

## 第 3 章

# 流体静力学

### 本章导读

流体静力学是研究流体在静止状态下的平衡规律及其在实际中应用的一门学科。

静止是一个相对的概念,它是指流体内部质点之间没有相对运动,而处于相对静止或相对平衡的状态。静止流体中黏滞力不起作用,面积力只有压应力——压强。流体静力学主要研究流体在静止状态下的力学规律,它以压强为中心,主要阐述流体静压强的特性,静压强的分布规律,欧拉平衡微分方程,作用在平面上或曲面上静水总压力的计算方法,潜体与浮体的稳定性等,并在此基础上解决一些工程实际问题。

本章学习要求:掌握绝对压强、相对压强、真空度、等压面、测压管水头、测压管高度、压力体、压心、定倾半径、偏心距等基本概念。掌握静止流体中压力的特性与静止液体压强分布规律,了解潜体与浮体的稳定性;理解液体相对平衡的分析方法;掌握等压面判别方法、压强分布图及压力体图的绘制方法;掌握与熟练运用流体静力学基本方程,理解其物理意义。掌握并能运用欧拉平衡微分方程及其综合式(为后续章节打好基础);掌握作用在平面上和曲面上的静水总压力的计算方法(解析法与图解法),并能综合运用流体静力学基本知识分析求解工程问题。

通过前面章节的学习,已经知道静止流体中没有剪切力,但存在着压应力。静水压力现象在日常生活或实际工程中随处可见,比如拿一个塑料袋盛水,如果塑料袋中有一个小孔,水就会从这个小孔中喷射出来。可以发现,若塑料袋中的水盛得过多,塑料袋有可能会被涨破。又如汽车沉入水中时,车门就不容易打开,随着没入水中的深度越大,打开车门就会变得越困难。这就说明,静止的水体中存在着静水压力,其数值随着水深的加大而增

加。在静止流体中,物体会受到来自流体的压力,这就要求物体必须能承受一定的压力,从而保证不被推倒或者破坏。比如混凝土水坝、被誉为“世界第一渡槽”的南水北调工程上的U型渡槽、压力容器等都必须具有足够的强度来抵抗水流对其的作用力。或者说,必须施加一定的力才能克服流体对其的作用力,比如要打开水库岸边的泄水洞前的平板闸门、三峡大坝的弧形闸门等,必须施加很大的力,因为水库中水流对闸门作用了很大的压力。所以要保证设施的安全或工程的正常运行,首先要先确定该物体受到的流体的作用力。

静水压力等于静水压应力(即静水压强,简称静压强)和作用面的面积的乘积。力是矢量,要求解该物体所受到的流体的作用力,需要确定其方向和大小。首先学习静止流体中任一点的静压强的特性。

### § 3.1 静止流体中应力的特性

#### 3.1.1 静止流体中应力的两个特性

与固体和流动的实际流体比较,静止流体中任一点应力具有以下两个重要特性:

(1) 静止流体表面应力只可能是压应力即压强,且静压强方向与作用面内法线方向一致。

因为在静止流体中,不存在相邻流体层的相对运动,故没有切应力。如图3-1所示,在某静止流体中,以 $N-N'$ 面将其切割为两部分,取阴影部分为脱离体,在其表面上任取一点 $A$ , $A$ 点的应力状态必然是 $\tau=0$ ,即 $\alpha=90^\circ$ , $p$ 垂直于作用面(如 $B$ 点所示)。

又由于流体具有易流动性,不能承受拉应力,所以静压强 $p$ 的作用方向只能指向其受压面。

由此可见,静止流体表面应力只能是压应力,且方向与作用面的内法线方向一致。

(2) 从各个方向作用于静止流体某一点的压强大小相等,与作用面的空间方位无关。

该特性可证明如下:从静止或平衡流体中任取包含 $O$ 点在内的一微元四面体 $OABC$ ,并设直角坐标原点与 $O$ 点重合,如图3-2所示。 $n$ 为斜面



3-1 演示文稿:  
闸门等

$ABC$  的外法线方向,分析其受力平衡。

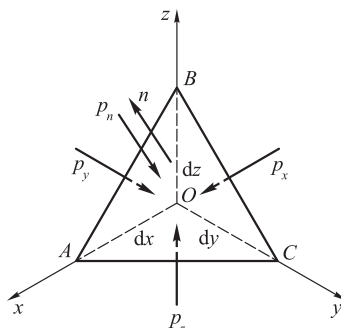
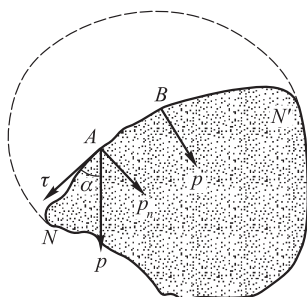


图 3-1 静止流体中任一点的应力特性一 图 3-2 静止流体中任一点的应力特性二

首先确定面积力。以  $p_x$ 、 $p_y$ 、 $p_z$  和  $p_n$  分别表示坐标面和斜面上的静压强。因为四面体各侧面面积极小,可认为面上各点压强相等,故在坐标轴  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向及斜面  $ABC$  外法线  $n$  方向的面积力可分别表示为  $p_x \cdot dydz/2$ 、 $p_y \cdot dzdx/2$ 、 $p_z \cdot dxdy/2$  及  $p_n \cdot dA_n$  ( $dA_n$  为斜面  $ABC$  的面积)。

此外,四面体  $OABC$  除了受到上述表面力的作用外,尚有质量力的作用。以  $\rho$  代表流体的密度,  $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$  分别表示流体单位质量力在相应坐标轴方向的分量,则微四面体的质量力在各坐标轴的分量分别为  $f_x \cdot \rho dx dy dz/6$ 、 $f_y \cdot \rho dx dy dz/6$  和  $f_z \cdot \rho dx dy dz/6$ 。

根据平衡条件,即

$$\sum F = 0$$

其各向分力投影之和亦为零。于是对  $x$  方向有

$$\sum F_x = p_x \cdot dydz/2 - p_n dA_n \cos(n, x) + f_x \cdot \rho dx dy dz/6 = 0$$

因为  $\cos(n, x)$  表示斜面外法线方向与  $Ox$  轴正向夹角的余弦,  $dA_n \cos(n, x)$  即为面积  $dA_n$  在垂直  $x$  轴的  $Oyz$  平面上的投影,有

$$dA_n \cos(n, x) = dydz/2$$

代入上式得

$$p_x \cdot dydz/2 - p_n \cdot dydz/2 + f_x \cdot \rho dx dy dz/6 = 0$$

以  $\frac{1}{2} dydz$  除全式后,得

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} dx \cdot \rho f_x = 0$$

当四面体各边长趋于零时,上式中第三项趋近于零,则简化为

$$p_x = p_n$$

同理可得

$$p_y = p_n, \quad p_z = p_n$$

所以

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$

因斜面  $ABC$  是任意选取的, 即  $n$  方向也是任意的, 上式说明, 在静止流体中同一点的静压强大小各向相等, 与作用面的方位无关。

如图 3-3 所示,  $AB$  是静止水体中某一物体的投影面, 如绕  $O$  点旋转  $45^\circ$  后的投影面为  $A'B'$ , 则根据静压强的特性,  $AB$  和  $A'B'$  作用面  $O$  点的静压强的大小和方向分别为  $p, p'$ , 且有  $p = p'$ 。图 3-4 表明, 压强的方向随着受压面方位的改变而变化。

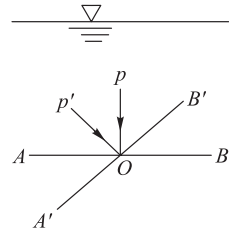


图 3-3 水溶液中同一点静水压强的方向

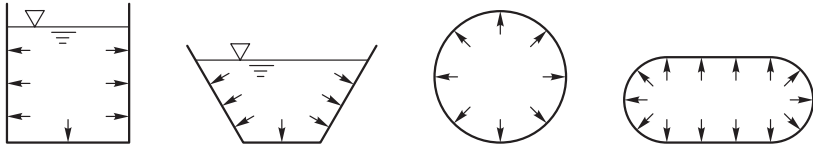


图 3-4 容器内静水压强的方向示意图

当然, 静止流体不同点的静压强一般是不等的, 它是位置的连续函数, 即

$$p = p(x, y, z)$$

### 3.1.2 推论——运动流体与理想流体中的压强

运动状态下的实际流体, 由于流体层间存在相对运动, 则由于黏性会产生切应力, 此时同一点上各法向应力不再相等, 流体动压强一般定义为三个互相垂直压应力的平均值, 即

$$p = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z)$$

然而, 若运动流体是理想流体, 则由于其无黏性, 不产生切应力, 所以理想流体动压强呈现静压强特性, 即只存在压应力, 且

$$p_x = p_y = p_z = p$$

## § 3.2 流体平衡微分方程

### 3.2.1 流体平衡微分方程——欧拉平衡微分方程

为了分析流体平衡的规律,在平衡流体中取一微元六面体,各边长分别为  $dx$ 、 $dy$  和  $dz$ ,并令各边分别与相应的直角坐标轴平行,如图 3-5 所示。

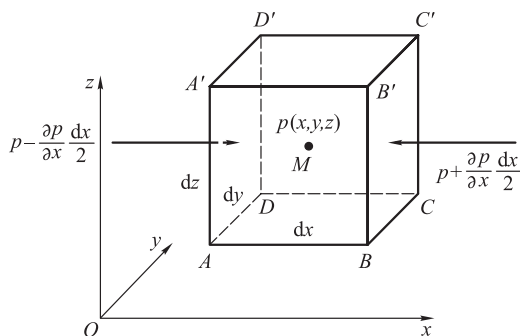


图 3-5 欧拉平衡微分方程推导

设六面体中心点  $M(x, y, z)$  的压强为  $p = p(x, y, z)$ , 则根据连续函数的特点, 当自变量(坐标位置)有微小变化时, 函数值(压强)也发生变化, 用泰勒级数展开, 并忽略高阶微量, 可得六面体左、右两表面中心点的压强分别为

$$\left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) \text{ 和 } \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)。$$

由于六面体中各面的面积很小, 可认为平面上各点所受的压强与该面中心点的压强相等, 由此推出左右两表面  $AA' D' D$  和  $BB' C' C$  上的表面力分别为

$$\begin{aligned} & \left(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \\ & \left(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dydz \end{aligned}$$

已知六面体的质量为  $\rho dx dy dz$ ,  $f_x$ 、 $f_y$ 、 $f_z$  分别为单位质量力在各坐标轴方向的分量, 则  $x$  方向的质量力分量为  $f_x \rho dx dy dz$ 。

根据流体平衡条件, 在  $x$  方向有  $\sum F_x = 0$ , 即

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dydz + f_x \rho dx dy dz = 0$$

整理得

$$f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

同理,在  $y, z$  方向可得

$$f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

即

$$\left. \begin{aligned} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

这是流体的平衡微分方程,因为它是由瑞士学者欧拉(Euler)于1755年首先导出的,所以又称欧拉平衡微分方程。该方程说明了处于平衡状态下的流体,单位质量流体所受的表面力 $\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}\right)$ 与单位质量力分量 $(f_x, f_y, f_z)$ 彼此对应相等,或者是压强沿轴向的变化率 $\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)$ 等于该轴向单位体积上的质量力的分量 $(\rho f_x, \rho f_y, \rho f_z)$ 。

### 3.2.2 流体平衡微分方程的综合式

将式(3-1)分别乘以  $dx, dy$  和  $dz$  并相加得

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

又流体静压强  $p$  是坐标的函数  $p = p(x, y, z)$ , 则对压强求全微分有

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

联立上述两方程式,则有

$$dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz) \quad (3-2)$$

式(3-2)称为流体平衡微分方程的综合式,当流体所受的质量力已知时,可用以求出流体内的压强分布规律。

流体平衡微分方程综合式(3-2)的物理意义说明如下:

对常密度流体, $\rho$ 为常数,令 $p/\rho=w$ ,因 $p=p(x,y,z)$ ,则 $w=w(x,y,z)$ ,由式(3-2)有

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right)=f_x dx+f_y dy+f_z dz=dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz$$

