数学和中国文学的比较

丘成桐

丘成桐，当代数学大师，现任哈佛大学讲座教授，1971 年师从陈省身先生在加州大学伯克利分校获得博士学位。发展了强有力的偏微分方程技巧，使得微分几何学产生了深刻的变革。解决了卡拉比 (Calabi) 猜想、正质量猜想等众多难题，影响遍及理论物理和几乎所有核心数学分支。年仅 33 岁就获得代表数学界最高荣誉的菲尔兹奖 (1982)，此后获得 MacArthur 天才奖 (1985)、瑞典皇家科学院 Crafoord 奖 (1994)、美国国家科学奖 (1997)、沃尔夫奖 (2010) 等众多大奖。现为美国科学院院士、中国科学院和俄罗斯科学院的外籍院士。筹资成立浙江大学数学科学研究中心、香港中文大学数学研究所、北京晨兴数学中心和清华大学数学科学中心四大学术机构，担任主任，不取报酬。培养的 60 余位博士中多数是中国人，其中许多已经成为国际上杰出的数学家。由于对中国数学发展的突出贡献，获得 2003 年度中华人民共和国科学技术合作奖。

很多人会觉得我今日的讲题有些奇怪，中国文学与数学好像是风马牛不相及，但我却讨论它。其实这关乎个人的感受和爱好，不见得其他数学家有同样的感觉，“如人饮水，冷暖自知”。每个人的成长和风格跟他的文化背景、家庭教育有莫大的关系。我幼受庭训，影响我至深的是中国文学，而我最大的兴趣是数学，所以将它们做一个比较，对我来说是相当有意义的事。

中国古代文学记载最早的是诗三百篇，有风、雅、颂，既有民间抒情之歌，朝廷礼仪之作，也有歌颂或讽刺当政者之曲。至孔子时，文学为君子立德和陶冶民风而服务。战国时，诸子百家都有著述，在文学上有重要的贡献，但是诸子如韩非却轻视文学之士。屈原开千古辞赋之先河，毕生之志却在楚国的复兴。文学本身在古代社会没有占据到重要的地位。司马迁甚至说：“文史、星历，近乎卜祝之间，固主上所戏弄，倡优畜之，流俗之所轻也。”一直

到曹丕才全面肯定文学本身的重要性：“盖文章，经国之大业，不朽之盛事。”即使如此，曹丕的弟弟曹植却不以为文学能与治国的重要性相比。他写信给他的朋友杨修说：

> 吾虽德薄，位为蕃侯，犹庶几戮力上国，流惠下民，建永世之业，留金石之功。岂徒以翰墨为勋绩，辞赋为君子哉。

至于数学，中国儒家将它放在六艺之末，是一个辅助性的学问。当政者更视之为雕虫小技，与文学比较，连歌颂朝廷的能力都没有，政府对数学的尊重要到近年来才有极大的改进。西方则不然，希腊哲人以数学为万学之基。柏拉图以通几何为入其门槛之先决条件，所以数学家占有崇高地位，数学在西方蓬勃发展了两千多年。

数学之基本意义

数学之为学，有其独特之处。它本身是寻求自然界真相的一门科学，但数学家也如文学家般天马行空，凭爱好而创作，故此数学可谓是人文科学和自然科学的桥梁。

数学家研究大自然所提供的一切素材，寻找它们共同的规律，并用数学的方法表达出来。这里所说的大自然比一般人所了解的来得广泛。我们认为数字、几何图形和各种有意义的规律都是自然界的一部分。我们希望用简洁的数学语言将这些自然现象的本质表现出来。

数学是一门公理化的科学，所有命题必须由三断论证的逻辑方法推导出来，但这只是数学的形式，而不是数学的精髓。大部分数学著作枯燥乏味，而有些却令人叹为观止，其中的区别在哪里呢？

大略言之，数学家以其对大自然感受的深刻程度，来决定研究的方向。这种感受既有其客观性，也有其主观性，后者则取决于个人的气质。气质与文化修养有关，无论是选择悬而未决的难题，或者创造新的方向，文化修养皆起着关键性的作用。文化修养是以数学的功夫为基础，自然科学为辅，但是深厚的人文知识也极为要紧。因为人文知识也致力于描述心灵对大自然的感受，所以司马迁写史记除了“通古今之变”外，也要“究天人之际”。

刘勰在《文心雕龙 · 原道篇》说文章之道在于：

> 写天地之辉光，晓生民之耳目。

刘勰以为文章之可贵，在尚自然，在贵文采。他又说：

刘勰

司马迁

> 人与天地相参，乃性灵所集聚，是以谓之三才，为五行之秀气，实天地之灵气。灵心既生，于是语言以立。语言既立，于是文章着明，此亦原于自然之道也。

《文心雕龙 · 风骨篇》：

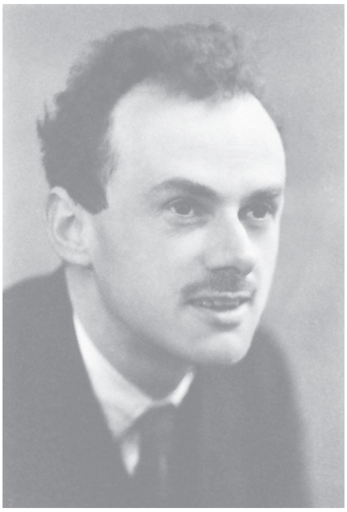
> 诗总六义，风冠其首，斯乃化感之本源，志气之符契也。

历代的大数学家如阿基米德、牛顿，莫不以自然为宗，见物象而思数学之所出，即有微积分的创作。费马和欧拉对变分法的开创性发明也是由于探索自然界的现象而引起的。

近代几何学的创始人高斯认为几何和物理不可分。他说："我越来越确信几何的必然性无法被验证，至少现在无法被人类或为了人类而验证，我们或许能在未来领悟到那无法知晓的空间的本质。我们无法把几何和纯粹是先验的算术归为一类，几何和力学却不可分割。"

20 世纪几何学的发展，则因物理学上重要的突破而屡次改变其航道。当狄拉克把狭义相对论用到量子化的电子运动理论时，发现了狄拉克方程，以后的发展连狄拉克本人也叹为观止，认为他的方程比他的想象来得美妙，这个方程在近代几何的发展中起着关键性的作用。我们对旋子的描述缺乏直观的几何感觉，但它出于自然，自然界赋予几何的威力可说是无微不至的。

