第三章　直线的投影

§3-1　直线及直线上点的投影

一、直线投影图的画法

直线的空间位置由线上任意两点决定。画直线的投影图时，根据"直线的投影一般还是直线"的性质，在直线上任取两点，画出它们的投影图后，再将各组同面投影连线即成。例如图3-1中已知$A(a,a',a'')B(b,b',b'')$，连接ab、$a'b'$、$a''b''$，即得AB的投影图。

如以点A为基准，比较A、B两点的各组坐标值的大小，即可判断直线的空间位置：AB向右上后方倾斜。

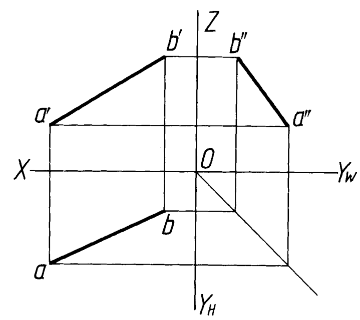


图3-1　直线的投影图

二、一般位置直线的投影特性

直线和投影面斜交时，直线和它在投影面上的投影所成的锐角，叫做直线对投影面的倾角。规定：以α、β、γ分别表示直线对H、V、W面的倾角，如图3-2所示。

对三个投影面都倾斜的直线为一般位置直线，如图3-2所示的AB。AB对H面的倾角为α，故水平投影长$ab=AB\cos\alpha$。同理，$a'b'=AB\cos\beta$，$a''b''=AB\cos\gamma$。因α、β、γ在0°与90°之间，所以线段的三个投影都小于空间线段的长度。因此，一般位置线段的投影特性是：三个投影都缩短，且都斜交于相应的投影轴。

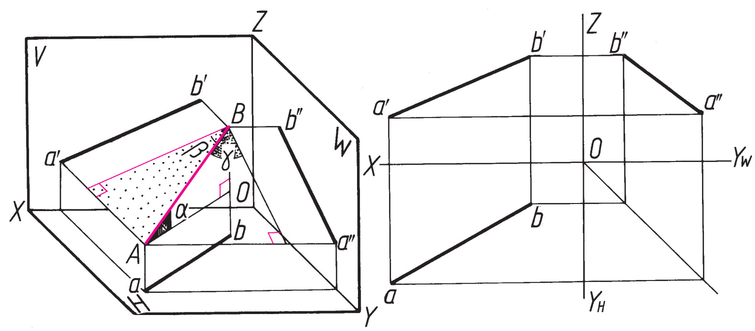


图3-2　直线对投影面的倾角和一般位置直线的投影特性

三、直线上点的投影特性

当点在直线上时，点的各个投影必在直线的同面投影上，并且符合点的投影特性。例如图 3-3中的点 C 在 AB 上，c、c'、c''分别在 ab、$a'b'$、$a''b''$上，且 $cc' \perp OX$，$c'c'' \perp OZ$，$cc_X = c''c_Z$；还满足 $ac : cb = a'c' : c'b' = a''c'' : c''b'' = AC : CB$ 的关系。

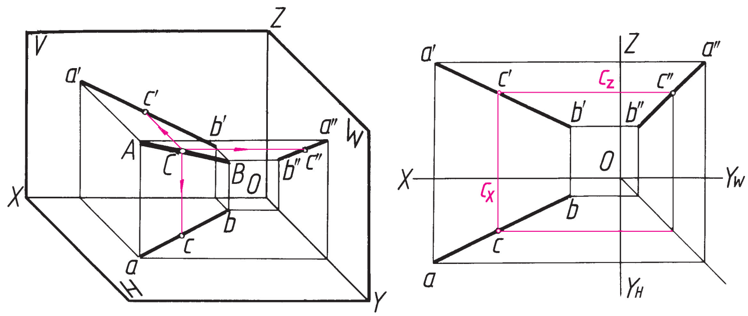


图 3-3 点在直线上的投影特性：$ac : cb = a'c' : c'b' = a''c'' : c''b'' = AC : CB$

利用上述性质，可以在直线上求点和分割线段成定比。

例 1 已知点 C 在 AB 上，据 c 求 c'、c''（图 3-4）。

分析 C 在 AB 上时，c'在 $a'b'$上，c''在 $a''b''$上，且 $cc' \perp OX$，$c'c'' \perp OZ$。

作图 如图 3-4 所示。

例 2 求点 C 使 $AC : CB = 1 : 4$（图 3-5）。

分析 如 $AC : CB = 1 : 4$，则 $ac : cb = a'c' : c'b' = 1 : 4$。只要将 ab、$a'b'$分成（1+4）等份后，距 a 或 a'取一份即可求出 c、c'。

作图

（1）自 a（或 a'）任作直线 aB_0。

（2）在 aB_0 上以适当长度取 5 等份，得 *1*、*2*、…、*5* 诸点。

（3）连 $b5$，自 *1* 作 $1c /\!/ b5$。

（4）据 c 求出 c'。c、c'即所求。

例 3 判断点 D 是否在直线 AB 上（图 3-6）。

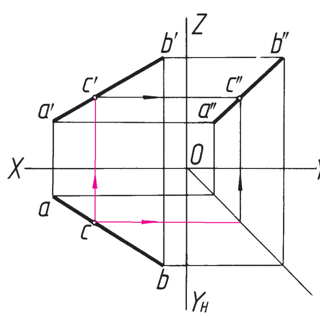


图 3-4 已知 C 在 AB 上，据 c 求 c'、c''