则有

$$f_x=\frac{\partial w}{\partial x}, \quad f_y=\frac{\partial w}{\partial y}, \quad f_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$

由物理学知,若存在某一个坐标函数 $w(x,y,z)$ ,它对各坐标的偏导数分别等于力场的力在对应坐标轴上的分量,则该函数称为力函数或势函数。而这样的力就称为有势的力。因此,式(3-2)中的质量力是有势力,也就是说,常密度流体只有在有势质量力作用下才能维持平衡。

**推论:**流体在质量力为重力或惯性力作用下可处于平衡状态,表明重力、惯性力是有势力。

### 3.2.3 等压面

#### 1. 等压面的概念

从流体平衡微分方程还可以分析等压面的性质。所谓等压面(equipressure surface),是指流体中压强相等的各点所组成的面。例如,液体和气体的交界面(自由液面)及处于平衡状态下的两种液体的交界面都是等压面。

等压面上, $p=\text{Const}$ , $dp=0$ ,故有

$$f_x dx+f_y dy+f_z dz=0 \quad (3-3)$$

#### 2. 等压面的特性

等压面的重要特性是等压面上任一点的质量力恒正交于等压面。可证明如下:如图3-6所示,设等压面上有一流体质点 $M$ ,其单位质量力为 $\mathbf{f}=f_x\mathbf{i}+f_y\mathbf{j}+f_z\mathbf{k}$ ,所在点的任一线矢为 $d\mathbf{s}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}$ ,由式(3-3)得

$$\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}=f_x dx+f_y dy+f_z dz=0$$

可知 $\mathbf{f}$ 与 $d\mathbf{s}$ 正交, $\theta=90^\circ$ 。这里 $d\mathbf{s}$ 在等压面上是任意方向的,由此证明,作用于

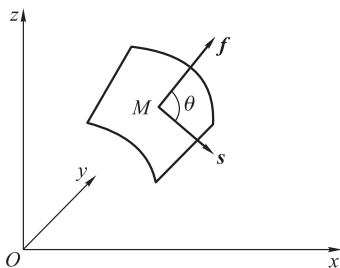


图 3-6 等压面特性



静止流体上任一点的质量力必然垂直于通过该点的等压面。这就是等压面的重要性质。根据这一特性,可以在已知质量力的方向后去求等压面的形状,或者在已知等压面的形状后去确定质量力的方向。例如,当质量力只有重力时,由于重力的方向是垂直向下,所以等压面是水平面。

### § 3.3 重力作用下流体静压强的分布

质量力有重力和惯性力,不同质量力作用下静压强的分布规律是不同的。而在工程实际及日常生活中,绝大多数的流体平衡是指流体相对于地球没有运动的静止状态,也就是作用在流体上的质量力只有重力的情况,所以首先研究重力作用下静压强的分布规律。

#### 3.3.1 流体静力学基本方程

##### 1. 流体静力学基本方程的三种表达式

质量力只有重力作用下的静止流体,设置直角坐标系  $Oxyz$ ,  $z$  轴竖直向上(图 3-7)。令液面上的压强为  $p_0$ ,液体中任一点  $A$  的压强为  $p$ 。在这种情况下,单位质量力  $f_x = f_y = 0, f_z = -g$ ,则流体平衡微分方程的综合式(3-2)可写成

$$dp = -\rho g dz$$

积分得

$$p = -\rho g z + C' \quad (3-4)$$

在自由液面上有  $z = H, p = p_0$ , 得

$$C' = p_0 + \rho g H$$

又  $h = H - z$ , 代入式(3-4)得

$$p = p_0 + \rho g h \quad (3-5)$$

或以  $\rho g$  除式(3-4)各项得

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad (3-6)$$

式中,  $p$  为静止液体内某点的压强;  $p_0$  为液体表面压强,对于液面通大气的开

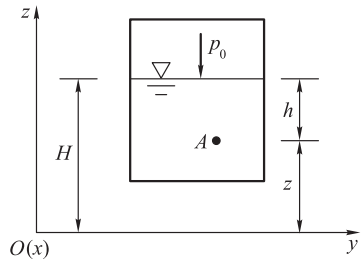


图 3-7 静止液体中的点压强

口容器,  $p_0$  即为大气压强, 并以符号  $p_a$  表示;  $h$  为该点至液面的深度, 称淹没深度;  $z$  为该点在坐标平面以上的高度。

式(3-5)与式(3-6)是流体静力学基本方程的两种表达式。式(3-5)表明, 在静止流体中, 压强随深度按线性规律增加, 同一水平面上各点的静压强相等, 与容器形状无关; 且流体内任一点的压强  $p$  恒等于液面上的压强  $p_0$  与从该点至液体表面的单位面积上的垂直液柱重量  $\rho gh$  之和。

已知某点的压强和两点间的深度差, 即可求另外一点的压强值。由图 3-8 所示有  $p_2 = p_1 + \rho g \Delta h$ , 这表明静止流体中任意一点的压强增加  $\Delta p$ , 必导致其他各点的压强都增加  $\Delta p$ 。或者说, 静止流体中某点压强的变化, 将等值地传递到其他各点, 这就是著名的帕斯卡原理。这一原理自 17 世纪中叶被发现以来, 在水压机等液压传动设备中得到广泛的应用。

式(3-6)中  $C$  为常数, 其值可利用边界条件来确定。如图 3-9 所示, 任取一基准面 0-0, 静止流体中(1)、(2)两点所在的位置距基准面高度分别为  $z_1$ 、 $z_2$ , 静压强分别为  $p_1$ 、 $p_2$ , 则由式(3-6)可得

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} \quad (3-7)$$

上式是流体静力学基本方程的另一种形式, 它的适用条件是静止的、连续的、质量力只有重力的同一均质流体。

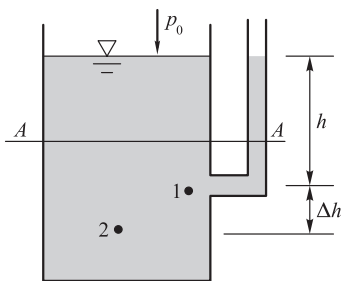


图 3-8 两点之间压强的关系

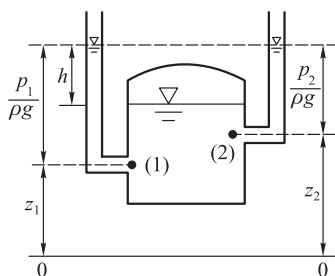


图 3-9 位置高度与静压强关系

## 2. 流体静力学基本方程各项的物理意义及其基本概念

流体静力学基本方程式(3-6)蕴涵了重要的物理意义, 并引出了几个重要的基本概念, 现说明如下。

测压管 (piezometric tube): 当测点的绝对大气压大于当地大气压时, 在该点接一根向上开口的透明管, 这样的透明管称为测压管。

位置水头 (elevation head)  $z$ : 任一点在基准面 0-0 以上的位置高度。表示单位重量流体从某一基准面算起所具有的位置势能, 简称位能 (potential

energy)。

测压管高度  $\frac{p}{\rho g}$ : 液体在测压管内上升的高度, 也称压强水头 (pressure head)。表示单位重量流体从压强为大气压算起所具有的压强势能, 简称压能。

测压管水头 (piezometric head)  $z + \frac{p}{\rho g}$ : 表示单位重量流体从某一基准面算起所具有的总势能。

方程式 (3-6) 的物理意义可概括为: 在重力作用下, 处于静止状态的连续的均质流体, 其内部各点的单位重量流体的总势能相等, 即测压管水头处处相等。这就是静止流体中的能量分布规律。

### 3. 推论

(1) 等压面的判别。由式 (3-7) 可知, 对于质量力只有重力且静止的同一种连续流体, 其水平面是一等压面。也就是说, 判别同一水平面是不是等压面, 需分析该水平面以下的流体是否同时具备以下 4 个条件: 质量力只有重力、静止、连续、同一介质。对于不连续的流体 (如流体被阀门隔开), 或者有两种以上流体存在, 或者处在磁力场中的磁流体及处于相对平衡的流体 (参见 § 3.4) 等, 则水平面不一定是等压面。

例如, 图 3-10 中  $B-B'$  水平面为一等压面, 而  $C-C'$  水平面则不是等压面。

(2) 在有限空间里的气体压强分布, 因气体密度  $\rho$  很小, 高度  $z$  有限, 重力对气体压强影响很小, 可以忽略, 故可认为气体内各点压强均相等, 即  $p_{\text{气}} = C$ 。

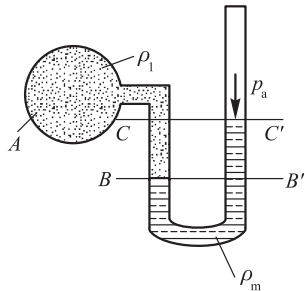


图 3-10 等压面的判别

## 3.3.2 压强的度量

### 1. 压强的表示方法

压强可从不同基准面算起, 所以有不同的表示方法: 绝对压强、相对压强和真空度。

绝对压强 (absolute pressure) 是以完全真空状态下的压强 (绝对零压强) 为基准进行计量的压强, 常用  $p_{\text{abs}}$  表示。

在水利工程中, 水流表面或建筑物表面多为大气压  $p_a$ , 所以当地大气压



3-3 动画:  
静力学  
基本方程



3-4 视频:  
静水压强  
分布规律

又常作为压强的基准。以当地大气压为基准进行计量的压强称为相对压强 (relative pressure), 以符号  $p$  表示。相对压强又称表压强 (gage pressure), 这是由于工程上所用的压力表, 都是把大气压定为零点, 它所测得的压强是相对压强。很明显, 绝对压强恒大于等于零, 而相对压强值可正可负, 也可为零。绝对压强、相对压强与大气压强的关系定义为

$$p = p_{\text{abs}} - p_a \quad (3-8)$$

如图 3-11 所示, 对测点 1, 有

$$p_1 = p_{\text{abs}1} - p_a$$

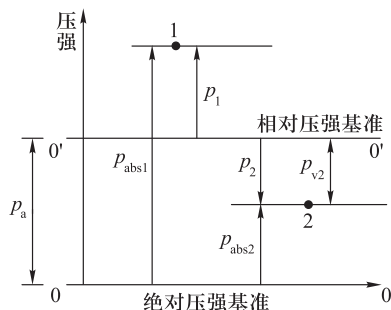


图 3-11 压强的度量

负的相对压强, 通常称为真空 (vacuum), 即绝对压强小于一个大气压的受压状态。真空度 (vacuum degree) 通常用  $p_v$  来表示, 即

$$p_v = p_a - p_{\text{abs}} \quad (3-9)$$

如图 3-11 所示, 对测点 2, 有

$$p_{v2} = p_a - p_{\text{abs}2}$$

真空度可用液柱高度表示为

$$p_v = -p = \rho g h_v \quad (3-10)$$

式中,  $h_v$  称为真空高度。

绝对压强、相对压强和真空度之间的关系如图 3-11 所示。绝对压强基准和相对压强基准相差一个当地大气压  $p_a$ 。需要指出的是, 在本书中如无特殊说明时, 压强均指相对压强。

## 2. 压强的计量单位<sup>①</sup>

(1) 压强的国际单位制单位是 Pa,  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ 。当压强很大时, 常采

<sup>①</sup> 在国际单位制中, 压强的单位为 Pa, 但考虑到行业的具体情况, 本书对 at、mH<sub>2</sub>O 等单位予以保留。



3-5 动画:  
绝对压强、相对压强、真空

用千帕(kPa)或兆帕(MPa)表示。

(2) 大气压通常有标准大气压和工程大气压两种表示方法。工程大气压与标准大气压略有不同,一个标准大气压(atm)为 101.325 kPa,一个工程大气压(at)为 98 kPa。在工程技术中,常用工程大气压来替代标准大气压。各地大气压略有不同,用  $p_a$  表示。

(3) 液柱高通常以水柱或汞柱高度( $h = \frac{P}{\rho g}$ )来表示,常用单位是  $\text{mH}_2\text{O}$  ( $1 \text{ mH}_2\text{O} = 9.8 \text{ kPa}$ )、 $\text{mmHg}$  ( $1 \text{ mmHg} = 133 \text{ Pa}$ )。例如,1 标准大气压和 1 工程大气压可维持的水柱高分别是  $10.33 \text{ mH}_2\text{O}$  和  $10 \text{ mH}_2\text{O}$ 。