广义相对论提出了场方程，它的几何结构成为几何学家梦寐以求的对象，因为它能赋予空间一个调和而完美的结构。我研究这种几何结构垂三十年，时而迷惘，时而兴奋，自觉同《诗经》、《楚辞》的作者，或晋朝的陶渊明一样，与大自然浑为一体，自得其趣。



狄拉克

陶渊明

捕捉大自然的真和美，实远胜于一切人为的造作，正如《文心雕龙》说的：

> 云霞雕色，有踰画工之妙。草木菁华，无待锦匠之奇，夫岂外饰，盖自然耳。

在空间上是否存在满足引力场方程的几何结构是一个极为重要的物理问题，它也逐渐地变成几何中伟大的问题。尽管其他几何学家都不相信它存在，我却锲而不舍，不分昼夜地去研究它，就如屈原所说：

> 亦余心之所善兮，虽九死其犹未悔。

我花了五年工夫，终于找到了具有超对称的引力场结构，并将它创造成数学上的重要工具。当时的心境，可以用以下两句来描述：

> 落花人独立，微雨燕双飞。

以后大批的弦理论学家参与这个结构的研究，得出很多深入的结果。刚开始时，我的朋友们都对这类问题敬而远之，不愿意与物理学家打交道。但我深信造化不致弄人，回顾十多年来在这方面的研究尚算满意，现在卡拉比–丘空间的理论已经成为数学的一支主流。

数学的文采

数学的文采，表现于简洁，寥寥数语，便能道出不同现象的法则，甚至在自然界中发挥作用，这就是数学优雅美丽的地方。我的老师陈省身先生创

作的陈氏类，就文采斐然，令人赞叹。它在扭曲的空间中找到简洁的不变量，在现象界中成为物理学界求量子化的主要工具，可谓是描述大自然美丽的诗篇，直如陶渊明“采菊东篱下，悠然见南山”的意境。

从欧氏几何的公理化，到笛卡儿创立的解析几何，到牛顿、莱布尼茨的微积分，到高斯、黎曼创立的内蕴几何，一直到与物理学水乳相融的近代几何，都以简洁而富于变化为宗，其文采绝不逊色于任何一个文学创作。它们轫生的时代与文艺兴起的时代相同，绝对不是巧合。

数学家在开创新的数学想法的时候，可以看到高雅的文采和崭新的风格。例如欧几里得证明存在无穷多个素数，开创反证法的先河。高斯研究十七边形的对称群，使伽罗瓦群成为数论的骨干。这些研究异军突起，论断华茂，使人想起五言诗的始祖苏李唱和诗与词的始祖李太白的《忆秦娥》。

数学中的赋比兴

中国诗词都讲究比兴，钟嵘在《诗品》中说：

> 文已尽而意有余，兴也。因物喻志，比也。

刘勰在《文心雕龙》中说：

> 故比者，附也；兴者，起也。附理者，切类以指事，起情者，依微以拟议。起情，故兴体以立，附理，故比例以生。

白居易：

> 噫！风雪花草之物《三百篇》中岂舍之乎？顾所用何如耳，设如“北风其凉”，假风以刺威虐也，“雨雪霏霏”，因雪以愍征役也……比兴发于此而义归于彼。

白居易批评谢朓诗：

> “余霞散成绮，澄江净如练。”丽则丽矣，吾不知其所讽焉，故仆所谓嘲风雪，弄花草而已，于时“六艺”尽去矣。

有深度的文学作品必须要有“义”、有“讽”、有“比兴”，数学亦如是。我们在寻求真知时，往往只能凭已有的经验，因循研究的大方向，凭我们对大自然的感觉而向前迈进。这种感觉是相当主观的，因个人的文化修养而定。

文学家为了达到最佳意境的描述，不见得忠实地描写现象界。例如贾岛只追究“僧推月下门”或是“僧敲月下门”的意境，而不在乎所说的是不同的

事实。数学家为了创造美好的理论，也不必依随大自然的规律，只要逻辑推导没有问题，就可以尽情地发挥想象力，然而文章终究有高低之分。大致来说，好的文章“比兴”的手法总会比较丰富。

中国古诗十九首，作者年代不详，但大家都认为是汉代的作品。刘勰说：“比采而推，两汉之作乎。”这是从诗的结构和风格进行推敲而得出的结论。在数学的研究过程中，我们亦利用比的方法去寻找真理。我们创造新的方向时，不必凭实验，而是凭数学的文化涵养去猜测和求证。

举例而言，三十年前我提出一个猜测，断言三维球面里的光滑极小曲面，其第一特征值等于 2。当时这些曲面例子不多，只是凭直觉，利用相关情况模拟而得出的猜测。最近有数学家写了一篇文章证明这个猜想。其实我的看法与文学上的比兴很相似。

我们看《洛神赋》：

> 翩若惊鸿，婉若游龙。荣曜秋菊，华茂春松。仿佛兮若轻云之蔽月，飘飖兮若流风之回雪。

由比喻来刻画女神的体态。再看《诗经》：

> 高山仰止，景行行止。四牡騑騑，六辔如琴，觏尔新婚，以慰我心。

也是用比的方法来描写新婚的心情。

我一方面想象三维球的极小子曲面应当是如何的匀称，一方面想象第一谱函数能够同空间的线性函数比较该有多妙，通过原点的平面将曲面最多切成两块，于是猜想这两个函数应当相等，同时第一特征值等于 2。

当时我与卡拉比教授讨论这个问题，他也相信这个猜测是对的。旁边我的一位研究生问为什么会做这样的猜测，不待我回答，卡拉比便微笑地说这就是洞察力了。

数学上常见的对比方法乃是低维空间和高维空间现象的对比。我们虽然看不到高维空间的事物，但可以看到一维或二维的现象，并由此来推测高维的变化。我在研究生时期企图将二维空间的单值化原理推广到高维空间，得到一些漂亮的猜测，认为曲率的正或负可以作为复结构的指向，这个看法影响至今。这个问题可以溯源到 19 和 20 世纪初期曲率和保角映射关系的研究。

另外一个对比的方法乃是数学不同分支的比较，记得我从前用爱氏结构证明代数几何中一个重要不等式时，日本数学家 Miyaoka 利用俄国数学家 Bogomolov 的代数稳定性理论也给出这个不等式的不同证明，因此我深信爱氏结构和流形的代数稳定有密切的关系。这三十年来的发展也的确是朝这个方向蓬勃地进行的。