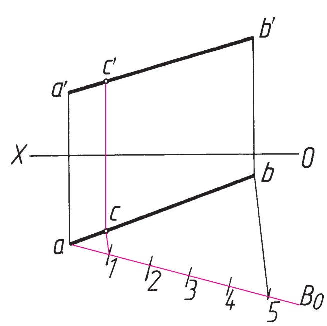


图 3-5 求点 C，使 $AC : CB = 1 : 4$

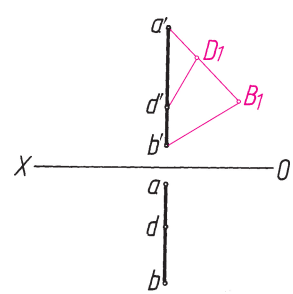


图 3-6 用分线段成比例判断点是否在直线上

分析 如点 D 在直线 AB 上,则 $ad:db=a'd':d'b'$ 成立。否则,点 D 就不在 AB 上。

作图 如图 3-6 所示,图中 $a'B_1=ab$,$a'D_1=ad$。因 $b'B_1$ 不平行于 $d'D_1$,即表明点 D 不在 AB 上。

四、直线的迹点

直线和投影面的交点称为迹点。直线和水平投影面的交点称为水平迹点,和正立投影面的交点称为正面迹点,和侧立投影面的交点称为侧面迹点。

在两投影面系中的直线,最多只有两个迹点。例如图 3-7 中的直线 AB 就只有水平迹点 M 和正面迹点 N。迹点是直线和投影面共有点,它的投影应当同时具有直线上的点和投影面内的点的投影特性。据此,即可作图。例如求 $M(m,m')$ 时,由于 M 在 H 面内,m 必与 M 重合;$z_M=0$,m' 必在 X 轴上,但 M 又在 AB 上,m' 必在 $a'b'$ 或其延长线上,m 必在 ab 或其延长线上。同理,n' 表达 N 的位置,且 $y_N=0$,n 必是 X 轴与 ab 或其延长线的交点。据此,迹点 M 或 N 投影图的求法是:

(1) 将 $a'b'$ 或 ab 延长,与 X 轴交于 m' 或 n;

(2) 在 ab 或 $a'b'$ 上求出 m 或 n'。

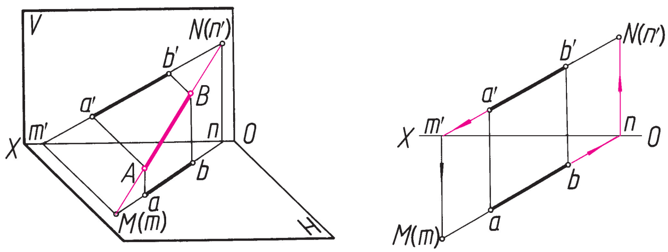


图 3-7 直线的迹点及其作图方法

§3-2 特殊位置直线的投影

与某一投影面平行或垂直的直线,统称为特殊位置直线。只与一个投影面平行的直线,称为投影面平行线;而垂直于某一投影面的直线,称为投影面垂直线。下面分别介绍它们的投影特性。

一、投影面平行线

投影面平行线是指平行于一个投影面而与另外两个投影面倾斜的直线。它有三种:水平线($/\!/H$ 面)、正平线($/\!/V$ 面)和侧平线($/\!/W$ 面)。

图 3-8 表示正平线的投影特性。由于 $AB/\!/V$ 面,$\beta=0°$,$a'b'=AB\cos0°=AB$,即正面投影表达实长;$y_A=y_B$,则 $ab/\!/OX$,$a''b''/\!/OZ$,即水平投影和侧面投影平行于相应的投影轴;$a'b'$ 与 OX 和 OZ 轴的夹角 α、γ 即 AB 对 H、W 面的倾角。

三种投影面平行线的投影特性,列于表 3-1 中。

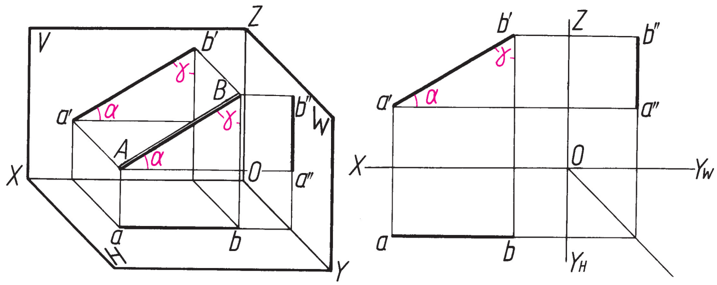
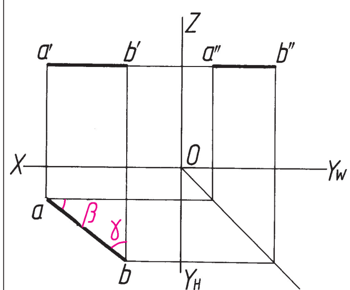
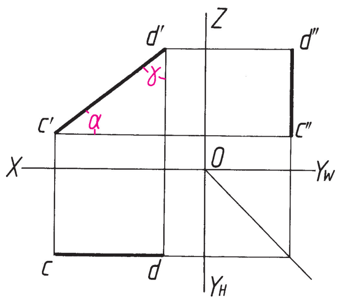
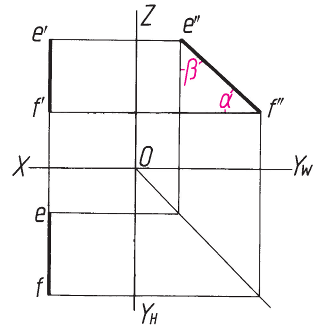


图 3-8　正平线的投影特性

表 3-1　投影面平行线的投影特性

名称	水平线（//H 面，对 V、W 面倾斜）	正平线（//V 面，对 H、W 面倾斜）	侧平线（//W 面，对 H、V 面倾斜）
投影面			
投影特性	1. 水平投影 $ab=AB$ 2. 正面投影 $a'b'//OX$ 侧面投影 $a''b''//OY_W$ 3. ab 与 OX 和 OY_H 的夹角 β、γ 等于 AB 对 V、W 面的倾角	1. 正面投影 $c'd'=CD$ 2. 水平投影 $cd//OX$ 侧面投影 $c''d''//OZ$ 3. $c'd'$ 与 OX 和 OZ 的夹角 α、γ 等于 CD 对 H、W 面的倾角	1. 侧面投影 $e''f''=EF$ 2. 水平投影 $ef//OY_H$ 正面投影 $e'f'//OZ$ 3. $e''f''$ 与 OY_W 和 OZ 的夹角 α、β 等于 EF 对 H、V 面的倾角
	小结：1. 线段在所平行的投影面上的投影反映实长 2. 其他投影平行于相应的投影轴 3. 表达实长的投影与投影轴所夹的角度等于空间直线对相应投影面的倾角		