**例 3-1** 试标出如图 3-12 所示盛液容器内 A、B、C 三点的位置水头、测压管高度和测压管水头。以图示 0-0 为基准面。

**解:** A 点的位置水头为 3 m,测压管高度为 2 m,测压管水头为 5 m,如图 3-13 所示。

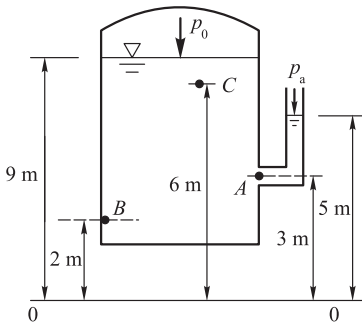


图 3-12 密闭容器

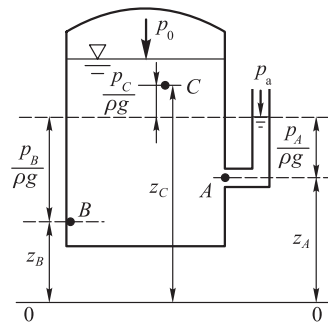


图 3-13 测压管水头

因为  $z + \frac{p}{\rho g} = C$ ,所以,以 A 点的测压管水头为依据,可以确定 B 点的位置水头为 2 m 和测压管高度为 3 m。

对于 C 点,因为该点的测压管水头  $z_C + \frac{p_C}{\rho g} = z_A + \frac{p_A}{\rho g} = 5 \text{ m}$ ,位置水头  $z_C = 6 \text{ m}$ ,测压管高度  $\frac{p_C}{\rho g} = -1 \text{ m}$ ,即  $p_C < 0$ ,处于真空状态。

**例 3-2** 设如图 3-14 所示, $h_v = 2 \text{ m}$ ,容器 B 中的液体为水,求封闭容器 A 中的真空值。若容器中真空度不变,而将水换成  $\rho' = 820 \text{ kg/m}^3$

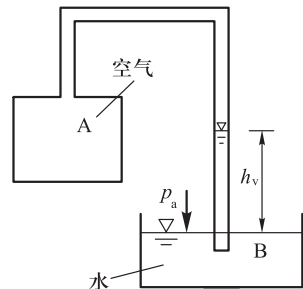


图 3-14 真空测压管

的油,问测压管内油柱高度  $h'_v$  为多少?

解:(1) 求 A 中真空值  $p_v$

根据式(3-10),有

$$p_v = \rho g h_v = 9\,800 \text{ N/m}^3 \times 2 \text{ m} = 19.6 \text{ kN/m}^2$$

封闭容器 A 中的真空值为  $19.6 \text{ kN/m}^2$ 。

(2) 求油柱高度  $h'_v$

$$h_v \rho g = h'_v \rho' g$$

$$h'_v = \frac{h_v \rho}{\rho'} = \frac{2 \text{ m} \times 1\,000 \text{ kg/m}^3}{820 \text{ kg/m}^3} = 2.44 \text{ m}$$

**例 3-3** 一密封水箱如图 3-15 所示,若水面上的相对压强  $p_0 = -44.5 \text{ kPa}$ , 试求:(1)  $h$  值;(2) 水下  $0.3 \text{ m}$  处  $M$  点的相对压强、绝对压强和真空度,并分别用大气压及水柱高表示;(3)  $M$  点相对于基准面 0-0 的测压管水头。

解:(1) 求  $h$  值

在等压面 1-1,  $p_N = p_R = p_a$ 。以相对压强计算,  $p_0 + \rho g h = 0$

$$-44.5 \times 10^3 \text{ Pa} + 9\,800 \text{ N/m}^3 \times h = 0$$

$$h = 44.5 \times 10^3 \text{ Pa} / 9\,800 \text{ N/m}^3 = 4.54 \text{ m}$$

(2) 求  $p_M$

相对压强:

$$p_M = p_0 + \rho g h_M = -44.5 \times 10^3 \text{ Pa} + 9\,800 \text{ N/m}^3 \times 0.3 \text{ m} = -41.56 \text{ kPa}$$

或

$$p_M = \frac{-41.56 \text{ kPa}}{98 \text{ kPa}} \times 1 \text{ at} = -0.424 \text{ at} \quad (1 \text{ at} = 98 \text{ kPa})$$

或

$$p_M = \frac{-41.56 \text{ kPa}}{9.8 \text{ kPa}} \times 1 \text{ mH}_2\text{O} = -4.24 \text{ mH}_2\text{O}$$

绝对压强:

$$p_{M\text{abs}} = p_M + p_a = -41.56 \text{ kPa} + 98 \text{ kPa} = 56.44 \text{ kPa} = 0.576 \text{ at} = 5.76 \text{ mH}_2\text{O}$$

真空度

$$p_v = -p_M = 41.56 \text{ kPa} = 0.424 \text{ at} = 4.24 \text{ mH}_2\text{O}$$

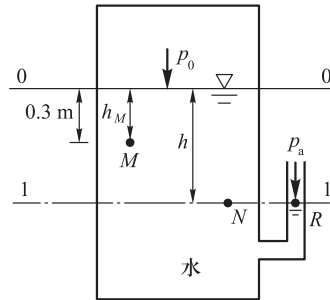


图 3-15 测点静压强计算

真空高度

$$h_v = \frac{p_v}{\rho g} = \frac{41.56 \times 10^3 \text{ Pa}}{9800 \text{ N/m}^3} = 4.24 \text{ m}$$

(3)  $M$  点相对于基准面 0-0 的测压管水头

$$z_M + \frac{p_M}{\rho g} = -0.3 \text{ m} + \frac{-41.56 \times 10^3 \text{ Pa}}{9800 \text{ N/m}^3} = -0.3 \text{ m} - 4.24 \text{ m} = -4.54 \text{ m}$$

**例 3-4** 如图 3-16 所示,用水银 U 形压差计测量  $A$ 、 $B$  两点的测压管水头差,试写出其表达式。

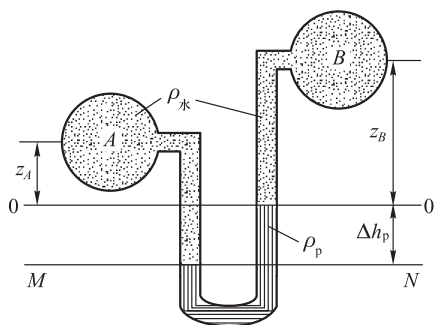


图 3-16 水银压差计

**解:** 以压差计水银柱上液面所在水平面为基准面 0-0,并过下液面作等压面  $NM$ ,有

$$p_M = p_A + \rho_{\text{水}} g z_A + \rho_{\text{水}} g \Delta h_p$$

$$p_N = p_B + \rho_{\text{水}} g z_B + \rho_p g \Delta h_p$$

由

$$p_M = p_N$$

则

$$p_A - p_B = (\rho_p g - \rho_{\text{水}} g) \Delta h_p + \rho_{\text{水}} g (z_B - z_A)$$

得

$$\left( z_A + \frac{p_A}{\rho_{\text{水}} g} \right) - \left( z_B + \frac{p_B}{\rho_{\text{水}} g} \right) = \left( \frac{\rho_p - \rho_{\text{水}}}{\rho_{\text{水}}} \right) \Delta h_p$$

因水银与水的密度之比为 13.6,于是有

$$\left( z_A + \frac{p_A}{\rho_{\text{水}} g} \right) - \left( z_B + \frac{p_B}{\rho_{\text{水}} g} \right) = 12.6 \Delta h_p$$



3-6 演示文稿:  
测压计

### § 3.4 相对平衡下液体压强的分布

如果装在容器中的液体随容器相对于地球运动,但液体各部分之间及液体与容器之间没有相对运动,那么只要把坐标系选在容器上,则液体对这个坐标系来说是处于平衡状态的,这称为相对静止或相对平衡。由于相对平衡的液体质点之间没有相对运动,因此,相对平衡液体也不存在切应力,表面力只有压强。但是,在相对平衡流体中,质量力除重力外,还受到惯性力的作用。根据达朗贝尔原理,在质量力中计入惯性力,使液体的相对运动问题在形式上转化为静力平衡问题,就可直接引用流体平衡微分方程式(3-2)。

液体处于相对平衡状态的情形通常有以下两种:一是等加速度直线运动液体的相对平衡,二是以等角速度绕铅垂轴旋转的液体的相对平衡。

#### 3.4.1 等加速度直线运动液体的相对平衡

如图 3-17 所示,液体随容器作等加速度直线运动。取原液面中心为坐标原点。 $z$  轴垂直向上,加速度  $a$  与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ 。单位质量力包括重力和加速度惯性力。图中任一点  $M(x, y, z)$  的单位质量力为  $f_x = -a \cos \alpha$ 、 $f_y = 0$ 、 $f_z = -g - a \sin \alpha$ , 代入式(3-2)得

$$dp = \rho [-a \cos \alpha dx - (g + a \sin \alpha) dz]$$

积分得

$$p = -\rho [a \cos \alpha \cdot x + (g + a \sin \alpha) z] + C$$

在液面上有

$$x = z = 0, \quad p = p_0$$

代入上式得  $C = p_0$ , 于是有

$$p = -\rho (g + a \sin \alpha) \left( \frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha} x + z \right) + p_0 \quad (3-11)$$

这是随容器作等加速度直线运动液体相对平衡时压强分布规律的一般

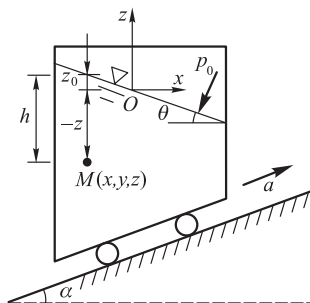


图 3-17 匀加速运动液体的平衡

表达式。

由此可进一步得到等压面方程

$$\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha} x + z = C_1 = \text{常数} \quad (3-12)$$

可见,等压面是与水平面成倾角  $\theta = \arctan\left(-\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}\right)$  的斜面。

液面方程为

$$z_0 = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha} x \quad (3-13)$$

式中,  $z_0$  为液面的垂直坐标,代入式(3-11)得

$$p = p_0 + \rho(g + a \sin \alpha)(z_0 - z)$$

式中,  $z_0 - z$  为质点在液面以下的淹没深度,若以  $h$  表示,则上式变为

$$p = p_0 + \rho(g + a \sin \alpha)h \quad (3-14)$$

说明等加速度直线运动液体中,各点的压强随水深变化仍是线性关系。

由式(3-14)可知,当液体随容器处于自由落体运动状态时,液体各点压强均为  $p_0$ ;对于开口容器,液体各点压强均为 0。

### 3.4.2 等角速度转动液体的相对平衡

设盛有液体的直立圆筒容器绕其中心轴以等角速度  $\omega$  旋转(图 3-18),由于液体的黏滞性作用,开始时,紧靠筒壁的液体随壁运动,其后逐渐全部液体都以等角速度  $\omega$  跟着圆筒一起旋转,并达到了相对平衡状态。可以看到,此时的液体自由表面已由平面变成一个旋转抛物面。将坐标轴取在旋转圆筒上,并使原点与旋转抛物面的顶点重合, $z$  轴垂直向上。旋转物体任一质点  $A$  的向心加速度为  $-\omega^2 r$ , $x$ 、 $y$  轴上的分量为  $-\omega^2 x$ 、 $-\omega^2 y$ ,则

重力的单位质量力

$$f_x = f_y = 0; \quad f_z = -g$$

惯性力的单位质量力

$$f_x = \omega^2 x; \quad f_y = \omega^2 y; \quad f_z = 0$$

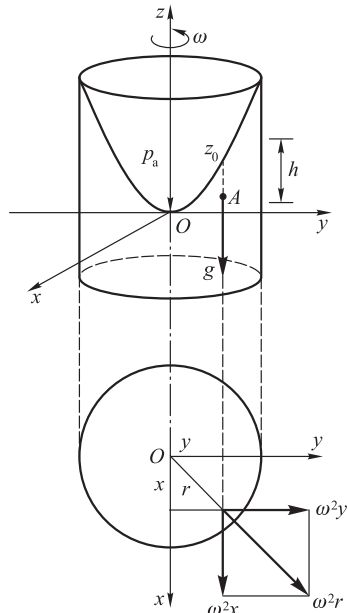


图 3-18 转动液体的相对平衡

则总的单位质量力

$$f_x = \omega^2 x; \quad f_y = \omega^2 y; \quad f_z = -g$$

代入欧拉平衡微分方程综合式得

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

积分得

$$p = \rho \left( \frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 y^2 - gz \right) + C$$