事实上，爱因斯坦的广义相对论也是对比各种不同的学问而创造成功的。它是科学史上最伟大的构思之一，可以说是惊天地泣鬼神的工作。它统一了古典的引力理论和狭义相对论。爱氏花了十年工夫，基于等价原理，比较了各种描述引力场的方法，巧妙地用几何张量来表达了引力场，将时空观念全盘翻新。

爱氏所用的工具是黎曼几何，乃是黎曼比他早五十年前发展出来的。当时的几何学家唯一的工具是对比，在古典微积分、双曲几何和流形理论的模拟后得出来的漂亮理论。反过来说，广义相对论给黎曼几何注入了新的生命。

20 世纪数论的一个大突破乃是算术几何的产生，利用群表示理论为桥梁，将古典的代数几何、拓扑学和代数数论比较，有如瑰丽的歌曲，它的发展势不可挡，气势如虹，“天之所开，不可当也”。

韦伊研究代数曲线在有限域上解的问题后，得出高维代数流形有限域解的猜测，推广了代数流形的基本意义，直接影响了近代数学的发展。筹学所问，无过于此矣。伟大的数学家高瞻远瞩，看出整个学问的大流，有很多合作者和跟随者将支架建立起来，解决很多重要的问题。正如曹雪芹创作《红楼梦》时，也是一样，全书既有真实，亦有虚构。既有前人小说、戏曲如《西厢记》、《金瓶梅》、《牡丹亭》等的踪迹，亦有作者家族凋零、爱情悲剧的经验，通过各种不同人物的话语和生命历程，道出了封建社会大家族的腐败和破落。《红楼梦》的写作影响了清代小说垂二百年。

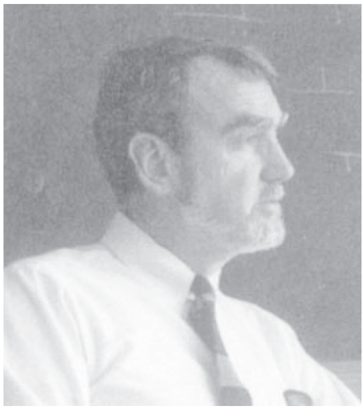
《西厢记》和《牡丹亭》的每一段写作和描述男女主角的手法都极为上乘，但是全书的结构则是一般的佳人才子写法，由《金瓶梅》进步到《红楼梦》则小处和大局俱佳。

这点与数学的发展极为相似，从局部的结构发展到大范围的结构是近代数学发展的一个过程。往往通过比兴的手法来处理，几何学和数论都有这一段历史。代数几何学家在研究奇异点时通过爆炸的手段，有如将整个世界浓缩在一点。微分几何和广义相对论所见到的奇异点比代数流形复杂，但是也希望从局部开始，逐渐了解整体结构。数论专家研究局部结构时则通过素数的模方法，将算术流形变成有限域上的几何，然后和大范围的算术几何对比，得出丰富的结果。数论学家在研究朗兰兹理论时也多从局部理论开始。

好的作品需要赋比兴并用。钟嵘在《诗品》中说：

> 直书其事，寓言写物，赋也。宏斯三义，酌而用之，干之以风力，润之以丹采，使味之者无极，闻之者动心，是诗之至也。若专用比兴，患在意深，意深则词踬。若但用赋体，患在意浮，意浮则文散。

韦伊



朗兰兹

在数学上，对非线性微分方程和流体方程的深入了解，很多时候需要靠计算器来验算。很多数学家有能力做大量的计算，却不从大处着想，没有将计算的内容与数学其他分支做比较，没有办法得到深入的看法，反过来说只讲观念比较，不做大量计算，最终也无法深入创新。

有些工作却包含赋比兴三种不同的精义。近五十年来数论上一个伟大的突破是由英国人伯奇（B. J. Birch）和斯温纳顿–戴尔（Swinnerton-Dyer）提出的一个猜测。开始时用计算器大量计算，找出 L 函数和椭圆曲线的整数解的联系，然后与数论上各个不同的分支比较接合，妙不可言，这就是赋比兴都有的传世之作。

数学家对事物看法的多面性

由于文学家对事物有不同的感受，同一事或同一物可以产生不同的吟咏。例如对杨柳的描述就有如下几种。

温庭筠：

柳丝长，春雨细 ……

吴文英：

一丝柳，一寸柔情。料峭春寒中酒 ……

李白：

年年柳色，灞陵伤别。风吹柳花满座香，吴姬压酒劝客尝。

周邦彦：

> 柳阴直，烟里丝丝弄碧。隋堤上，曾见几番，拂水飘绵送行色…… 长亭路，年去岁来，应折柔条过千尺。

晏几道：

> 舞低杨柳楼心月，歌尽桃花扇底风。

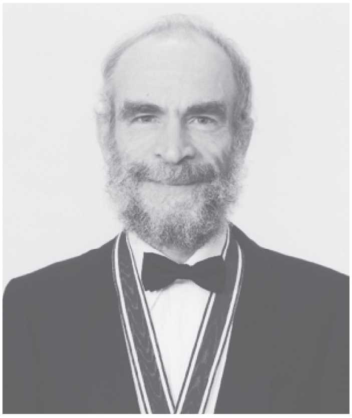
柳枝既然是柔条，又有春天时的嫩绿，因此可以代表柔情，女性体态的柔软（柳腰、柳眉都是用柳条来描写女性），又可以描写离别感情和青春的感觉。

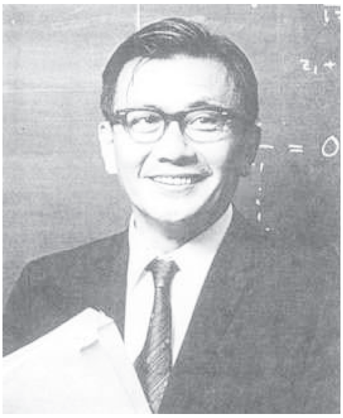
对事物有不同的感受后，往往通过比兴的方法另有所指，例如“美人”有多重意思，除了指美丽的女子外，也可以指君主，如屈原《九章》中的“结微情以陈词兮，矫以遗夫美人”，以及也可以指品德美好的人，如《诗经 · 邶风》中的“云谁之思，西方美人”，苏轼《赤壁赋》中的“望美人兮天一方”。

数学家对某些重要的定理，也会提出很多不同的证明。例如勾股定理的不同证明有十个以上，等周不等式亦有五六个证明，高斯则给出数论对偶定律六个不同的看法。不同的证明让我们以不同的角度去理解同一个事实，往往引导出数学上不同的发展。