二、投影面垂直线

垂直于一个投影面的直线必定与另外两个投影面平行。它有铅垂线（$\perp H$ 面）、正垂线（$\perp V$ 面）和侧垂线（$\perp W$ 面）等三种。图 3-9 表示铅垂线的投影特性。

因直线 $AB\perp H$ 面，$x_A=x_B$，$y_A=y_B$，ab 成为一点，有积聚性。显然，直线 AB 上任何点的水平投影，都在 $a(b)$ 点处。$a'b'=AB=a''b''$，且 $a'b'\perp OX$，$a''b''\perp OY_W$。投影面垂直线的投影特性列于表 3-2中。

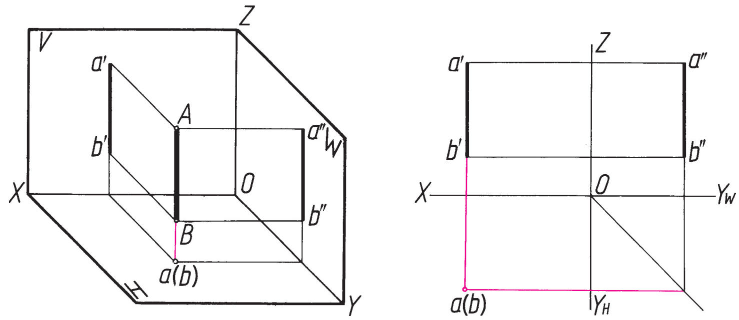
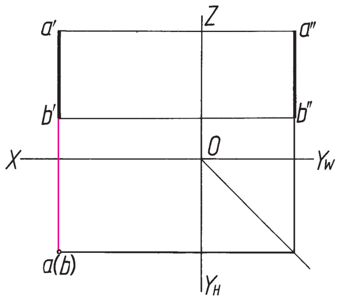
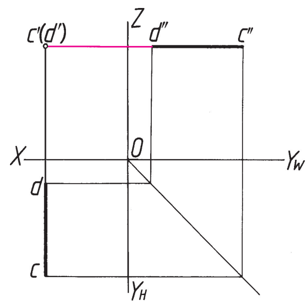
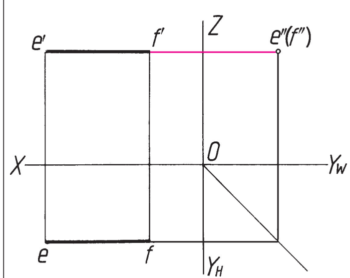


图 3-9　铅垂线的投影特性

表 3-2　投影面垂直线的投影特性

名称	铅垂线（$\perp H$ 面，$/\!/ V$ 和 W 面）	正垂线（$\perp V$ 面，$/\!/ H$ 和 W 面）	侧垂线（$\perp W$ 面，$/\!/ H$ 和 V 面）
投影面			
投影特性	1. 水平投影 $a(b)$ 积聚成一点 2. $a'b'=a''b''=AB$ $a'b'\perp OX, a''b''\perp OY_W$	1. 正面投影 $c'(d')$ 积聚成一点 2. $cd=c''d''=CD$ $cd\perp OX, c''d''\perp OZ$	1. 侧面投影 $e''(f'')$ 积聚成一点 2. $ef=e'f'=EF$ $ef\perp OY_H, e'f'\perp OZ$
	小结：1. 直线在所垂直的投影面上的投影积聚成一点 2. 其他投影表达实长，且垂直于相应的投影轴		

§ 3-3　求一般位置线段的实长

从上节可知，特殊位置线段的投影可直接表达出它的实长和倾角等度量性问题，而一般位置线段的投影并不具有这样的性质。解决这类问题的方法有多种，本书介绍广泛应用的直角三角形法、换面法和旋转法。本节介绍前面两种，旋转法在第十六章介绍。

一、直角三角形法

图 3-10 中的 AB 为一般位置线段，ab、$a'b'$都小于 AB 实长。过点 A 作 $AB_0/\!/ab$，交 Bb 于 B_0。此时，$\triangle ABB_0$ 为直角三角形，两直角边 $AB_0=ab$，$BB_0=z_B-z_A$，即 BB_0 等于 a'、b'到 X 轴的距离差；$\angle BAB_0=\alpha$，即 AB 对 H 面的倾角；AB 为直角三角形的斜边。可见，已知线段的两面投影，就相当

于给出了直角三角形的两直角边。这个直角三角形便可作出。作法是(图 3-10b):

(1) 过 b 作 $B_0b \perp ab$,且令 $B_0b = z_B - z_A$;