在原点 ( $x=y=z=0$ ) 处,  $p=p_0$ , 由此得  $C=p_0$ , 代入上式得

$$p = p_0 + \rho g \left( \frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) \quad (3-15)$$

这是等角速度旋转的直立容器中, 液体相对平衡时压强分布规律的一般表达式。

等压面簇(包括自由表面, 即  $p = \text{常数}$  的曲面) 方程为

$$\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z = C_1 = \text{常数} \quad (3-16)$$

可见, 等压面簇是一簇具有中心轴的旋转抛物面。

在自由液面上  $p=p_a=p_0$ , 用相对压强表示自由表面方程为

$$z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \quad (3-17)$$

式中,  $z_0$  为自由表面的垂直坐标, 代入式(3-15)得

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z)$$

式中,  $z_0 - z$  为质点在自由液面以下的深度, 若以  $h$  表示, 则上式变为

$$p = p_0 + \rho g h \quad (3-18)$$

上式说明, 在相对平衡的旋转液体中, 各点的压强随水深的变化仍是线性关系; 不同的是, 在旋转容器中各点的测压管水头不等于常数。

### § 3.5 液体作用在平面上的总静压力

确定作用在平面上的液体总静压力的大小、方向和作用点, 是许多工程技术(如分析水池、水闸、水坝及路基等的作用力)必须解决的力学问题。液体作用在平面上的总压力的计算方法有解析法和图解法。

## 3.5.1 解析法

图 3-19 中  $MN$  是与水平面成  $\theta$  角的一斜置平面的投影。平面的受压面积为  $A$ 。水面上作用着大气压强。设  $MN$  延长平面与自由液面的交线为  $Ox$  轴,  $Oy$  轴垂直于  $Ox$  轴沿板面朝下。将平面所在的坐标面绕  $Oy$  轴旋转  $90^\circ$ , 以展示平面  $xOy$  的几何关系。 $h$  是任一点的水深,  $y$  是该点与  $Ox$  轴的距离,  $C$  代表受压平面的形心。

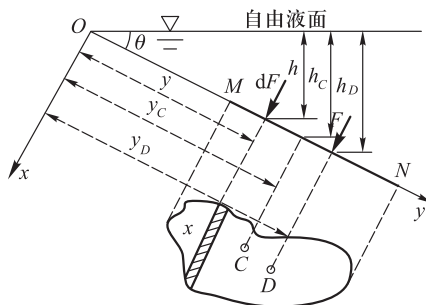


图 3-19 平面上总静压力解析法推导

## 1. 作用力的大小与方向

在水深  $h$  处取一水平条带微元面积  $dA$ , 认为在这微元平面上压强分布是均匀的, 则作用在微元平面上的压力为

$$dF = p dA = \rho g h dA = \rho g y \sin \theta dA$$

其方向与  $dA$  正交且为内法线方向。

由于  $MN$  为一平面, 所以每一微元面积上的压力方向都是互相平行的, 可直接积分求其代数和。作用在平面上的总压力为

$$F = \int dF = \int_A \rho g y \sin \theta dA = \rho g \sin \theta \int_A y dA$$

式中,  $\int_A y dA$  为受压面  $A$  对  $Ox$  轴的静矩, 其值等于受压面面积  $A$  与形心坐标  $y_c$  的乘积。

将  $\int_A y dA = y_c \cdot A$  代入上式, 且有  $h_c = y_c \sin \theta$ , 得

$$F = \rho g \sin \theta \cdot y_c \cdot A = \rho g h_c A = p_c A \quad (3-19)$$

式中,  $F$  为平面上的总静压力(静水总压力);  $h_c$  为受压面形心的淹没深度;

$p_c$  为受压面形心处的压强。

上式表明,作用在任意方位(用  $\theta$  表示),任意形状平面上的总静压力  $F$  的大小等于受压面面积与其形心点所受静压强的乘积。换句话说,任意受压面上的平均压强等于其受压形心点的压强。只要面积、形心深度不变,平面上的总静压力就与平面的倾角无关,但作用方向发生改变。总静压力的方向是沿着受压面的内法线方向。

## 2. 总静压力的作用点——压心

总静压力的作用点称为压力中心(center of pressure),简称压心,如图 3-19 所示,用符号  $D$  表示。作用点的位置可利用理论力学中的合力矩定理(即合力对任一轴的力矩等于各分力对该轴力矩之代数和)求出,即对  $Ox$  轴有

$$F \cdot y_D = \int y \cdot dF = \rho g \sin \theta \int_A y^2 dA$$

式中,  $\int_A y^2 dA$  为受压面  $A$  对  $Ox$  轴的惯性矩,  $\int_A y^2 dA = I_x$ 。代入上式得

$$F \cdot y_D = \rho g \sin \theta \cdot I_x$$

将  $F = \rho g \sin \theta \cdot y_c \cdot A$  代入得

$$y_D = \frac{\rho g \sin \theta \cdot I_x}{F} = \frac{I_x}{y_c A}$$

根据惯性矩的平行移轴定律,有  $I_x = I_{c_x} + Ay_c^2$ ,  $I_{c_x}$  为该受压面对通过它的形心并与  $Ox$  轴平行的形心轴的惯性矩。于是,平面上总压力作用点距  $Ox$  轴的距离  $y_D$  为

$$y_D = \frac{I_x}{y_c A} = y_c + \frac{I_{c_x}}{y_c A} \quad (3-20)$$

上式表明,压心的位置与受压面倾角  $\theta$  无关,并且由于  $I_{c_x}/y_c A \geq 0$ ,所以压心总是在形心之下( $y_D \geq y_c$ ),且随浸入深度的增加接近于形心。只有当受压面的位置为水平放置时,压心与形心才重合。

在实际工程中,受压面多是轴对称面(此轴与  $Oy$  轴平行),总压力  $F$  的作用点必位于对称轴上,即  $x_D = x_c$ ,因而只须求出压力中心在  $y$  方向的位置,就完全确定了压心的位置。

**例 3-5** 一铅直矩形闸门置于水中(图 3-20),已知闸门顶距水面的距离  $h_1 = 1$  m,闸门高度  $h_2 = 2$  m,宽度  $b = 1.5$  m,求作用在闸门上的总静压力及作用点。



3-7 演示文稿:  
常见图形的形心坐标和惯性矩

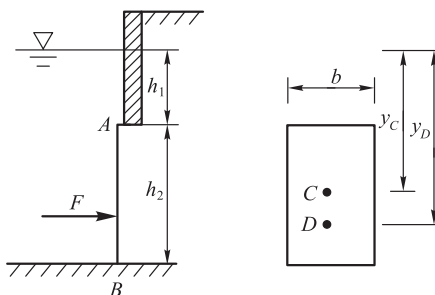


图 3-20 矩形闸门

解：由式(3-19)得总静压力的大小为

$$F = p_c A = \rho g h_c A = \rho g \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) \cdot b h_2$$

代入数据得

$$F = 9\,800 \text{ N/m}^3 \times \left( 1 \text{ m} + \frac{2 \text{ m}}{2} \right) \times 1.5 \text{ m} \times 2 \text{ m} = 58\,800 \text{ N} = 58.8 \text{ kN}$$

由式(3-20)可得压心位置

$$y_D = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C A}$$

因矩形的形心轴惯性矩  $I_{Cx} = \frac{1}{12} b h_2^3$ , 将数据代入得

$$\begin{aligned} y_D &= \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) + \frac{\frac{1}{12} b h_2^3}{\left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right) b h_2} = \left( 1 \text{ m} + \frac{2 \text{ m}}{2} \right) + \frac{\frac{1}{12} \times 1.5 \text{ m} \times (2 \text{ m})^3}{2 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 2 \text{ m}} \\ &= 2.17 \text{ m} = h_D \end{aligned}$$

即压心位置位于水面以下 2.17 m, 方向是水平向右。

**例 3-6** 有一铅直半圆形平面(图 3-21), 图示正面迎水, 背面无水, 迎水面直径恰位于液面上, 求总静压力  $F$  的大小及作用点(已知半圆形  $h_c = \frac{4r}{3\pi}$ ,

$$I_{Cx} = \frac{9\pi^2 - 64}{72\pi} r^4)。$$

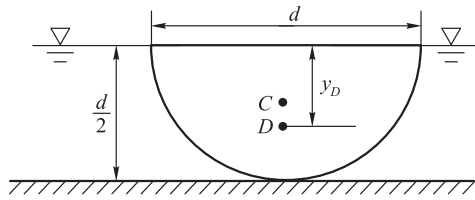


图 3-21 挡水半圆形平板

$$\text{解: } F = p_c A = \rho g h_c A = \rho g \times \frac{4d}{6\pi} \times \frac{1}{8} \pi d^2 = \rho g \times \frac{1}{12} d^3 = \frac{1}{12} \rho g d^3$$

将  $y_c = h_c = \frac{4d}{6\pi}$ ,  $I_{Cx} = \frac{9\pi^2 - 64}{152\pi} d^4$ ,  $A = \frac{1}{8} \pi d^2$  代入式(3-20)有

$$y_D = y_c + \frac{I_{Cx}}{y_c A} = \frac{4d}{6\pi} + \frac{(9\pi^2 - 64)d^4}{152\pi \times \frac{4d}{6\pi} \times \frac{1}{8} \pi d^2} = \frac{64d}{96\pi} + \frac{9\pi^2 d - 64d}{96\pi} = \frac{3}{32} \pi d$$

所以,总静压力的大小为  $\frac{1}{12} \rho g d^3$ ,压心位置在水下深度为  $\frac{3}{32} \pi d$ 。

### 3.5.2 图解法

在实际工程中,矩形平面最为常见,如挡土墙、平板闸门等。求规则平面(矩形)上的总静压力及其作用点问题,采用图解法较为方便。要采用图解法,必须先绘出压强分布图,然后根据压强分布图计算总压力。

#### 1. 静压强分布图

静压强分布规律可用几何图形表示出来,即以线条长度表示点压强的大小,以线端箭头表示点压强的作用方向,亦即受压面的内法线方向,用这样一些垂直于作用面的线条组合而成的图形,就称为静压强分布图。这里需要指出的是,静压强分布图中的静压强是相对压强。因为建筑物的四周都处在大气中,各个方向的大气压力是互相抵消的。从前面知道,静压强与深度成正比(即  $p = \rho g h$ ),是直线函数关系,所以在受压面为平面的情况下,压强分布图必然是按直线分布,有两个点即可以确定此直线。当受压面为曲面时,压强分布图的外包线与曲面之间的距离表示压强的大小,仍与该曲面上的作用点水深成正比。当曲面为圆弧形时,压强作用线必都通过圆心。图 3-22 为各种情况的压强分布图。

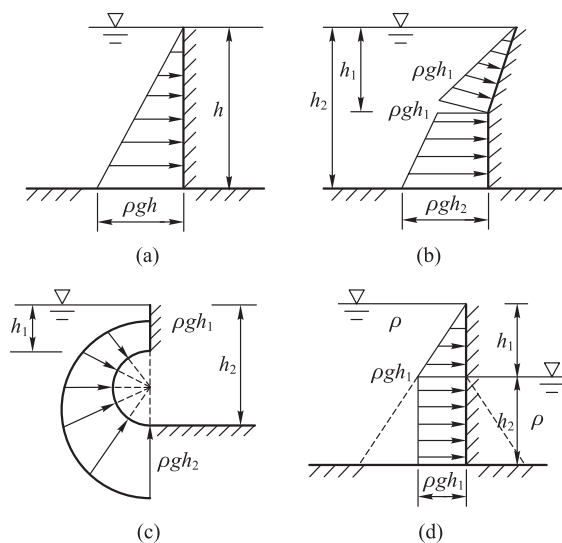


图 3-22 静压强分布图图例

## 2. 图解法

现有高为  $h$ 、宽为  $b$  的铅直矩形闸门,其顶边恰与水面齐平,其在水下的平面为  $ABCD$ ,如图 3-23 所示。

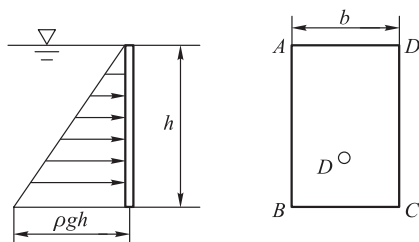


图 3-23 平面总静压力图解法推导

引用总静压力公式(3-19),有

$$F = p_c A = \rho g h_c \cdot A = \rho g \times \frac{1}{2} h \cdot bh = \frac{1}{2} \rho g h^2 \cdot b$$