记得三十年前我利用分析的方法来证明完备而非紧致的正曲率空间有无穷大体积后，几何学家格罗莫夫（M. Gromov）开始时不相信这个证明，以后他找出我证明方法的几何直观意义后，发展出他的几何理论。这两个不同观念都有它们的重要性。

小平邦彦有一个极为重要的贡献叫作消灭定理，是用曲率的方法来得到的，它在代数几何学上有奠基性的贡献。代数几何学家却不断地企图找寻一个纯代数的证明，希望对算术几何有比较深入的了解。


格罗莫夫


小平邦彦

对空间中的曲面，微分几何学家会问它的曲率如何，有些分析学家希望沿着曲率方向来推动它一下看看有什么变化，代数几何学家可以考虑它可否用多项式来表示，数论学家则会问上面有没有整数格点。这种种主观的感受由我们的修养来主导。

反过来说，文学家对同一事物亦有不同的歌咏，但在创作的工具上，却有比较统一的对仗韵律的讲究，可以应用到各种不同的文体。从数学的观点来说，对仗韵律是一种对称，而对称的观念在数学发展中至为紧要，是所有数学分支的共同工具。另外，数学家又喜欢用代数的方法来表达空间的结构，同调群乃是重要的例子，由拓扑学出发而应用到群论、代数、数论和微分方程学上去。

数学的意境

王国维在《人间词话》中说：

> 词以境界为最上。有境界则自成高格 …… 有造境，有写境，此理想与写实二派之所由分。然二者颇难分别，因大诗人所造之境必合乎自然，所写之境亦必邻于理想故也。有有我之境，有无我之境。“泪眼问花花不语，乱红飞过秋千去。”…… 有我之境也。“采菊东篱下，悠然见南山。”…… 无我之境也。有我之境，以我观物，故物皆着我之色彩。无我之境，以物观物，故不知何者为我，何者为物。
>
> 无我之境，人惟于静中得之。有我之境，于由动入静时得之，故一优美，一宏壮也。自然中之物则互相关系，互相限制。然其写之于文学及美术中也，必有其关系限制之处。故虽写实家亦理想家也。又虽如何虚构之境，其材料必求之于自然，而其构造亦必从自然之法则。故虽理想家亦写实家也。

数学研究当然也有境界的概念，在某种程度上也可谈有我之境、无我之境。当年欧拉开创变分法和推导流体方程，由自然现象引导，可谓无我之境；他又凭自己的想象力研究发散级数，而得到 Zeta 函数的种种重要结果，开三百年数论之先河，可谓有我之境矣。另外一个例子是法国数学家格罗滕迪克 (A. Grothendieck)。他著述极丰，以个人的哲学观点和美感出发，竟然不用实例，建立了近代代数几何的基础，真可谓有我之境矣。

在几何的研究中，我们发现狄拉克在物理上发现的旋子在几何结构中有魔术性的能力。我们不知道它内在的几何意义，它却替我们找到几何结构中的精髓。在应用旋子理论时，我们常用的手段是通过所谓消灭定理而完成的，

这是一个很微妙的事情。我们制造了曲率而让曲率自动发酵去证明一些几何量的不存在，可谓无我之境矣。以前我提出用爱氏结构来证明代数几何的问题和用调和映像来看研究几何结构的刚性问题也可作如是观。

不少伟大的数学家，以文学、音乐来培养自己的气质，与古人神交，直追数学的本源，来达到高超的意境。

《文心雕龙 · 神思篇》：

> 文之思也，其神远矣。故寂然凝虑，思接千载；悄焉动容，视通万里。吟咏之间，吐纳珠玉之声；眉睫之前，卷舒风云之色，其思理之致乎！

数学的品评

好的工作应当是文已尽而意有余。大部分数学文章质木无文，流俗所好，不过两三年耳。但是有创意的文章，未必为时所好，往往十数年后始见其功。

我曾经用一个崭新的方法去研究调和函数，以后和几个朋友一同改进了这个方法，成为热方程的一个重要工具。开始时没有得到别人的赞赏，直到最近五年大家才领会到它的潜力。然而我们还是锲而不舍地去研究，觉得意犹未尽。

我的老师陈省身先生在他的文集中引杜甫诗“文章千古事，得失寸心知”。而杜甫就曾批评初唐四杰的作品“王杨卢骆当时体，不废江河万古流”。

时俗所好的作品，不必为作者本人所认同。举个例子，白居易留传至今的诗甚多，最出名之一是《长恨歌》，但他给元微之的信中却说：

> 及再来长安，又闻有军使高霞寓者欲聘娼妓，妓大夸曰：“我诵得白学士《长恨歌》，岂同他妓哉。”…… 诸妓见仆来，指而相顾曰：“此是《秦中吟》、《长恨歌》主耳！”自长安抵江西，三四千里 …… 每每有咏仆诗者，此诚雕虫之戏，不足为多，然今时俗所重，正在此耳。

白居易说谢朓的诗丽而无讽。其实建安以后，绮丽为文的作者甚众。亦自有其佳处，毕竟钟嵘评谢朓诗为中品，以后六朝骈文、五代《花间集》以至近代的鸳鸯蝴蝶派都是绮丽为文。虽未臻上乘，却有赏心悦目之句。

数学华丽的作品可从泛函分析这种比较广泛的学问中找到，虽然有其美丽外表和重要性，但与自然之道总是隔了一层。举例来说，从函数空间抽象出来的一个重要概念叫作巴拿赫空间，在微分方程学有很重要的功用，但是以后很多数学家为了研究这种空间而不断地推广，例如有界算子是否存在不

白居易

博特

变空间的问题，确是漂亮，但在数学大流上却未能激起任何波澜。

在 20 世纪 70 年代，高维拓扑的研究已成强弩之末，作品虽然不少，但真正有价值的不多，有如“野云孤飞，去留无迹”。文气已尽，再无新的比兴了。当时有拓扑学者做群作用于流形的研究，确也得到某些人的重视。但是到了 80 年代，值得怀念的工作只有博特 (R. Bott) 的局部化定理。