(2) 连 aB_0,则 $aB_0 = AB$, $\angle B_0ab = \alpha$。

图 3-10c 表示在同样条件下用正面投影 z 坐标差的作图方法。

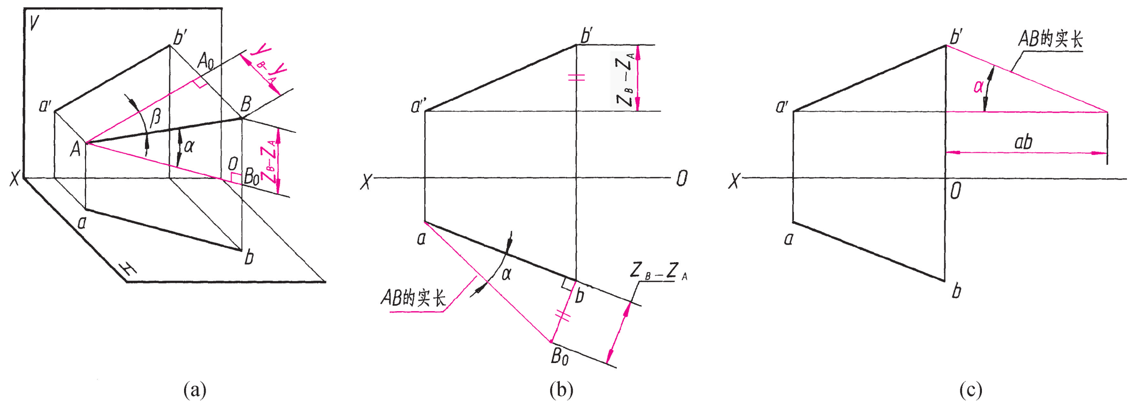


图 3-10 直角三角形法求线段实长的作图方法

例 1 求线段 CD 的实长及 β 角(图 3-11)。

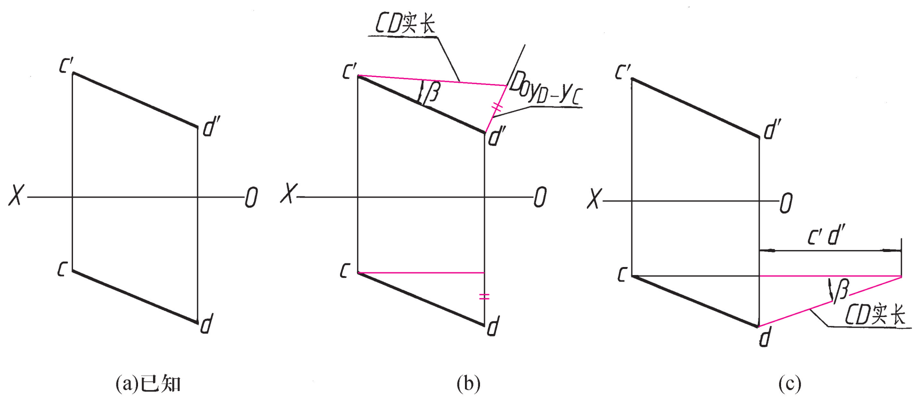


图 3-11 求线段实长及 β 角的作图

分析 从图 3-10a 可知,空间线段与它的正面投影的夹角即为 β,而一直角边则为两端点的 y 坐标差。据此,即可作出此直角三角形。

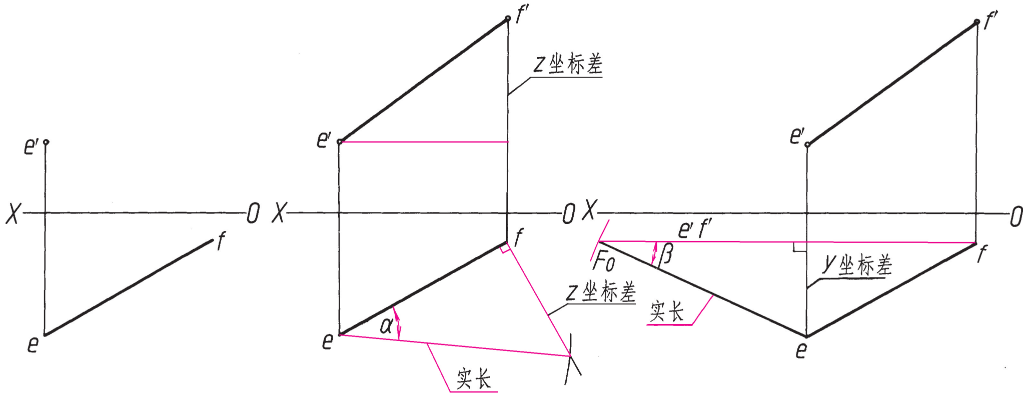
求线段 CD 的实长及 β 角的具体求法,见图 3-11b、c。

例 2 已知 $EF=30$,试完成图 3-12 中的 $e'f'$。

分析 本例是确定 f' 的问题,也就是根据已知条件确定空间线段的位置。利用图 3-12a 的已知条件,如能求得 E、F 两点的 z 坐标差,或 $e'f'$ 的长度,则 f' 的位置即定。

图 3-12b 是据 ef 和实长作直角三角形求 z 坐标差;而图 c 则是据实长和 y 坐标差求 $e'f'$。具体作法如图 3-12 所示。

从本例的解题可知,直角三角形法不仅可以用于求一般位置线段的实长及其对投影面的倾

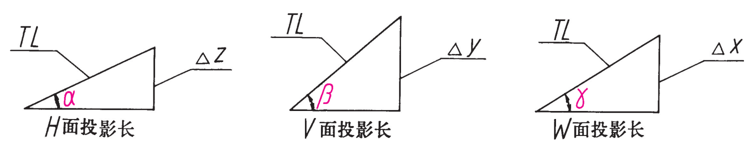


(a) 已知　　(b) 解法一：求z坐标差　　(c) 解法二：求$e'f'$长

图 3-12　用直角三角形法求 $e'f'$

角，也可用来解决线段的空间定位问题。如将本例的已知实长改为α角或β角，则已知条件成为一锐角和一直角边，可求出 $e'f'$，如图 3-12b、c 所示。表 3-3 列出了直角三角形法中的已知条件及其可以解决的问题，供解题时参考。

表 3-3　线段的投影、实长、倾角和直角三角形

已知(以含α的直角三角形为例)		可　　求	
水平投影	z 坐标差	线段实长	α
水平投影	线段实长	z 坐标差	α
水平投影	α	z 坐标差	线段实长
α	z 坐标差	水平投影	线段实长
α	线段实长	水平投影	z 坐标差
线段实长	z 坐标差	水平投影	α
右图是直角三角形法的四个要素关系的示意图。 已知两个要素时，即可作出直角三角形，而求出另外两个要素	TL 表示线段实长，H 面投影长表示水平投影长，其他类推；Δz、Δy、Δx 表示坐标差		