式中,  $\frac{1}{2} \rho g h^2$  为静压强分布图的面积  $\Omega$ ,  $\Omega$  单位为  $\text{N/m}$ 。

因此,上式可写为

$$F = \Omega \cdot b \quad (3-21)$$

所以,平面上总静压力的大小等于作用在平面上压强分布图图形的体积。

对于作用点有

$$h_D = h_c + \frac{I_{Cx}}{h_c A} = \frac{1}{2}h + \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{1}{2}h \cdot bh} = \frac{2}{3}h$$

式中,  $2h/3$  高度为压强分布图的形心在水面下的深度,因此总静压力的作用线正好通过压强分布图的形心,并指向作用面。

**例 3-7** 用图解法计算解析法中例 3-5 的总静压力大小与压心位置。

**解:** 作出矩形闸门的压强分布图:底为受压面面积,高度为各点的压强(图 3-24b)。则根据图解法原理,总压力大小即为压强分布图的体积,有

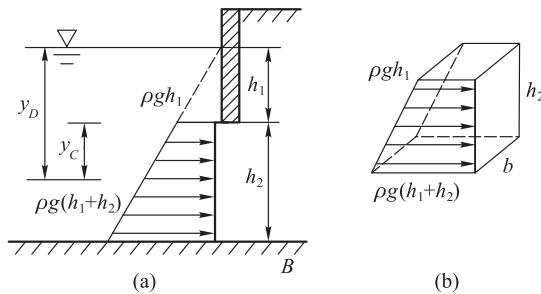


图 3-24 图解法解矩形闸门总静压力

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} [\rho g h_1 + \rho g (h_1 + h_2)] \cdot b \cdot h_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 9\,800 \text{ N/m}^3 \times (1 \text{ m} + 1 \text{ m} + 2 \text{ m}) \times 1.5 \text{ m} \times 2 \text{ m} \\ &= 58.8 \text{ kN} \end{aligned}$$

作用线通过压强分布图的重心,即梯形的形心,梯形形心公式为

$$y_c = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b} \quad (a、b \text{ 分别为梯形上、下底长度及高度})$$

将  $a = \rho g h_1$ 、 $b = \rho g (h_1 + h_2)$ 、 $h = h_2$  代入,即有

$$y_D = h_1 + y_c = h_1 + \frac{h_2}{3} \frac{\rho g h_1 + 2\rho g (h_1 + h_2)}{\rho g h_1 + \rho g (h_1 + h_2)}$$

$$= 1 \text{ m} + \frac{2 \text{ m}}{3} \times \frac{1 \text{ m} + 2 \times (1 \text{ m} + 2 \text{ m})}{1 \text{ m} + 1 \text{ m} + 2 \text{ m}} = 2.17 \text{ m} = h_D$$

**例 3-8** 已知一矩形平面倾斜置于水中(图 3-25a), 矩形平面顶离水面高度为  $h = 1 \text{ m}$ , 底离水面高度为  $H = 3 \text{ m}$ , 且矩形宽度  $b = 5 \text{ m}$ 。用解析法和图解法分别求作用在该平面上的总静压力大小和作用点。

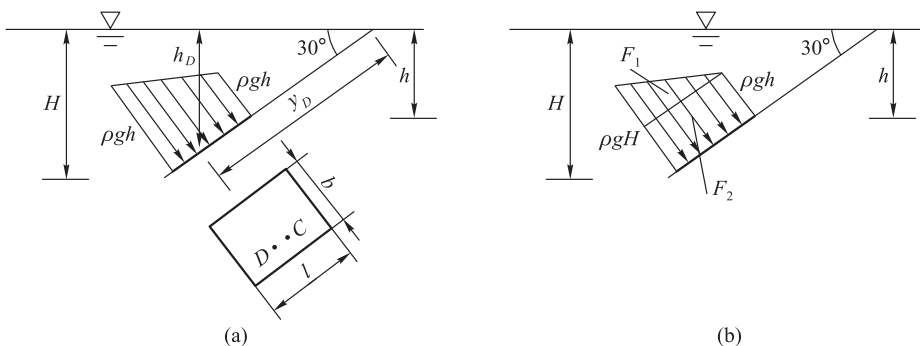


图 3-25 矩形斜平面的总静压力计算

**解:** (1) 解析法

矩形平面沿  $y$  坐标方向的长度为

$$l = \frac{H-h}{\sin 30^\circ} = \frac{(3-1) \text{ m}}{0.5} = 4 \text{ m}$$

又

$$h_c = h + \frac{H-h}{2} = 1 \text{ m} + \frac{(3-1) \text{ m}}{2} = 2 \text{ m}$$

$$A = lb = 4 \text{ m} \times 5 \text{ m} = 20 \text{ m}^2$$

根据式(3-19)有

$$F = \rho g h_c \cdot A = 9\,800 \text{ N/m}^3 \times 2 \text{ m} \times 20 \text{ m}^2 = 392 \text{ kN}$$

引用式(3-20)

$$y_D = y_c + \frac{I_{Cx}}{y_c A}$$

式中

$$y_c = \frac{h_c}{\sin 30^\circ} = \frac{2 \text{ m}}{1/2} = 4 \text{ m}$$

$$I_{Cx} = \frac{1}{12}bl^3 = \frac{1}{12} \times 5 \text{ m} \times (4 \text{ m})^3 = \frac{80}{3} \text{ m}^4$$

代入得

$$y_D = 4 \text{ m} + \frac{80/3 \text{ m}^4}{4 \text{ m} \times 20 \text{ m}^2} = 4.33 \text{ m}$$

及

$$h_D = y_D \sin 30^\circ = 2.17 \text{ m}$$

所以,总静压力的大小为 392kN,压心位置距水面以下 2.17 m,方向为该受压面的内法线方向。

(2) 图解法

因为是规则的矩形平面,所以可用图解法求解。先作出压强分布图,并将压强分布图分为两部分(三角形+矩形),如图 3-25b 所示。

已知  $l = \frac{H-h}{\sin 30^\circ} = 4 \text{ m}$ ,可得梯形面积

$$\Omega = \frac{\rho g}{2}(H+h)l = \frac{\rho g}{2} \times (3+1) \text{ m} \times 4 \text{ m} = 8 \text{ m}^2 \times \rho g$$

则

$$F = \Omega b = 8 \text{ m}^2 \times \rho g \times 5 \text{ m} = 40 \text{ m}^3 \times 9\,800 \text{ N/m}^3 = 392 \text{ kN}$$

对于作用点,因为梯形形心点坐标公式较复杂,所以可先将其分解为简单的三角形和矩形,分别求其面积、压心。

对于三角形有

$$F_1 = \frac{\rho g}{2}(H-h)lb = 20 \text{ m}^3 \times \rho g$$

$$y_{D1} = \frac{2}{3}l + \frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{3} \times 4 \text{ m} + 2 \text{ m} = \frac{14}{3} \text{ m}$$

对于矩形有

$$F_2 = \rho g h b l = 20 \text{ m}^3 \times \rho g$$

$$y_{D2} = \frac{1}{2}l + \frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{1}{2} \times 4 \text{ m} + 2 \text{ m} = 4 \text{ m}$$

根据合力矩原理有

$$F \cdot y_D = F_1 y_{D1} + F_2 y_{D2}$$

代入得

$$y_D = \frac{1}{2}(y_{D1} + y_{D2}) = \frac{1}{2} \times \left( \frac{14}{3} + 4 \right) \text{ m} = 4.33 \text{ m}$$

及

$$h_D = 2.17 \text{ m}$$

结果与解析法相同。

### § 3.6 液体作用在曲面上的总静压力

工程实践中有些承受水压力的作用面是曲面,如拱坝的坝面、弧形闸门、U形渡槽等,这就要求确定作用在曲面上的总静压力。因常用曲面多为二向曲面(即具有平行母线的柱面),所以本书主要介绍作用在二向曲面上的总静压力的求解。

作用在曲面上任意点的压强,其任意点的压强仍然等于该点的淹没深度乘以液体的密度和重力加速度,即  $p = \rho gh$ 。但由于各点静水压强的方向不再是互相平行的,也不一定交于一点,因此求曲面上的合力就不能像平面上静水压力那样简单地采用积分的方法进行求解。所以求解作用在二向曲面上的总压力,需要先分别求出其水平分力  $F_x$  和垂直分力  $F_z$ ,再合成总压力  $F$ 。

设一侧承压的二向曲面  $MN$ (柱面),母线垂直于图面,曲面面积为  $A$ 。取坐标系,令  $Oxy$  平面与液面重合,  $Oz$  轴向下,如图 3-26a 所示。求解作用在二向曲面上的总压力,可先分别求出其分力  $F_x$  和  $F_z$ ,再合成总压力  $F$ 。



3-8 视频:  
承受水压力的曲面

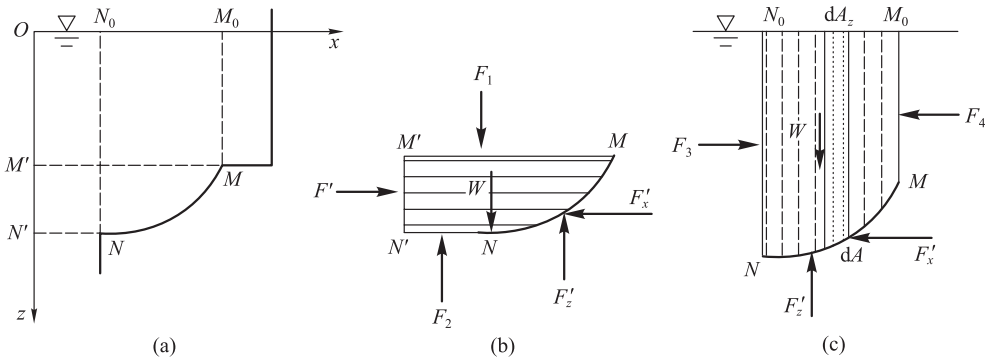


图 3-26 曲线上的总静压力

### 3.6.1 水平分力

曲面  $MN$  投影到铅垂平面上的投影面为  $M'N'$ , 其投影面积为  $A_x$ , 取  $M'N'NM$  液体为脱离体。对该脱离体作受力平衡分析(图 3-26b)。作用于脱离体上的力有  $F'$ 、 $F_1$ 、 $F_2$ , 液体作用于曲面上的反力——水平力  $F'_x$  和竖向力  $F'_z$ , 以及铅垂向下的重力  $W$ 。于是, 作用于脱离体上的水平力仅有  $F'$  及  $F'_x$ , 它们等量反向。再根据作用力与反作用力的关系, 可得

$$F_x = F' = p_c A_x \quad (3-22)$$

式中,  $F_x$  为液体作用在曲面上的水平分力;  $p_c$  为投影面  $A_x$  形心点的压强。

上式表明, 曲面上所受的垂直方向分力  $F_x$  等于作用在该曲面的铅垂投影面上的压力  $F'$ , 其作用线也必定是  $F'$  的作用线。这样就求曲面上的静水总压力的水平分力转化为求另一铅垂平面的静水压力, 其求解方法完全等同于平面上力的求解, 由于投影面是规则形状, 所以既可以采用解析法, 也可以采用图解法。