能经得起时间考验的工作寥寥无几，政府评审人才应当以此为首选，不应以文章篇数和被引用次数来作指标。

数学的演化

王国维说：

> 四言敝而有《楚辞》,《楚辞》敝而有五言，五言敝而有七言，古诗敝而有律绝，律绝敝而有词。盖文体通行既久，染指遂多，自成习套。豪杰之士，亦难于其中自出新意，故遁而作他体以自解脱。一切文体所以始盛终衰者，皆由于此，故谓文体后不如前，余未敢信。但就一体论，则此说固无以易也。

数学的演化和文学有极为类似的变迁。从平面几何至立体几何，再至微分几何等，一方面是工具得到改进，另一方面是对自然界有进一步的了解，将原来所认识的数学结构的美发挥至尽后，需要进入新的境界。江山代有人才出，能够带领我们进入新的境界的都是好的数学。上面谈到的高维拓扑文气已尽，假使它能与微分几何、数学物理和算术几何组合变化，亦可振翼高翔。

我在香港念数学时，读到苏联数学家盖尔范德（I. M. Gel'fand）的看法，用函数来描述空间的几何性质，使我感触良深，以后在研究院时才知道，代数几何学家也用有理函数来定义代数空间，于是我猜想一般的黎曼流形应当也可以用函数来描述空间的结构。但是为了深入了解流形的几何性质，我们需要的函数必须由几何引出的微分方程来定义。可是一般几何学家厌恶微分方程，我对它却情有独钟，与几个朋友合作将非线性方程带入几何学，开创了几何分析这门学问，解决了拓扑学和广义相对论的一些重要问题。在 1981 年时我建议朋友哈密顿 (R. Hamilton) 用他创造的方程去解决三维拓扑的基本结构问题，20 多年来他引进了不少重要的工具，运用上述我和李伟光在热方程的工作，深入地了解奇异点的产生。两年前俄国数学家佩雷尔曼 (G. Perelman) 更进一步地推广了这个理论，很可能完成了我的愿望，将几何和三维拓扑带进了新纪元。

八年前我访问北京，提出全国向哈密顿先生学习的口号。广州的朱熹平接受我的建议，锲而不舍地钻研，他的工作已经远超国内外成名的中国学者。

当一个大问题悬而未决的时候，我们往往以为数学之难莫过于此。待问题解决后，前途豁然开朗，看到比原来更为灿烂的火花，就会有不同的感受。这点可以跟庄子《秋水篇》比较：

> 秋水时至，百川灌河，泾流之大，两涘渚崖之间，不辨牛马。于是焉河伯欣然自喜，以天下之美为尽在已，顺流而东行，至于北海，东面而视，不见水端，于是焉河伯始旋其面目，望洋向若而叹曰："野语有之曰：'闻道百，以为莫已若者。'我之谓也。且夫我尝闻少仲尼之闻，而轻伯夷之义者，始吾弗信；今我睹子之难穷也。吾非至于子之门，则殆矣。吾长见笑于大方之家。"

哈密顿

庄子

科学家对自然界的了解，都是循序渐进的，在不同的时空自然会有不同的感受。有学生略识之无后，不知创作之难，就连陈省身先生的大作都看不上眼，自以为见识更为丰富，不自见之患也。人贵自知，始能进步。

庄子：

> 今尔出于崖涘，观于大海，乃知尔丑，尔将可与语大理矣。

我曾经参观德国的哥廷根大学，看到 19 世纪和 20 世纪伟大科学家的手稿，他们传世的作品只是他们工作的一部分，很多杰作都还未发表，使我深为惭愧，更为钦佩他们的胸襟。今人则不然，大量模仿，甚至将名作稍为改动，据为己有，尽快发表。或申请院士，或自炫为学术宗匠，于古人何如哉！

数学的感情

为了达到深远的效果，数学家需要找寻问题的精华所在，需要不断地培养我们对问题的感情和技巧。这一点与孟子所说的养气相似。气有清浊，如何寻找数学的魂魄，视乎我们的文化修养。

白居易说：

> 圣人感人心而天下和平，感人心者，莫先乎情，莫始乎言，莫切乎声，莫深乎义 …… 未有声入而不应，情交而不感者。

严羽《沧浪诗话》：

> 盛唐诸公惟在兴趣，羚羊挂角，无迹可求。故其妙处透澈玲珑，不可凑拍，如空中之音，相中之色，水中之影，镜中之象，言有尽而意无穷。

我的朋友哈密顿先生，他一见到问题可以用曲率来推动，就眉飞色舞。另外一个澳洲来的学生，见到与爱因斯坦方程有关的几何现象就赶快找寻它的物理意义，兴奋异常，因此他们的文章都是清纯可喜。反过来说，有些成名的学者，文章甚多，但陈陈相因，了无新意。这是对自然界、对数学问题没有感情的现象，他们对名位权利特别重视。在这种情形下，难以想象他们对数学、对自然界会有深厚的感情。

数学的感情是需要培养的，慎于交友才能够培养气质。博学多闻，感慨始深，堂庑始大。欧阳永叔：

> 人间自是有情痴，此恨不关风与月。
>
> 直须看尽洛城花，始与东风容易别。

能够有这样的感情，才能够达到晏殊所说：

> 昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路。

浓厚的感情使我们对研究的对象产生直觉，这种直觉看对象而定，例如在几何上叫作几何直觉。好的数学家会将这种直觉写出来，有时可以用来证明定理，有时可以用来猜测新的命题或提出新的学说。

但数学毕竟是说理的学问，不可能极度主观。《诗经》中的《蓼莪》、《黍离》，屈原《离骚》、《九歌》，汉都尉《河梁送别》，李后主忆江南，宋徽宗念故宫，俱是以血书成、直抒胸臆，非论证之学所能及也。

数学的应用

王国维说：

> 诗人对宇宙人生须入乎其内，又须出乎其外。入乎其内，故能写之；出乎其外，故能观之。入乎其内，故有生气；出乎其外，故有高致。美成能入而不能出，白石以降，于此二事皆未梦见。
>
> 词之《雅》《郑》，在神不在貌。永叔、少游虽作艳语，终有品格。方之美成，便有淑女与娼妓之别。

数学除与自然相交外，也与人为的事物相接触，很多数学问题都是纯工程上的问题。有些数学家毕生接触的都是现象界的问题，可谓入乎其内。大数学家如欧拉、傅里叶、高斯、维纳、冯·诺伊曼等都能入乎其内，出乎其外，既能将抽象的数学在工程学上应用，又能在实用的科学中找出共同的理