注：$\alpha+\beta\leqslant90°$。

二、换面法

在前面介绍的三投影面系中，已知点的两个投影，可求出它的第三个投影。换面法的作图原理与方法，和求第三投影是极其相似的。

在图 3-13 中，AB 为 V/H 面系中的一般位置直线段。ab、$a'b'$ 均不能反映实长。此时，如另设一个 V_1 面，使 $V_1 /\!/ AB$ 且 $\perp H$，则 AB 在 V_1/H 面系中为 V_1 面的平行线，其投影 $a_1'b_1'$ 反映 AB 的实长。这种用增设新投影面求新投影，从而取代原投影的方法叫做换面法。下面研究新投影面的条件及新投影与原投影之间的关系。

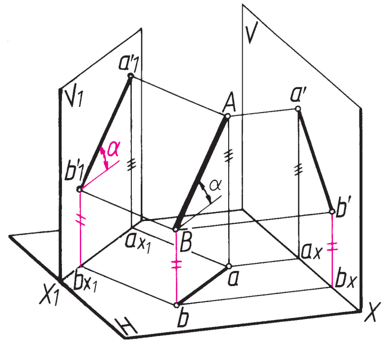
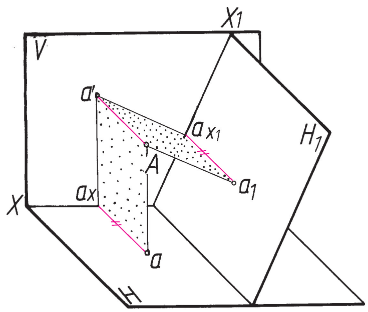


图 3-13　换面法的概念

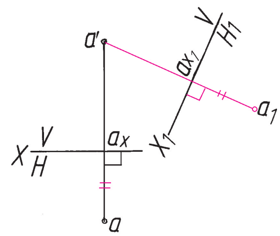
1. 一次换面

为了保持点在两投影面系中的投影特性，新设的投影面必须垂直于两投影面（V 或 H）之一。新投影面取代 H 面时，记为 H_1，且使 $H_1 \perp V$；H_1 与 V 面的交线记为 X_1；点 A 在 H_1 面上的投影记为 a_1（图 3-14a）。当新投影面取代 V 面时，记为 V_1，且使 $V_1 \perp H$；V_1 与 H 面的交线也记为 X_1；点 A 在 V_1 面上的投影记为 a_1'（图 3-15）。

从图 3-14a 可知：$aa_X = a_1a_{X_1}$，即不论点投射到 H 面上还是 H_1 面上，它的 y 坐标值不变。当 H_1 面绕 X_1 轴旋转到与 V 面重合时，$a'a_1 \perp X_1$ 轴，投影图见图 3-14b。具体作法是：



(a)



(b)

图 3-14　更换 H 面时点的投影作图方法

（1）在适当的地方画出 X_1 轴；

（2）过 a' 作 X_1 轴的垂线交 X_1 轴于 a_{X_1} 点，取 $a_1a_{X_1} = aa_X$，则 a_1 即为所求。

反之，如已知 a_1、a'，也可求出 a。

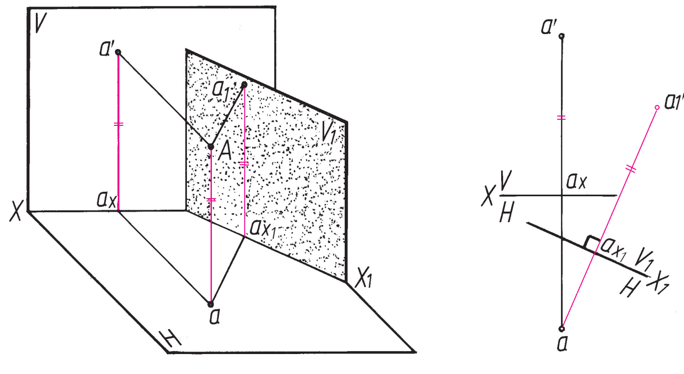
图 3-15a 表示更换 V 面时的投影情形。a' 和 a_1' 的 z 坐标值不变，故有 $a'a_X = a_1'a_{X_1}$。当 V_1 面绕 X_1 轴旋转到与 H 面重合时，$aa_1' \perp X_1$ 轴。投影图的画法如图 3-15b 所示。

2. 二次换面

某些问题要通过两次换面才能解决，是在第一次换面的基础上再作第二次换面。例如在图 3-16中的 V_1 面上，又作 $H_1 \perp V_1$ 而成 V_1/H_1 系，新轴为 X_2，点在 H_1 上的投影仍为 a_1。当使 H_1 绕 X_2 轴旋转到与 V_1 重合后，点 A 在 H、V_1、H_1 三个投影面上的投影必有 $a_1'a_1 \perp X_2$ 轴，$a_1a_{X_2} = aa_{X_1}$。可见，二次换面时点的投影作图与一次换面完全相同。作图时只要注意原系为 V_1/H 面系，而新系是 V_1/H_1 面系即可。

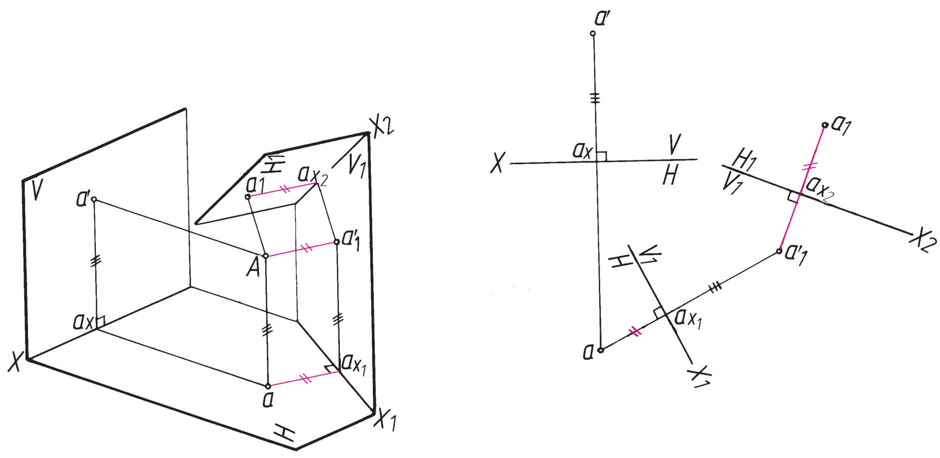
3. 如何选用新投影面

当用换面法求解线段的有关问题时，要注意：



(a) (b)