### 3.6.2 竖向分力

曲面上的竖向分力(图 3-26c), 可由曲面  $MN$  和曲面在自由液面上的投影面  $M_0N_0$  及曲面周围边缘的竖向面所包围的液体体积(简称压力体, 详见 3.6.4)求得。该体积的液体处于静力平衡。自由面上压强为零, 竖向力仅有重力  $W$  和作用于曲面面积上的竖向力  $F_z$  的反作用力  $F'_z$ 。因此

$$F_z = W = \int_{A_z} \rho g h dA_z = \rho g V_p \quad (3-23)$$

式中,  $F_z$  为液体作用在曲面上的竖向力;  $A_z$  为曲面在水平面上的投影面积;

$\int_{A_z} h dA_z = V_p$  为压力体体积。

上式表明, 作用于曲面上静压力的竖向分力大小等于曲面及曲面周围边缘垂直延伸至自由面所包围的液体重量, 其作用线位置与  $W$  相同, 必通过压力体的重心。

### 3.6.3 曲面上的总静压力

一般, 不规则面上不存在单一的合力, 所求得水平分力及竖向分力,

可能不在同一平面上。对二元曲面(即具有平行母线的柱面),这两个力会在同一平面上,并可合并成一个力  $F$ 。即

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \quad (3-24)$$

$F$  与水平线夹角

$$\theta = \arctan(F_z/F_x) \quad (3-25)$$

其作用线必通过  $F_x$  与  $F_z$  作用线的交点。 $F$  的作用点位于  $F$  作用线与曲面的交点。但对许多实际问题没有必要计算  $F$ , 只需求得分力, 包括大小、方向和作用点, 就可完全满足需要。

### 3.6.4 压力体

在式(3-23)中, 积分  $\int_{A_z} h dA_z = V_p$  表示的几何体积称为压力体 (pressure prism)。曲面上流体静压力的竖向分力计算问题, 实际上就是压力体的计算问题, 故压力体的概念十分重要。

压力体是取一根铅垂线沿着作用面的边缘移动一周割出的以作用面为下表面、自由液面 ( $p = p_a$ ) 或其延伸面为上表面的柱体。从定义可知, 压力体体积是由以下三个曲面围成的体积: (1) 受压曲面本身; (2) 通过曲面周围边缘所作的铅垂面; (3) 自由液面或自由液面的延长面。

#### 1. 实压力体

当液体及压力体位于曲面同侧时, 如图 3-27a 所示,  $F_z$  向下,  $F_z$  的大小等于压力体水重, 此时压力体称为实压力体。

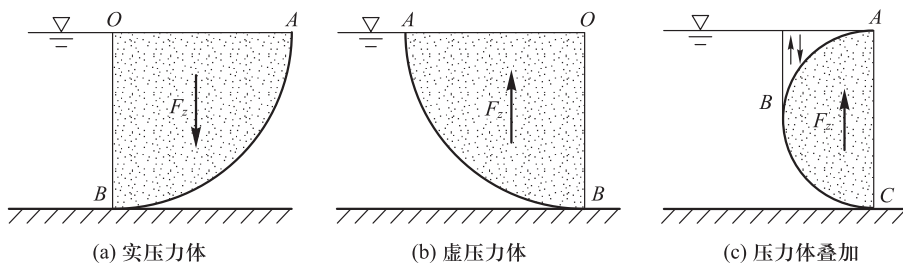


图 3-27 压力体

#### 2. 虚压力体

当液体及压力体各在曲面的一侧时, 如图 3-27b 所示, 则  $F_z$  向上,  $F_z$  的



3-9 动画:  
压力体及其绘制



3-10 动画:  
压力体绘制 1



3-11 动画:  
压力体绘制 2

大小等于压力体的水重,这个想象的压力体称为虚压力体。

### 3. 压力体叠加

对于水平投影重叠的曲面,分开界定压力体,然后相互叠加。例如,半圆柱面(图 3-27c)的压力体,分别按曲面 $\widehat{AB}$ 、 $\widehat{BC}$ 确定。叠加后得虚压力体 $ABC$ , $F_z$ 方向向上。

### 3.6.5 推论

(1) 对于气体,在有限的空间里,若气体压强 $p$ 随深度变化甚微且气体重量可忽略不计,同样取脱离体作受力分析可得,气体作用于曲面上的压力为

$$\text{水平分力} \quad F_x = p \cdot A_x \quad (3-26)$$

$$\text{竖向分力} \quad F_z = p \cdot A_z \quad (3-27)$$

式中, $A_x$ 、 $A_z$ 分别为曲面在铅垂面上和水平面上的投影面积。

(2) 若液体表面不是自由液面,而是密闭容器,有表面压强 $p_0$ 作用,则压力为

$$\text{水平分力} \quad F_x = (p_c + p_0) A_x \quad (3-28)$$

$$\text{垂直分力} \quad F_z = \rho g V_p + p_0 A_z \quad (3-29)$$

总合力 $F$ 同式(3-24)和式(3-25)。

**例 3-9** 一球形容器的两个半球面铆接而成,铆钉有 $n$ 个,内盛密度为 $\rho$ 的液体(图 3-28a),求每一铆钉受到的拉力。

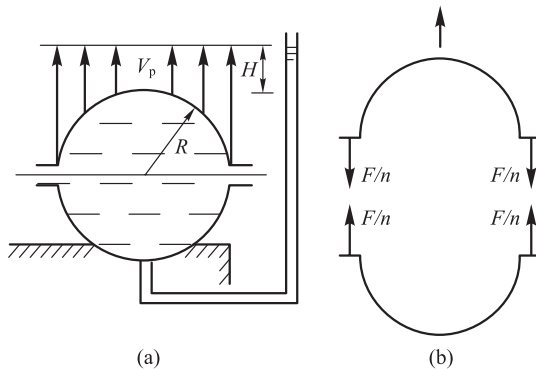


图 3-28 球形压力容器

**解:**取球形容器的上半球为受压曲面,则其所受到的压力体如图 3-28b 所

示。则有

$$\begin{aligned} nF &= \rho g V_p = \rho g \left[ \pi R^2 (R+H) - \frac{2}{3} \pi R^3 \right] \\ &= \rho g \left( \frac{1}{3} \pi R^3 + \pi R^2 H \right) \end{aligned}$$

因此

$$F = \frac{\rho g}{n} \left( \frac{1}{3} \pi R^3 + \pi R^2 H \right)$$

**例 3-10** 用允许应力  $[\sigma] = 150 \text{ MPa}$  的钢板,制成内直径  $D$  为  $1 \text{ m}$  的水管(图 3-29a),该水管内压强为  $500 \text{ mH}_2\text{O}$ ,求水管壁应有的厚度(忽略管道内各点因高度不同而引起的压强差)。

**解:**取长度为  $1 \text{ m}$  的管段,并忽略管道截面上各点因高度不同而引起的压强差,认为管壁各点压强都相等。

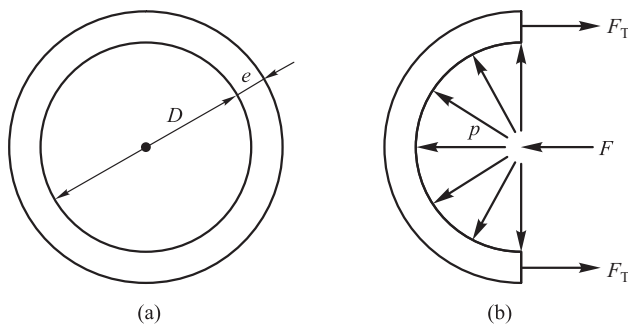


图 3-29 压力管管壁压力

设想沿管径将管壁切开,取其中半管作为脱离体来分析其受力情况(如图 3-29b 所示)。作用在半环内表面的水平压力等于半环垂直投影面上的压力,  $F = p \cdot A_z = p \cdot D \times 1$ 。该压力由半环壁上的拉应力承受并与之平衡,即  $2F_T = F = pD$ ,设  $F_T$  在管壁厚度上是均匀分布的,则

$$F_T \leq [\sigma] \cdot e \times 1$$

所以

$$e \geq \frac{F_T}{[\sigma]} = \frac{pD/2}{[\sigma]} = \frac{9\,800 \text{ Pa/mH}_2\text{O} \times 500 \text{ mH}_2\text{O} \times 1 \text{ m}}{2 \times 150 \times 10^6 \text{ Pa}} = 0.0163 \text{ m}$$

**例 3-11** 单位宽度 ( $b = 1 \text{ m}$ ) 半圆柱, 问在浮力  $F_z$  及水平水压力  $F_x$  共同作用下是否对轴心产生转动力矩? 如图 3-30 所示。

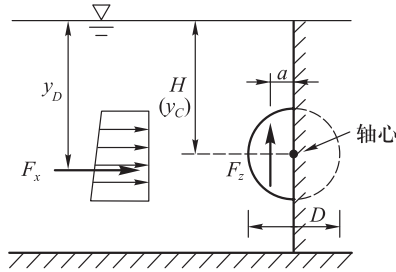


图 3-30 半圆柱受水压力

**解:** (1) 概念分析

水下半圆柱不会对轴心产生转动力矩。因为所受水压力的作用线总是垂直于作用面, 且通过圆心。

(2) 计算证明

$$F_z = \rho g V_p = \rho g \times \frac{\pi}{4} D^2 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{\pi}{8} D^2 \rho g$$

$$F_x = \rho g h_c A = \rho g H D \times 1 = \rho g H D$$

$$y_D = y_c + \frac{I_{cx}}{y_c A}$$

$$y_D - y_c = \frac{I_{cx}}{y_c A} = \frac{1 \times D^3 / 12}{H \times D \times 1} = \frac{D^2}{12H}$$

$$M_x = -F_x \cdot \frac{D^2}{12H} = -\frac{\rho g D^3}{12} \quad (\text{逆时针为负})$$

竖向力作用点到轴心的距离为

$$a = \frac{2D}{3\pi}$$

于是

$$M_z = F_z \cdot a = \frac{\pi}{8} D^2 \rho g \times \frac{2D}{3\pi} = \frac{\rho g D^3}{12}$$

$$\sum M = M_x + M_z = 0$$

所以,半圆柱面所受的水压力不会对其轴心产生转动力矩。

**例 3-12** 圆柱体的直径为 2 m,水平放置,各部分尺寸如图 3-31a 所示。左侧有水,右侧无水。求作用在每米长度圆柱体上的总静压力的水平分力  $F_x$  和竖向分力  $F_z$ 。

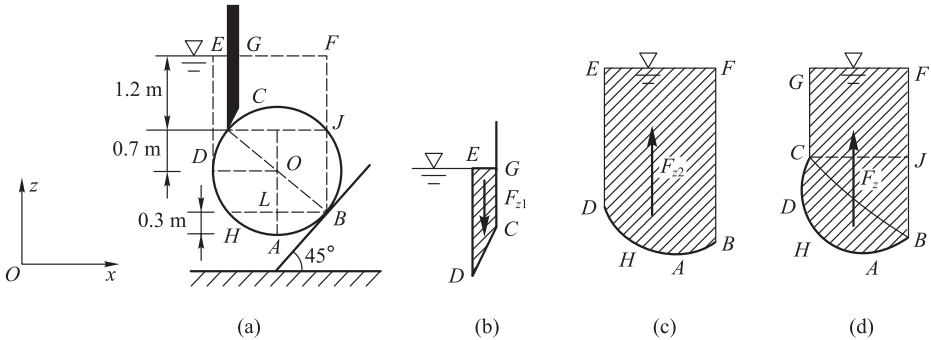


图 3-31 挡水圆柱体总静压力

**解:**圆柱体的受压面  $CDHAB$ ,其中  $HAB$  面两侧水平分力相互抵消。则曲面  $CDH$  受压面的水平分力为

$$F_x = \rho g h_c A = (9\,800 \text{ N/m}^3) \times (1.2 \text{ m} + 0.7 \text{ m}) \times (1.4 \text{ m}) \times (1 \text{ m}) = 26\,068 \text{ N}$$