高斯

王国维

念而发展出有意义的数学。反过来说，有些应用数学家只用计算器做出一些计算，不求甚解，可谓二者皆未见矣。

傅里叶在研究波的分解时，得出傅里叶级数的展开方法，不但成为应用科学最重要的工具，在基本数学上的贡献也是不可磨灭的。近代孤立子的发展和几何光学的研究，都在基本数学上占有重要的位置。

应用数学对基本数学的贡献可与元剧相比较。王国维评元剧：

> 其作剧也，非有藏之名山，传之其人之意也，彼以意兴之所至为之，以自娱娱人，关目之拙劣，所不问也；思想之卑陋，所不讳也；人物之矛盾，所不顾也。彼但摹写其胸中之感想与时代之情状，而真挚之理与秀杰之气时流露于其间。

例如金融数学旨在谋利，应用随机过程理论，间有可观的数学内容。正如王国维评古诗“何不策高足，先据要路津，无为久贫贱，坎坷长苦辛”，认为“无视其淫词、鄙词者，以其真也”。伟大的数学家高斯就是金融数学的创始人，他本人投资股票而获利，克莱因则研究保险业所需要的概率论。

然而近代有些应用数学家以争取政府经费为唯一目标，本身无一技之长，却巧立名目，反诬告基础数学家对社会没有贡献，尽失其真矣。有如近代小说以情欲、仇杀、奸诈为主题，取宠于时俗，不如太史公《刺客列传》中所说：

> 自曹沫至荆轲五人，此其义或成或不成，然其立意较然，不欺其志，名垂后世，岂妄也哉。

应用数学家不能立意较然，而妄谈对社会有贡献，恐怕是缘木求鱼了。

数学的训练

好的数学家需要领会自然界所赋予的情趣，因此也需向同道学习他们的经验。然而学习太过，则有依傍之病。顾亭林云：

> 君诗之病在于有杜，君文之病在于有韩、欧。有此蹊径于胸中，便终身不脱依傍二字，断不能登峰造极。

今人习数学，往往依傍名士，以为凡海外毕业的留学生，都为佳士，殊不知这些名士大半文章与自然相隔千万里，画虎不成反类犬矣。李义山云：

> 刘郎已恨蓬山远，更隔蓬山一万重。

很多研究生在跟随名师时，做出第一流的工作，毕业后却每况愈下，就是依傍之过。更有甚者，依傍而不自知，由导师提携指导，竟自炫“无心插柳柳成荫”，难有创意之作矣。

有些学者则倚洋自重，国外大师的工作已经完成，除非另有新意，不大可能再进一步发展。国内学者继之，不假思索，顶多能够发表一些二三流的文章。极值理论就是很好的例子。由伯克霍夫（Birkhoff）、莫尔斯（Morse）到尼伦伯格（L. Nirenberg）发展出来的过山理论，文意已尽，不宜再继续了。

推其下流，则莫如抄袭。有成名学者为了速成，竟抄袭名作，居庙堂之上，腰缠万贯而沾沾自喜，良可叹也。

数学家如何不依傍才能做出有创意的文章呢？

屈原说：

> 纷吾既有此内美兮，又重之以修能。

如何能够解除名利的束缚，俾欣赏大自然的直觉毫无拘束地表露出来，乃是数学家养气最重要的一步。

贾谊：

> 独不见夫鸾凤之高翔兮，乃集大皇之野。循四极而回周兮，见盛德而后下。彼圣人之神德兮，远浊世而自藏。使麒麟可得羁而系兮，又何以异乎犬羊。

媒体或一般传记作者喜欢说某人是天才，下笔成章，仿佛做学问可以一蹴而就。其实无论文学和数学，都需要经过深入的思考才能产生传世的作品。

柳永：

> 衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。

尼伦伯格

屈原

一般来说，作者经过长期浸淫，才能够出口成章；经过不断推敲，才有深入可喜的文采。王勃《滕王阁序》，丽则丽矣，终不如陶渊明《归去来辞》、庾信《哀江南赋》、曹植《洛神赋》诸作来得结实。文学家的推敲在于用字和遣词。张衡《两京》、左思《三都》，构思十年，始成巨构，声闻后世，良有以也。数学家的推敲极为类似，由工具和作风可以看出他们特有的风格。传世的数学创作更需要有宏观的看法，也唯有锻炼和推敲才能成功。

曹丕：

> 古人贱尺璧而重寸阴，惧乎时之过已，而人多不强力；贫贱则慑于饥寒，富贵则流于逸乐，遂营目前之务，而遗千载之功。日月逝于上，体貌衰于下。忽然与万物迁化，斯志士之大痛也。

三十年来我研究几何空间上的微分方程，找寻空间的性质，究天地之所生，参万物之行止。乐也融融，怡然自得；溯源所自，先父之教乎！

对称在艺术与科学中的作用

季理真

介绍

数学是什么？对这个问题，我们有很多的答案。一种回答就是，数学是研究数与形的科学。这种研究的一个非常重要的方面就是要理解现象背后的结构与规律，更确切地说，就是隐含的对称。

既然数学一贯都被认为是理解自然界和宇宙的基本语言，我们当然有理由相信，“对称”将会在诸如艺术、文学和自然科学等方面扮演重要的角色。

在本文中，我们讨论几个艺术、建筑和自然科学中的例子，将会看到对称的观念在其中起了怎样的关键作用。我们将带着读者领略浩瀚文献中所描述的“对称”，及其广泛的应用。

什么是对称

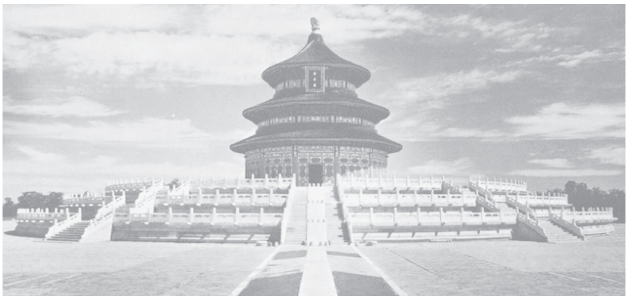
根据《美国传统字典》，“对称”是一条边界（例如平面或直线）两侧，或者绕着圆心的形态与排列的对应。