图 3-15 更换 *V* 面时点的投影作图方法



(a) (b)

图 3-16 点的二次换面的作图方法

1）要更换哪个投影面或需几次换面？

2）新设投影面与直线应处于何种相对位置关系？

下面举例说明。

例 1 求线段 *AB* 的实长及 α(图 3-17)。

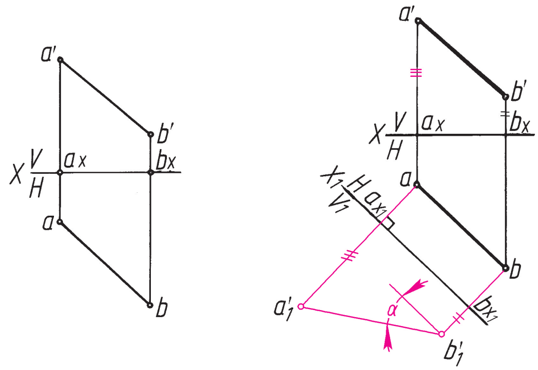
分析 如只求一般位置线段的实长，只要使它成为新设投影面的平行线即可，所以更换 H_1 面或 V_1 面均可。但要确定 α，则必须保持直线与 *H* 面的位置不变，故只能更换 *V* 面，且使 V_1 面平行于 *AB*。

作图 （图 3-17b）

（1）在适当地方作 $X_1 /\!/ ab$。

（2）分别过 *a*、*b* 作 X_1 的垂线，并取 $a_1'a_{X_1}=a'a_X$，$b_1'b_{X_1}=b'b_X$。

（3）连 $a_1'b_1'$，$a_1'b_1'=AB$；$a_1'b_1'$ 与 X_1 轴的夹角即 α。



(a) 条件　　(b) 求解

图 3-17　更换 V 面求实长及 α

例 2　把直线 $AB(/\!/V)$ 变换为投影面垂直线(图 3-18)。

分析　由于 $AB/\!/V$，所设的 H_1 面可以既垂直于 AB 又垂直于 V 面。通过一次换面便可使 $AB\perp H_1$。具体作法见图 3-18。

例 3　把一般位置直线 AB 变换为投影面垂直线(图 3-19)。

分析　从图 3-17、图 3-18 可知，一次换面只能把一般位置直线变换为投影面平行线，或把投影面平行线变换为投影面垂直线。因此，要解决本题，须连续变换两次。作图方法见图 3-19。

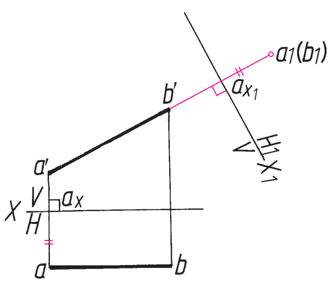


图 3-18　用一次换面将投影面平行线变换为投影面垂直线

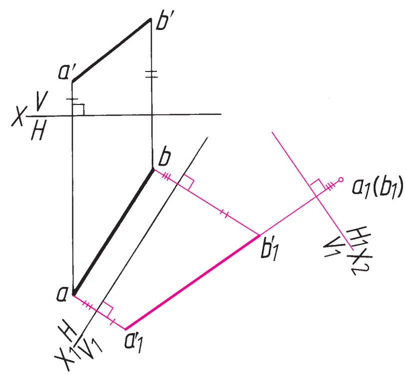


图 3-19　用两次换面把一般位置直线变换为投影面垂直线

§ 3-4　两直线的相对位置

空间两直线的相对位置包括平行、相交和交叉等三种情况。下面分别介绍。

一、两直线平行

根据"空间平行的两直线，它们的投影仍相互平行"的性质，便知它们的各组同面投影必相互平行。例如图 3-20 中因直线 $AB/\!/CD$，则 $ab/\!/cd$，$a'b'/\!/c'd'$。利用这一特性，可解决有关两直

线平行的作图问题。

例　过点 $E(e、e')$ 作直线 $EF \parallel AB$（图 3-21）。

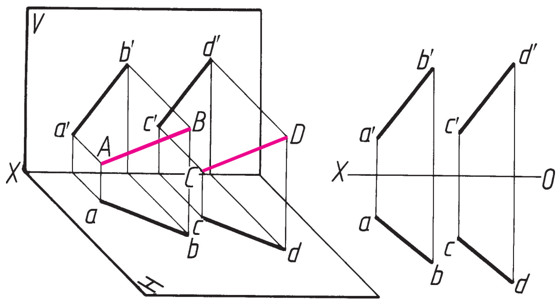


图 3-20　平行两直线的投影特性

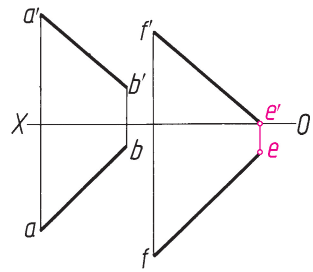


图 3-21　过 *E* 作 *EF*∥*AB*

作图　过 e 作 $ef \parallel ab$，过 e' 作 $e'f' \parallel a'b'$。ef、$e'f'$ 即为所求。

二、两直线相交

空间相交的两直线必有一交点，它的投影应符合直线上的点的投影特性。例如图 3-22 中的直线 AB、CD 交于 K，则水平投影 k 应在 ab 上，又在 cd 上。同样，k' 必在 $a'b'$ 上，又在 $c'd'$ 上。即各组同面投影应相交，ab、cd 交于 k，$a'b'$、$c'd'$ 交于 k'；且 $kk' \perp X$ 轴。利用这一特性，可解决有关相交直线的作图问题。