竖向分力  $F_z$  可用绘曲面  $CDHAB$  的压力体的方法求解。将曲面  $CDHAB$  分成两段( $CD$  和  $DHAB$ )。然后绘出各段压力体,如图 3-31b 和 c 所示。 $CD$  压力体方向  $F_{z1}$  向下,曲面  $DHAB$  的压力体  $F_{z2}$  方向向上,两者相互抵消一部分,最后得出的压力体为如图 3-31d 所示的影线部分。则在每米长圆柱体上总静压力的竖向分力  $F_z$  = 体积  $DHABJFGCD$  的水重。为了便于计算,把这个体积分成几个简单的几何图形,如矩形、三角形和半圆形,则

$$F_z = (\text{矩形 } JFGC + \text{三角形 } CJB + \text{半圆 } CDHABC) \text{ 的水重}$$

$$\begin{aligned} F_z &= 9\,800 \text{ N/m}^3 \times \left[ 1.2 \text{ m} \times 1.4 \text{ m} + \frac{1}{2} \times 1.4 \text{ m} \times 1.4 \text{ m} + \frac{1}{2} \pi \times (1 \text{ m})^2 \right] \times (1 \text{ m}) \\ &= 9\,800 \text{ N/m}^3 \times (1.68 \text{ m}^2 + 0.98 \text{ m}^2 + 1.57 \text{ m}^2) \times 1 \text{ m} = 41\,454 \text{ N} \text{ (向上)} \end{aligned}$$

**例 3-13** 某竖直隔板上开有矩形孔口(图 3-32):高  $a = 1.0 \text{ m}$ 、宽  $b = 3 \text{ m}$ 。用直径  $d = 2 \text{ m}$  的圆柱筒将其堵塞。隔板两侧充水, $h = 2 \text{ m}$ , $z = 0.6 \text{ m}$ 。求作用于该圆柱的总静压力。

**解:**可画出压强分布图和压力体图求解。

当两侧同时作用有流体静压强时,中隔板的水平方向压强分布图如图 3-22d 所示。故圆柱筒在左右压力相互抵消后的压强分布为矩形分布,如图 3-32 所示。

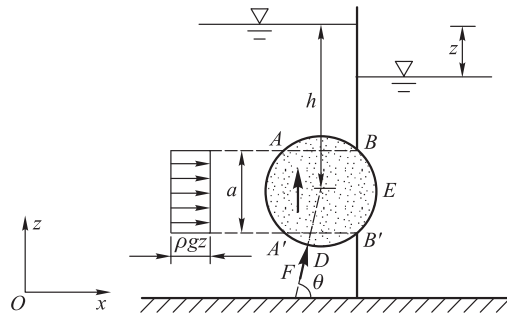


图 3-32 隔水圆柱

压力体左侧为面积  $BAA'B'$  乘以圆柱筒宽度  $b$ , 右侧为面积  $BEB'$  乘以圆柱筒宽度  $b$ 。故隔板两侧受压曲面压力体之和恰好为圆柱筒体积, 为虚压力体,  $F_z$  向上。

绘出压强分布图和压力体后, 总静压力的水平分力

$$\begin{aligned} F_x &= ab\rho gz = (1.0 \text{ m}) \times (3 \text{ m}) \times (9800 \text{ N/m}^3) \times (0.6 \text{ m}) \\ &= 17.65 \text{ kN} \quad (\text{方向向右}) \end{aligned}$$

总静压力的竖向分力

$$\begin{aligned} F_z &= \rho g V_p = \rho g \left( \frac{\pi}{4} d^2 \times b \right) = (9800 \text{ N/m}^3) \times \left[ \frac{\pi}{4} \times (2 \text{ m})^2 \times (3 \text{ m}) \right] \\ &= 92.37 \text{ kN} \quad (\text{方向向上}) \end{aligned}$$

于是, 作用在圆柱筒上的总静压力

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{17.65^2 + 92.37^2} \text{ kN} = 94.04 \text{ kN}$$

因圆柱筒面上任一点压强均通过圆心轴, 故合力也必然通过圆心轴, 且其作用线与水平面的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{F_z}{F_x} = \arctan \frac{92.37 \text{ kN}}{17.65 \text{ kN}} = 79.18^\circ$$

作用点  $D$  在水下的深度

$$h_D = h + \frac{d}{2} \sin \theta = 2 \text{ m} + \frac{2 \text{ m}}{2} \times \sin 79.18^\circ = 2.98 \text{ m}$$

## § 3.7 浮力及浮潜体稳定

### 3.7.1 浮力及浸没物体的三态

#### 1. 潜体的浮力与浮心

漂浮在水面或浸没于水下的物体也受静水压力的作用,这个作用力就是物体表面上各点静水压力的总和。

如图 3-33 所示,由潜体(浸没于液体中的物体)表面作垂直切线  $AA'$ 、 $BB'$ 、 $\dots$ ,这些切线便是切于潜体表面的竖直柱体的母线。柱面与潜体表面的交线,把潜体表面分为  $ADB$  和  $ACB$  上下两部分。作用在交线以上潜体表面的总静压力的竖向分力  $F_{z1}$  等于曲面  $ADB$  以上的压力体的重量,其方向朝下;作用在交线以下潜体表面上的总静压力的竖向分力  $F_{z2}$  等于曲面  $ACB$  以上的压力体的重量,方向朝上。

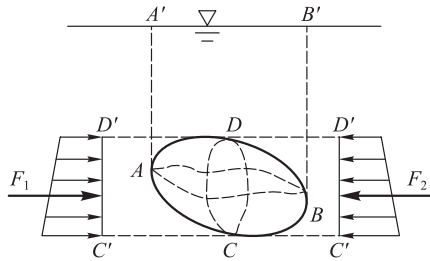


图 3-33 潜体

作用在潜体整个表面上的竖向分力  $F_z$ ,应等于上、下两部分之和,即

$$F_z = F_{z2} - F_{z1} = \rho g V_{A'ACBB'} - \rho g V_{A'ADB B'} = \rho g V_{ACBDA} \quad (\text{向上}) \quad (3-30)$$

式中,  $V_{ACBDA}$  为潜体所排开液体的体积。

上式表明,潜体竖向力等于潜体所排开液体的重量。

同样地可将潜体分为  $CAD$  和  $CBD$  左右两部分,作用于物体上的水平分力  $F_x$  就是这两部分上的  $F_1$  和  $F_2$  之和,它们的大小各为相应曲面的垂直投影面上的静水压力。因为这两部分在垂直面上的投影面积相等,位置同高,因此  $F_1$  和  $F_2$  大小相等,方向相反,互相抵消。因此,作用在潜体上的水平分力恰好为零。

综上所述,物体在液体中所受的总静压力,仅有铅垂向上的分力,其大小恰好等于物体所排开的同体积液体的重量,这就是阿基米德定律。

由于  $F_z$  具有把物体推向液体表面的倾向,故又称浮力(buoyancy)。浮力的作用点称为浮心(center of buoyancy),浮心与所排开液体体积的形心重合。

## 2. 浸没物体的三态

浸没于液体中的物体不受其他物体支持时,受到重力  $G$  和浮力  $F_z$  的作用,根据物体重量  $G$  与浮力  $F_z$  的相对大小,浸没物体有三态:

- (1) 沉体  $G > F_z$ , 下沉至底的物体。
- (2) 潜体  $G = F_z$ , 潜没于液体中任意位置而保持平衡,即悬浮状态的物体。
- (3) 浮体  $G < F_z$ , 物体浮出液体表面,直至液面下部分所排开的液体重量恰好等于物体的重量才保持平衡,呈漂浮状态的物体。

### 3.7.2 潜体的平衡与稳定性

设有一潜体,重量为  $G$ ,重心在  $C$  点;浮力为  $F_z$ ,浮心在  $D$  点。潜体的平衡条件是重力与浮力大小相等,方向相反,作用在同一铅垂直线上。这种平衡的稳定性,也就是遇到外界扰动,潜体倾斜后,恢复到它原来平衡状态的能力。根据重心  $C$  和浮心  $D$  在同一铅垂直线上的相对位置,分以下三种情况:

(1) 随遇平衡 浮心  $D$  和重心  $C$  重合(图 3-34a),这时物体在液体中的方位是任意的,即潜体处于任何位置都是平衡的。

(2) 稳定平衡 浮心  $D$  在重心  $C$  之上(图 3-34b),潜体发生倾斜后,重力  $G$  和浮力  $F_z$  形成一个使潜体恢复到原来状态的转动力矩,以反抗使其继续倾倒的趋势,一旦去掉外界干扰,潜体会自动恢复平衡。

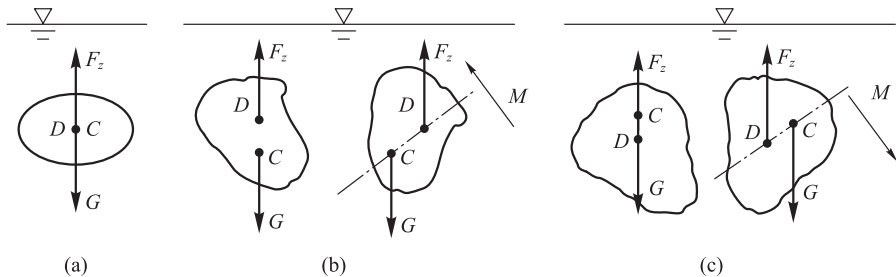


图 3-34 潜体的平衡与稳定



3-12 动画:  
潜体的平  
衡与稳定

(3) 不稳定平衡 浮心  $D$  在重心  $C$  之下(图 3-34c), 潜体倾斜后, 重力  $G$  和浮力  $F_z$  将产生一个使潜体继续翻转的转动动力矩, 潜体不能恢复到原来的平衡位置。

由此可见, 为了保持潜体的稳定, 潜体的浮心  $D$  必须位于重心  $C$  之上。

### 3.7.3 浮体的平衡与稳定性

浮体的平衡条件与潜体相同, 即重力  $G$  和浮力  $F_z$  大小相等, 方向相反, 且作用在同一铅垂线上。但它们的稳定条件是不同的。对于浮体, 重心  $C$  高于浮心  $D$  时, 它的平衡也还是有稳定的可能, 这是因为浮体倾斜后, 浸没在水中的那部分形状改变了, 浮心的位置也随之移动, 在一定的条件下, 有可能出现扶正力矩, 使得浮体仍保持其稳定性。

#### 1. 定倾半径与偏心距

图 3-35a 所示为一对称浮体, 发生倾斜后, 它的重心  $C$  并不改变, 而浮心则因为浸入水中的部分形状改变, 从原来的  $D$  移到  $D'$  位置上, 如图 3-35b 所示。这里先给出几个概念, 通过浮心  $D$  和重心  $C$  的线  $H-H$  称为浮轴。而通过  $D'$  的浮力  $F'_z$  的作用线与浮轴的相交点  $M$  称为定倾中心 (metacenter)。定倾中心  $M$  到原浮心  $D$  的距离称为定倾半径 (metacenter radius), 以  $\rho$  表示。重心  $C$  和浮心  $D$  的距离称为偏心距, 以  $e$  表示。

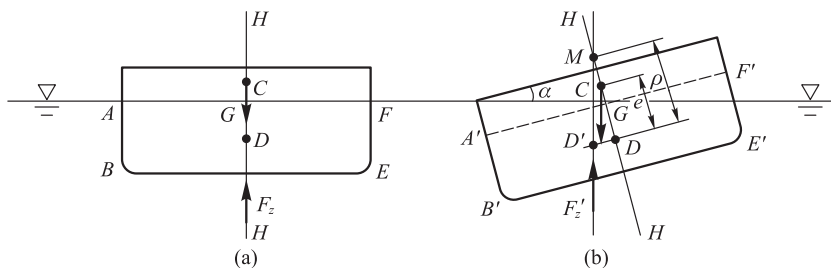


图 3-35 浮体平衡与稳定

#### 2. 浮体的平衡

浮体倾斜后能否恢复其原平衡位置, 取决于重心  $C$  和定倾中心  $M$  的相对位置。由图 3-35 可以看出: 浮体的定倾中心  $M$  高于重心  $C$ , 即  $\rho > e$  时, 重力  $G$  与倾斜后的浮体的浮力  $F'_z$  构成一个使浮体恢复到原来平衡位置的转动动力矩, 浮体处于稳定平衡。反之, 若定倾中心  $M$  低于重心  $C$ , 即  $\rho < e$  时, 重力  $G$  与倾斜后的  $F'_z$  构成一个使浮体有更加倾斜趋势的转动动力矩, 浮体处于不