根据《牛津字典》，“对称”是一种结构，使得物体可以被分割成形状和大小相同的几部分，或者是物体关于边界和中心的类似重复。

我们要举的第一个例子，是大多数中国人最熟悉的北京的天坛。

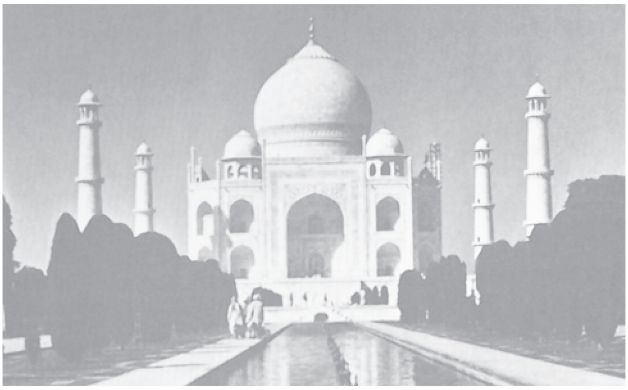
试想你沿着天坛的台阶拾级而上，一定会感受到一种和谐的美感。这座沿着道路中轴对称的建筑展现了令人折服的庄严与肃穆，这是反射对称（或镜像对称）的例子。

再看一下印度阿格拉的泰姬陵，建于 1632—1643 年，是莫卧儿王朝帝王沙贾汉为爱妃泰姬 · 玛哈尔所造。据传当年沙贾汉听闻爱妃先他而去的消息后，竟一夜白了头。



北京天坛

泰姬陵这座建筑也是沿中心线对称的。除了整体上的对称，局部上也遵循了对称美的原则。



泰姬陵

下面图中的建筑是希腊雅典的帕台农神庙，建于公元前 448—前 432 年。

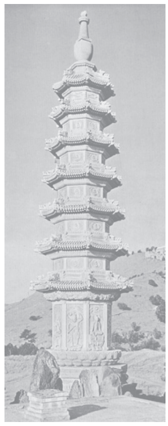
帕台农神庙

无论从前方或侧面看，它都是对称的。而它的柱子呈周期分布，也体现了一种平移对称。

盉鼎铸造于西周晚期，约公元前 1100—前 1000 年，也具有镜像的对称。日本镰仓的大佛建于 1252 年，体现了反射对称。这里还有一个具有复杂对称性的建筑，即北京的一座石塔。

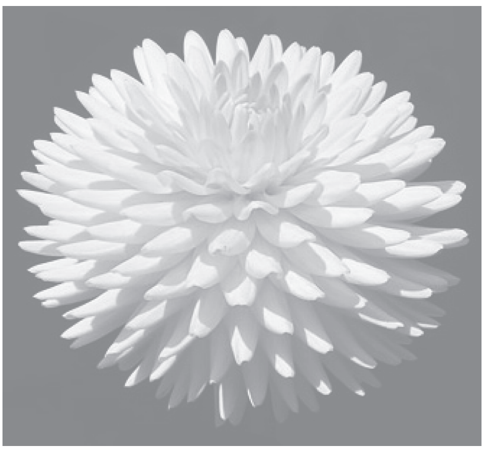

盉鼎


日本大佛


北京的石塔

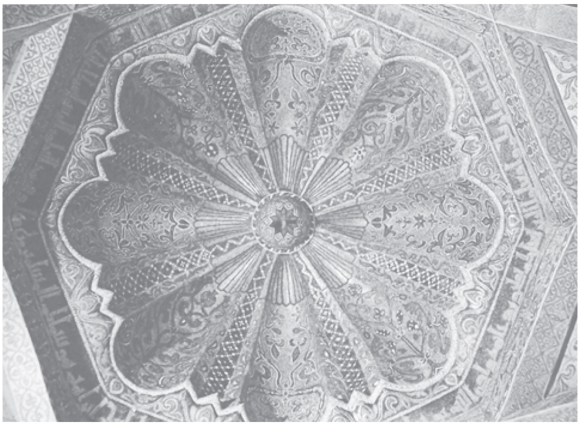
如果你在春暖花开的时节走进公园，就会看到争妍斗丽的百花大都是对称的。比如，冬乌头就是旋转对称的。有些花还带有更多的对称性，比如大丽花。

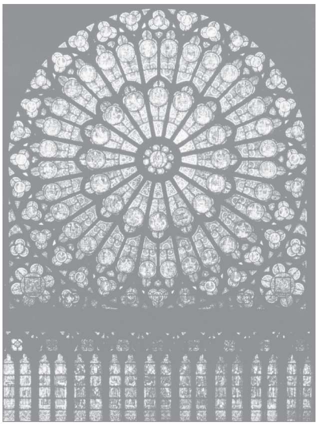

冬乌头


大丽花

除了旋转对称，大丽花还有一种由内而外、层次鲜明的对称。多重对称的叠加让花朵更加艳丽。

另一个旋转对称的美妙实例就是西班牙科多巴市的清真寺庙的圆屋顶。巴黎圣母院北边墙面上的巨大的玫瑰窗，有着五彩华丽的旋转对称，令人叹为观止。它建于 1250 年，圆面的直径大约是 40 英尺。

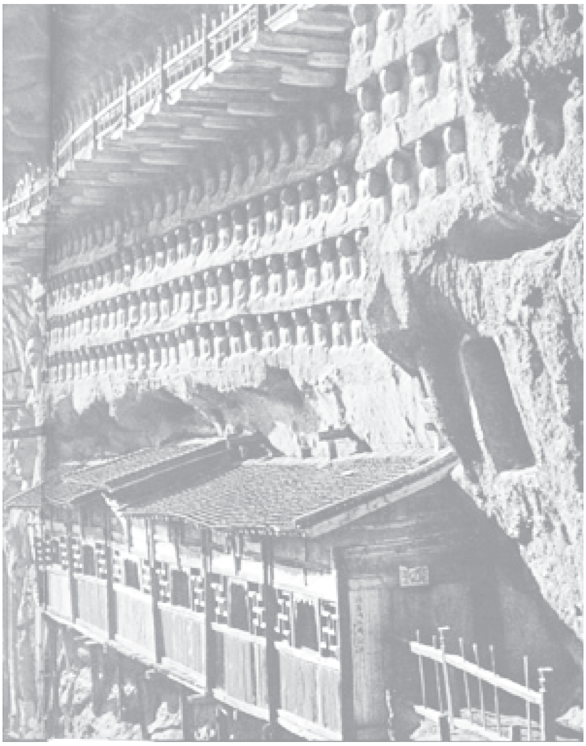

西班牙清真寺圆屋顶


巴黎圣母院的玫瑰窗

我们前面提到过，雅典帕台农神庙的柱子是平移对称的。这里我们再举几个例子。第一个是法国噶尔德桥下的导水渠，建于罗马时期。它有三层。虽然每层都有不同的样式，可我们还是能看出里面的某种相似性。