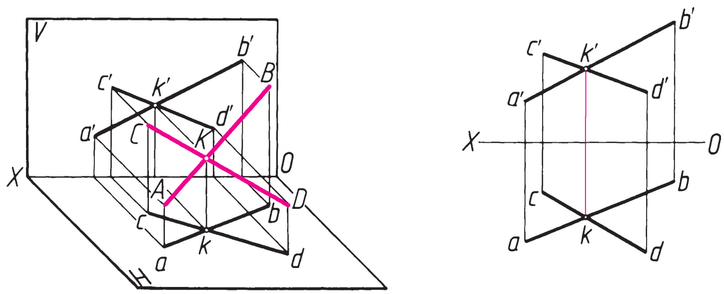


图 3-22　相交直线的投影特性

三、两直线交叉

既不平行也不相交的空间两直线，叫做交叉（异面）直线。图 3-23 所示的两交叉直线，它们的水平投影相交而正面投影平行。也有的两交叉直线的各组同面投影相交，但因不是相交直线，交点的连线不会垂直于投影轴。这种交点实际上是重影点的投影，用它可以判别可见性。例如图 3-23 中 ab、cd 的交点是对 H 面的重影点 Ⅰ、Ⅱ 的水平投影，Ⅰ 在直线 AB 上，Ⅱ 在直线 CD 上。从正面投影可以看出：$z_{\mathrm{I}} > z_{\mathrm{II}}$，故点 Ⅰ 的水平投影 *1* 可见而点 Ⅱ 的水平投影（*2*）不可见。

例　判断图 3-24a、b 中两直线的相对位置。

解　图 3-24a 中的直线 AB 为侧平线，EF 为水平线，它们在空间可能相交，也可能交叉。在水平投影上，用分割线段成比例的作图方法检查。因同面投影符合线上点的投影特性，故直线

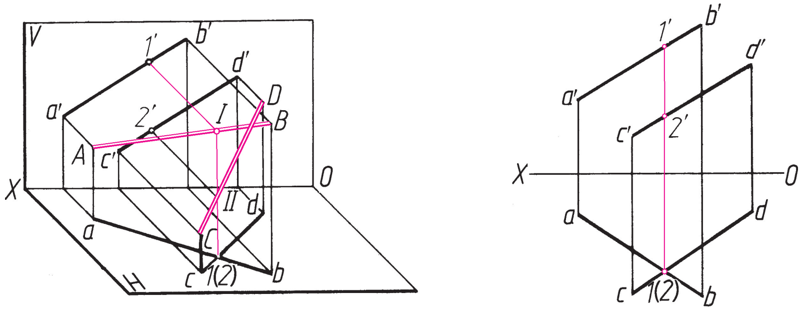
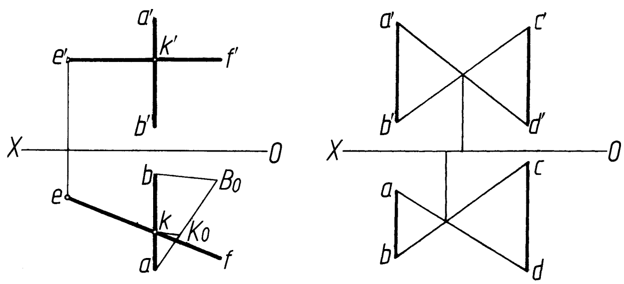


图 3-23　交叉两直线的投影特性

AB、CD 为相交两直线。



(a)相交　　(b)交叉

图 3-24　判断两直线的相对位置

图 3-24b 所示两侧平线有可能相互平行,也有可能是交叉的。判别方法有两种:一是求出两直线在所平行的投影面上的投影,即可作出判断;二是观察两直线的投影,若 a'、c'同距 X 轴最远(或最近),而 a、c 则分别距 X 轴为最远和最近,则可判定两直线交叉。若 a、c 也同距 X 轴为最远(或最近),则两直线可能平行。若 $AB /\!/ CD$,则 AD、BC 应是 $ABCD$ 平面内两相交直线。否则 AB、CD 交叉。具体作法如图 3-24b 所示,结果,直线 AB、CD 是交叉两直线。也可以用平行两线段投影比应相等的方法来判断。

§ 3-5　直角的投影

角度的投影一般不等于原角。

在直角的投影中,除了直角的两直角边平行某一投影面,它在该面的投影仍为直角外,只要有一直角边平行于某一投影面,则它在该面的投影还是直角。这是在投影图上解决有关垂直问题以及求距离问题常用的作图依据。

在图 3-25 中,设 $AB \perp BC$,$BC /\!/ H$。据初等几何定理"在平面内一条直线 BC,如果和这个平面的一条斜线 AB 垂直,那么它也和斜线的正投影 ab 垂直",即可得出 $BC \perp ab$。因 $bc /\!/ BC$,故 $bc \perp ab$。两直线交叉垂直时,它们的投影仍符合上述投影特性。

例 1　已知 $AB /\!/ V$,试过点 E 作一直线与 AB 垂直相交(图 3-26)。

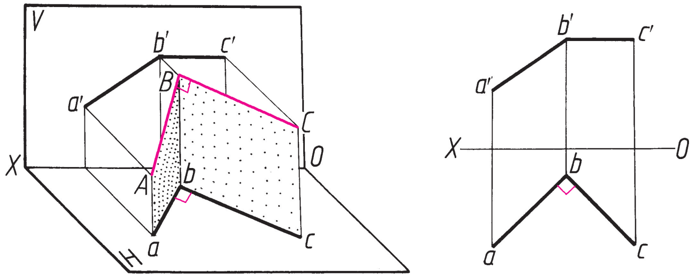
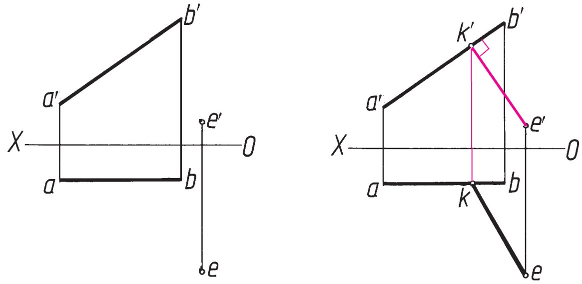