平衡状态。而当  $M$  点与  $C$  点重合,即  $\rho=e$  时,重力  $G$  与浮力  $F_z$  不会产生力矩,浮体处于随遇平衡状态。

### 3. 浮体的稳定性

由上可见,浮体保持稳定的条件是重心  $C$  一定要在定倾中心  $M$  之下,即定倾半径  $\rho$  大于偏心距  $e$ 。

对于重心不变的对称浮体,当浮体的形状和重量一定时,重心和浮心之间的偏心距  $e$  也就确定了,因而浮体是否稳定取决于定倾半径  $\rho$  的大小。

对于小倾斜角 ( $\alpha < 10^\circ$ ) 的浮体,有(推导略)

$$\rho = \frac{I_0}{V} \quad (3-31)$$

式中,  $I_0$  为浮体浮面对其中心纵轴的惯性矩;  $V$  为浮体所排开液体的体积。

浮体与水面相交的平面称为浮面。

上式说明,浮体定倾半径  $\rho$  的大小,与浮面对中心纵轴的惯性矩  $I_0$  和浮体所排开液体的体积  $V$  有关。定倾半径算出后,如果  $\rho$  值大于偏心距  $e$ ,则浮体是稳定的,否则将是不稳定的。定倾半径越大,浮体的稳定性越好。

## 思考题

- 3-1 实际流体和理想流体处于静止或运动状态时各受到哪几种力的作用?
- 3-2 质量力只有重力的静止流体的单位质量力为多少?(坐标轴  $z$  与铅垂方向一致,并竖直向上。)
- 3-3 平衡微分方程适用于相对静止的流体吗,为什么?
- 3-4 什么是等压面?等压面应具备什么样的条件?
- 3-5 相对平衡流体的等压面是否为水平面?为什么?什么条件下的等压面是水平面?
- 3-6 压力表和测压计测得的压强是绝对压强还是相对压强?
- 3-7 在传统实验中,为什么常用水银作为测压管的工作流体?
- 3-8 盛有液体的敞口容器作自由落体时,容器壁面上的压强等于多少?
- 3-9 若人能承受的最大压力为  $1.274 \text{ MPa}$ (相对压强),则潜水员的极限潜水深度为多少?
- 3-10 若测压管水头为  $1 \text{ m}$ ,压强水头为  $1.5 \text{ m}$ ,则测压管最小长度应该为多少?
- 3-11 静止流体、流动流体中,各点的测压管水头是否相等?
- 3-12 图示两种液体盛在同一容器中,且  $\rho_1 < \rho_2$ ,在容器侧壁装了两根测压管,试问图中所标明的测压管中水位对否?
- 3-13 图示水深相差  $h$  的  $A$ 、 $B$  两点均位于箱内静水中,连接两点的 U 形压差计的液面高差为  $h_m$ ,试问下述  $h_m$  三个值哪一个正确?

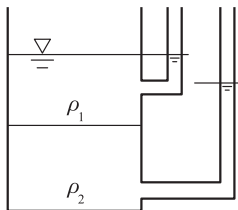


3-13 演示文稿:  
本章小结

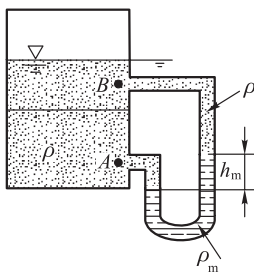


第 1-3 章  
自测题

- (1)  $\frac{p_A - p_B}{\rho_m}$ ; (2)  $\frac{p_A - p_B}{\rho_m g - \rho g}$ ; (3) 0。

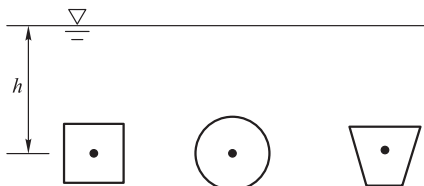


思 3-12 图



思 3-13 图

**3-14** 图示浸没在水中一侧挡水的三种形状的平面物体,面积相同,形心处的水深相等。问:受到的总静压力是否相等? 哪个压心的位置最深?



思 3-14 图

**3-15** 如上题图中的方形闸门潜在水中,一侧挡水,若绕通过其形心  $C$  的水平轴旋转  $\alpha$  角,其总静压力的大小、方向和作用点是否变化? 为什么?

**3-16** 使用图解法和解析法求平面总静压力时,对受压面的形状有无限制? 为什么?

**3-17** 浮体、潜体的平衡稳定条件是什么? 它们有哪几种平衡形式?

### 习 题 3

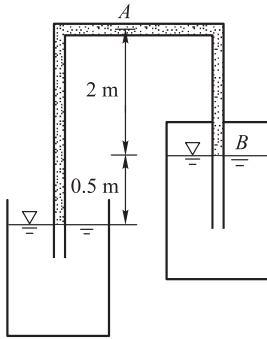
**3-1** 在水平的  $xOy$  平面内一边长 0.02 m 的正方形面积上,作用均布力  $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ ,单位是 N,试求作用于该面积上的:(1) 竖向分力和切向分力;(2) 压强和切应力。

**3-2** 试求淡水自由表面下 2 m 深处的绝对压强和相对压强(认为自由表面的绝对压强为 1 个工程大气压)。

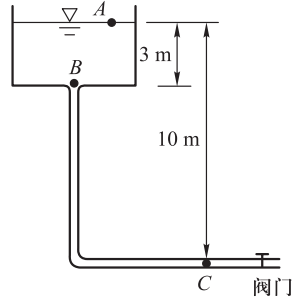
**3-3** 如题图所示,管内充满  $\rho g = 8.5 \text{ kN/m}^3$  的油,并处于静止状态,试求  $A$  点和  $B$  点的压强,用  $\text{mH}_2\text{O}$  表示。

**3-4** 如题图所示,试确定图中  $A$ 、 $B$ 、 $C$  各点测压管高度和测压管水头。

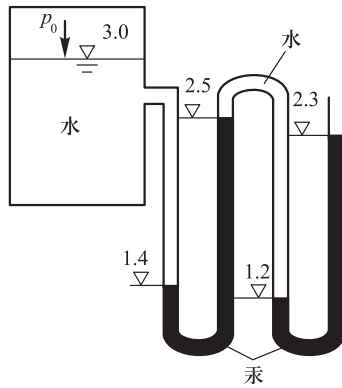
**3-5** 用多管水银测压计测压,题图中标高的单位为 m,试求水面的压强  $p_0$ 。



题 3-3 图



题 3-4 图

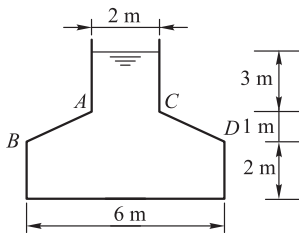


题 3-5 图

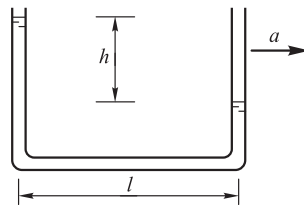
3-6 山体内有一条很窄的裂缝, 竖向深达 1 200 m, 内充满了静止的渗透水, 试问裂隙最深处每平方米山体受到的水平静水推力为多大?

3-7 盛水的变截面圆柱体容器如题图所示, 试求作用于渐缩段  $ABCD$  上的竖向分力。

3-8 为了量测物体的加速度  $a$ , 用装有液体的小直径 U 形管与物体一起运动, 如题图所示。设已知液面高差  $h$ , U 形管水平段长  $l$ , 试求加速度  $a$  的表达式。



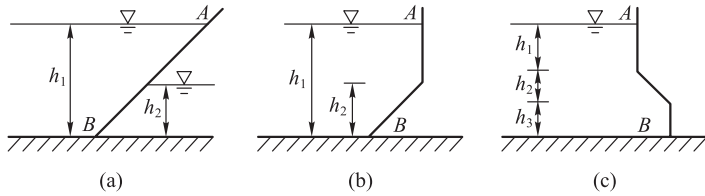
题 3-7 图



题 3-8 图

3-9 一盛水的敞口容器作加速运动,试求下列两种情况下容器内静压强的分布规律:(1)自由降落;(2)以等加速度  $a$  向上运动。

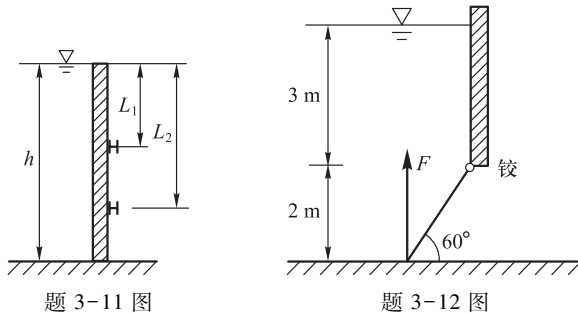
3-10 试定性绘出题图中  $AB$  面上的压强分布图。



题 3-10 图

3-11 金属矩形平板闸门,门高  $h = 3\text{ m}$ ,宽  $b = 1\text{ m}$ ,由两根工字钢横梁支撑,挡水面与闸门顶边齐平,如题图所示。如果要求横梁所受的力相等,两横梁的位置  $L_1$ 、 $L_2$  应为多少?

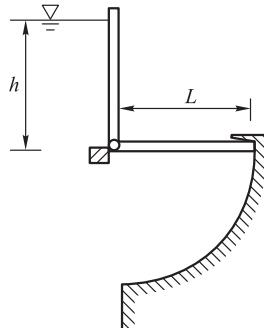
3-12 试求开启题图所示水闸闸门所需的单位宽度拉力  $F$ 。不计闸门自重及转轴摩擦力。



题 3-11 图

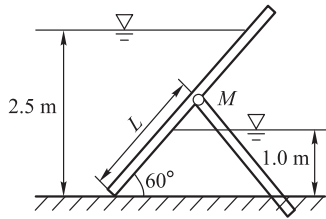
题 3-12 图

3-13 已知闸门半径为  $L$ ,试求如题图所示的闸门,当上游水深  $h$  上升到多高时会自动开启溢水。不计铰的阻力。



题 3-13 图

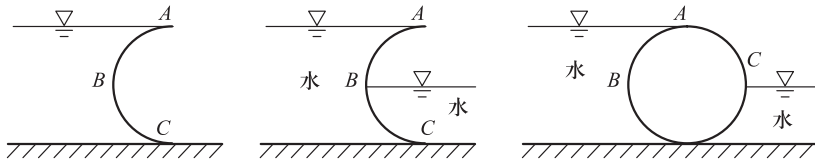
3-14 如题图所示的矩形自动闸门,若要求对给定的上下游水深闸门自动开启,试求铰链  $M$  应设的位置  $L$ 。



题 3-14 图

3-15 与水平面成  $45^\circ$  夹角的斜置矩形平面平板闸门挡水,如题图 3-10a 所示。已知  $h_1 = 5.0 \text{ m}$ ,  $h_2 = 2.0 \text{ m}$ , 门宽  $b = 1.5 \text{ m}$ 。试求作用于平板门上的总静压力和压心位置。

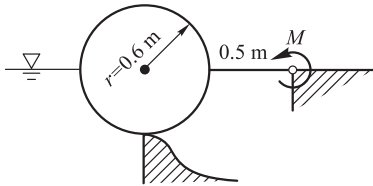
3-16 试定性绘出题图中各  $ABC$  曲面的压力体图。



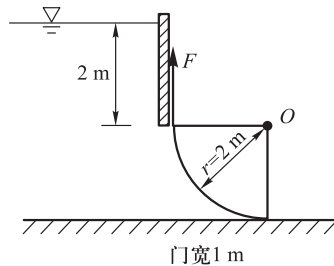
题 3-16 图

3-17 试求如题图所示圆筒闸门铰链所受的力矩  $M$ 。已知闸门长  $2 \text{ m}$ , 自重  $5\,000 \text{ N}$ 。铰的摩阻力不计。

3-18 试求作用于如题图所示的弧形闸门上:(1) 水平分力及其作用线;(2) 竖向分力及其作用线;(3) 合力及其作用方向。



题 3-17 图



题 3-18 图



3-14 习题答案