寸系数 ε_σ (因截面为圆形, 故只考虑尺寸的影响) 见附表 3-7^[6]。

附表 3-7 螺纹连接件的尺寸系数 ε_σ

直径 d/mm	≤ 16	20	24	28	32	40	48	56	64	72	80
ε_σ	1.00	0.81	0.76	0.71	0.68	0.63	0.60	0.57	0.54	0.52	0.50



对于轮毂或滚动轴承与轴以过盈配合相连接,可按附表3-8求出其有效应力集中系数与尺寸及截面

形状系数的比值 $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ 。若缺乏试验数据,设计时可取 $\frac{k_{\varepsilon}}{\varepsilon_{\sigma}} = (0.7 \sim 0.85) \frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ 。

附表3-8 零件与轴过盈配合处的 $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ 值

直径 d/mm	配合	σ_B/MPa							
		400	500	600	700	800	900	1 000	1 200
30	H7/r6	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.25
	H7/k6	1.69	1.88	2.06	2.25	2.44	2.63	2.82	3.19
	H7/h6	1.46	1.63	1.79	1.95	2.11	2.28	2.44	2.76
50	H7/r6	2.75	3.05	3.36	3.66	3.96	4.28	4.60	5.20
	H7/k6	2.06	2.28	2.52	2.76	2.97	3.20	3.45	3.90
	H7/h6	1.80	1.98	2.18	2.38	2.57	2.78	3.00	3.40
>100	H7/r6	2.95	3.28	3.60	3.94	4.25	4.60	4.90	5.60
	H7/k6	2.22	2.46	2.70	2.96	3.20	3.46	3.98	4.20
	H7/h6	1.92	2.13	2.34	2.56	2.76	3.00	3.18	3.64

注:①滚动轴承与轴配合处的 $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ 值与表内所列 $\frac{\text{H7}}{\text{r6}}$ 配合的 $\frac{k_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}}$ 值相同;

②表中无相应的数值时,可按插值计算。

4. 表面质量系数

零件表面质量(主要指表面粗糙度)对疲劳强度的影响用**表面质量系数** β 来表示,其定义为

$$\left. \begin{aligned} \beta_{\sigma} &= \frac{\sigma_{-1\beta}}{\sigma_{-1}} \\ \beta_{\tau} &= \frac{\tau_{-1\beta}}{\tau_{-1}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{附3-6})$$

式中, $\sigma_{-1\beta}$ ($\tau_{-1\beta}$)为某种表面质量的试件的对称循环弯曲(扭转剪切)疲劳极限。

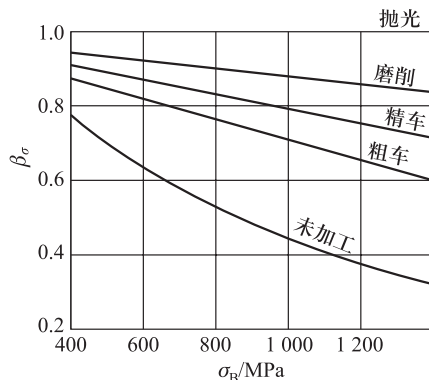
弯曲疲劳时的钢材表面质量系数 β_{σ} 的值可从附图3-4中查取。当无试验资料时,扭转剪切疲劳的表面质量系数 β_{τ} 可按近似等于 β_{σ} 来确定。

5. 强化系数

对零件表面进行不同的强化处理,例如高频表面淬火、表面化学热处理、表面硬化加工等,均可不同程度地提高零件的疲劳强度。强化处理对疲劳强度的影响用**强化系数** β_q 来表示,其定义为

$$\beta_q = \frac{\sigma_{-1q}}{\sigma_{-1}} \quad (\text{附3-7})$$

式中, σ_{-1q} 为经过强化处理后试件的弯曲疲劳极限。



附图3-4 钢材的表面质量系数 β_{σ}



附表 3-9~附表 3-11 列出了钢材经不同强化处理后的 β_q 值^[18]。在无资料时,表中数值也可用于扭转剪切疲劳强度的场合。

附表 3-9 高频表面淬火的强化系数 β_q

试件类型	试件直径 /mm	β_q	试件类型	试件直径 /mm	β_q
无应力集中	7~20	1.3~1.6	有应力集中	7~20	1.6~2.8
	30~40	1.2~1.5		30~40	1.5~2.5

注:表中系数值用于旋转弯曲,淬硬层厚度为 0.9~1.5 mm。应力集中严重时,强化系数取大值。

附表 3-10 表面化学热处理的强化系数 β_q

表面化学热处理方法	试件类型	试件直径 /mm	β_q
氮化,氮化层厚度为 0.1~0.4 mm,表面硬度为 64 HRC 以上	无应力集中	8~15	1.15~1.25
		30~40	1.10~1.15
	有应力集中	8~15	1.9~3.0
		30~40	1.3~2.0
渗碳,渗碳层厚度为 0.2~0.6 mm	无应力集中	8~15	1.2~2.1
		30~40	1.1~1.5
	有应力集中	8~15	1.5~2.5
		30~40	1.2~2.0
氰化,氰化层厚度为 0.2 mm	无应力集中	10	1.8

附表 3-11 表面硬化加工的强化系数 β_q

加工方法	试件类型	试件直径 /mm	β_q
滚子滚压	无应力集中	7~20	1.2~1.4
		30~40	1.1~1.25
	有应力集中	7~20	1.5~2.2
		30~40	1.3~1.8
喷丸	无应力集中	7~20	1.1~1.3
		30~40	1.1~1.2
	有应力集中	7~20	1.4~2.5
		30~40	1.1~1.5

6. 标准正态随机函数表

标准正态随机函数表见附表 3-12。



附表 3-12 标准正态随机函数表 (摘引)

β	3.5	3.0	2.5	2.0	1.5	1.28
$\Phi(\beta)$	0.999 767 4	0.998 650	0.993 790	0.977 25	0.933 19	0.9
β	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0
$\Phi(\beta)$	0.841 3	0.788 1	0.725 7	0.655 4	0.579 3	0.5



习题

3-1 某材料的对称循环弯曲疲劳极限 $\sigma_{-1}=180$ MPa, 取循环基数 $N_0=5 \times 10^6$, 材料常数 $m=9$ 。试求循环次数 N 分别为 7 000、25 000、620 000 时的有限寿命弯曲疲劳极限。

3-2 已知材料的力学性能: $\sigma_s=260$ MPa, $\sigma_{-1}=170$ MPa, $\phi_\sigma=0.2$ 。试绘制此材料的简化等寿命疲劳曲线 (参见图 3-3 中的 $A'D'G'C$)。

3-3 已知一圆轴的轴肩尺寸: $D=72$ mm, $d=62$ mm, $r=3$ mm; 材料为 40CrNi, 其强度极限 $\sigma_B=900$ MPa, 屈服极限 $\sigma_s=750$ MPa。试计算轴肩处的有效应力集中系数 k_σ 。

3-4 有一精车的圆轴, 其轴肩处的尺寸为 $D=54$ mm, $d=45$ mm, $r=3$ mm。如用题 3-2 中的材料, 设其强度极限 $\sigma_B=420$ MPa, 未做表面强化处理。试绘制此圆轴该轴肩处的简化等寿命疲劳曲线。

3-5 如题 3-4 中危险截面上的平均应力 $\sigma_m=20$ MPa, 应力幅 $\sigma_a=30$ MPa, 试分别按 ① $r=C$, ② $\sigma_m=C$ 求出该截面的计算安全系数 S_{ca} 。