图 3-25　直角的投影特性



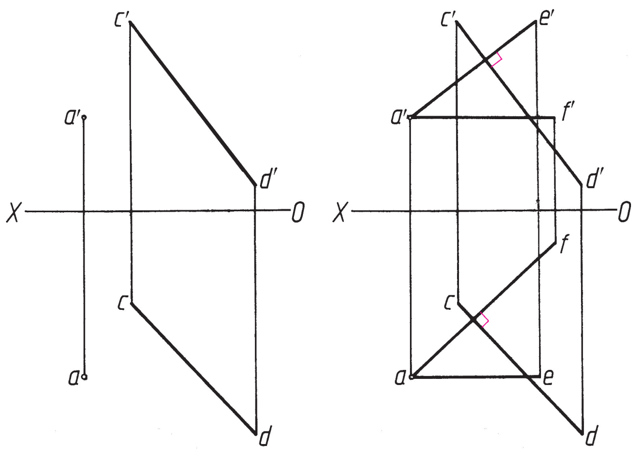
(a)　　(b)

图 3-26　过点 E 作 $EK \perp AB$

分析　从直角的投影特性得知，与正平线垂直的直线，其正面投影必垂直，据此即可作图。

作图　过 e' 作 $e'k' \perp a'b'$，使与 $a'b'$ 交于 k'；在 ab 上求出 k 后连 ek，则 ek、$e'k'$ 即所求。

例 2　过点 A 作直线垂直 CD（图 3-27）。



(a)　　(b)

图 3-27　过点 A 作与 CD 垂直的直线

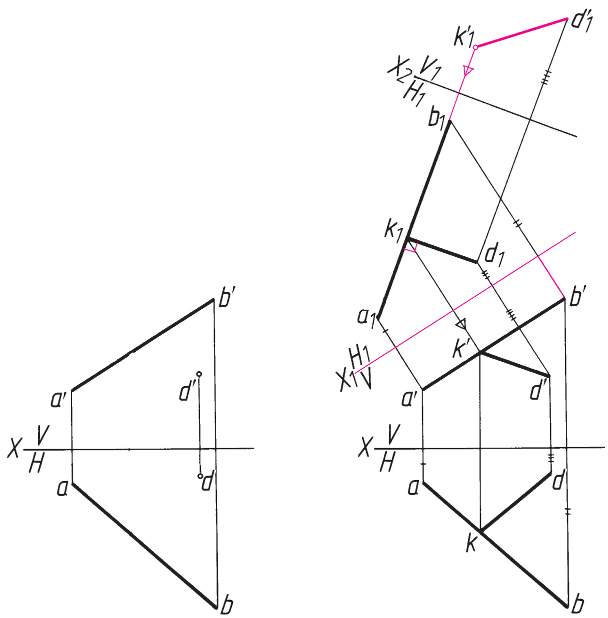
分析　CD 为一般位置直线。过点 A 所作 CD 的垂线有无数条。而直接能在投影面上反映直角的，只有投影面平行线。因此，可作出与 CD 交叉垂直的水平线和正平线。

作图

(1) 过 a 作 $ae /\!/ X$ 轴,过 a' 作 $a'e' \perp c'd'$。ae、$a'e'$为一解。

(2) 过 a' 作 $a'f' /\!/ X$ 轴,过 a 作 $af \perp cd$,af、$a'f'$又为一解。

讨论 与 CD 垂直的水平线 AF 和正平线 AE,一般不与 CD 相交而呈交叉状态。其实所作相交两直线 AE、AF 即确定了一个与 CD 垂直的平面。在此平面内过点 A 的直线都和 CD 垂直。图 3-28是利用换面法求点 D 与 AB 垂直相交的解,并且还用二次换面求出了点 D 到 AB 的距离。这也是求点到直线距离的一种解法。



(a) (b)

图 3-28 求点到一般位置直线距离的作图

复习思考题

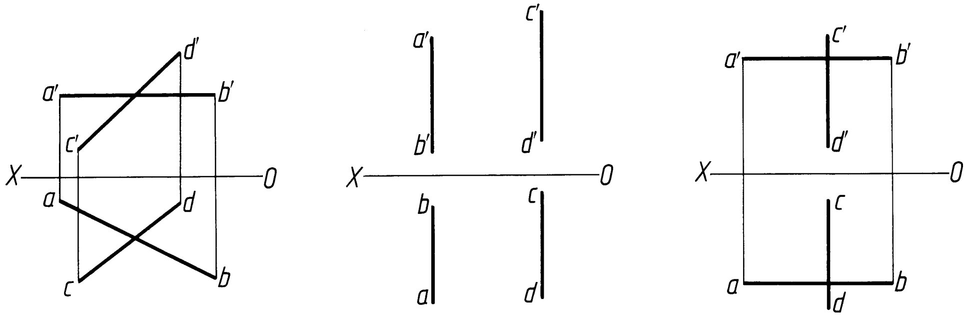
1. 试述点在直线上的投影特性。为什么已知直线上点的一个投影,可以求出其余投影?

2. 特殊位置直线有几种?其投影特性如何?

3. 求一般位置线段实长和倾角有哪些方法?试述求 β、γ 时的作图要点。

4. 试述换面法的作图原理与方法,并比较“已知点的水平和正面投影时,求 W 面投影的作法”与换面法的异同。

5. 试判断下列两直线的相对位置(不用侧面投影)。



6. 怎样判断交叉两直线重影点的可见性？

7. 试述直角的投影特性。

8. 过点 E 作 EF 与 AB 垂直相交。