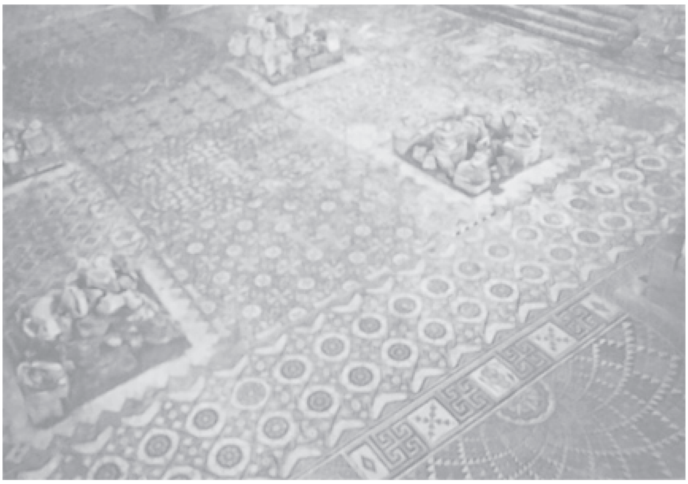

法国噶尔德桥下的导水渠

第二个例子是我国西北麦积山石窟的千佛廊，建于公元 500 年左右。上下两层排列着 258 尊魏代石胎泥塑佛像。



佛像

约旦 Khirbat al-Mafjar 宫殿的方格地板的图案具有两种平移对称。



约旦宫殿的地板

另一个平移对称的例子是南太平洋的复活节岛上的石雕人像，雕刻于公元 1000—1600 年。有的石像重量超过 50 吨。令人费解的是，为什么这些石像会出现在这个小岛上？在没有现代化起重机的帮助下，这些石像是如何竖立起来的？

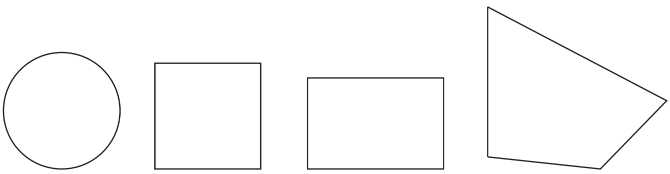
复活节岛石像

在上面的所有例子中，都包含着一个保持物体形状或模式不变的等距群。前两张图的等距群是由相对于中线的反射生成的二阶群。在第二组图片中，是一个由旋转构成的有限群。在最后的一组图片中，如果假设物体延伸到无穷远处，那么就有一个无穷的平移变换群作用在其上，并且保持模式不变。

在这些图片的基础上，我们可以从数学上给出一个物体“对称”的定义，即有一些非平凡的等距作用在其上。明显地，这样的等距全体构成了一个群，并把物体分成了相同的几个部分（也就是等距群基本区域的平移），如同我们在这一节开头所介绍的那样。

同样，如果不存在非平凡等距作用在其上，我们说一个物体是非对称的。给了两个物体 A 与 B，如果 A 的等距群包含了 B 的等距群，那么我们就说 A 比 B 更加对称。

为了更好地表述这些概念，我们考虑如下四个图形，即圆、正方形、长方形和一个不规则的四边形。



四个图形

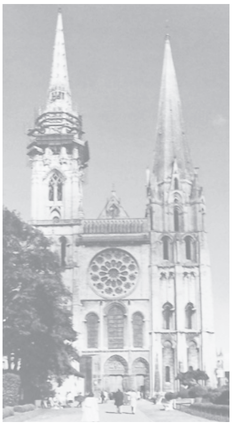
明显地，最后这个四边形不是“对称”的。同样，直觉告诉我们，圆是最对称的，正方形比长方形更对称。事实上，圆的等距群是无穷的，并且包含了正方形的有限等距群，而后者又包含了长方形的等距群。

破缺的对称

人生不可能是尽善尽美的，我们也很难找到一朵花是完美无缺的。虽然人体总的来说是左右对称的，可是这种对称远不是完全的。每个人左右手的粗细不一样，一只眼睛比另一只眼睛更大或更圆，耳垂的形状也不同。最明显的，就是每个人只有一个心脏，通常都在靠左的位置（当然也有极少数人的心脏在右侧）。

日常生活中我们会有意地打破对称，艺术家有时也会极力地创造出不对称的图像和物体，可是仍然给人以和谐与平衡的美感。我们以仰韶文化的一个陪葬用的器皿为例，这也许可算是最古老的实物之一。这件看起来似乎工整的器皿其实并不对称。除了明显的不太完美的反射对称外，瓶颈处的贴瓷也是不对称的。再请看建于 1145 年的法国沙特尔大教堂。

陪葬器皿



不对称的教堂

教堂在塔楼以下的部分是反射对称的。同样在局部上也有许多的对称。例如，中间的窗子是旋转对称的。试想一下，如果塔楼也是对称的，那么这座教堂看起来也许就没有现在这么吸引人了。

许多人也许会有这样的共识：脸上如果有一颗美人痣，那么会让人眼前一亮；可是如果有两颗对称的美人痣，肯定会让人觉得不舒服。

下面是一幅公元前的埃及古画，其中鹅的排列是对称的，可是两边的鹅却着上了不同的颜色。读者不妨体会一下，到底是对称的着色好还是现在这样比较好。

埃及古画《鹅》

有时对称会以一种非常微妙的方式出现。比如，建于公元前 486—前 460 年的奥林匹亚宙斯神庙西门的三角楣上的雕塑，它的外轮廓（或者用数学的语言来说就是闭包）呈现出反射对称性，并且中线两边的人数相等。可是两边的塑像却有着天壤之别。

宙斯神庙雕塑

破缺对称的另一个例子是下面这幅镶嵌画，讲述的是耶稣通过发五条鱼、两个饼让五千信徒吃饱的故事。

圣经故事

下面这幅 12—13 世纪的尼泊尔古画给出了破缺对称的另一个例子。

尼泊尔古画

上面的例子都是反射对称的变体。平移对称的近似也出现在艺术中。例如，在宋朝著名画家米友仁的画中，山峰基本上是呈现周期变化的。另一个近似平移对称的例子是北京颐和园内沿着湖岸的画廊。

米友仁的国画

颐和园

读者不妨分析一下，下面这幅郑板桥的竹画中是否也蕴含了平移对称呢？

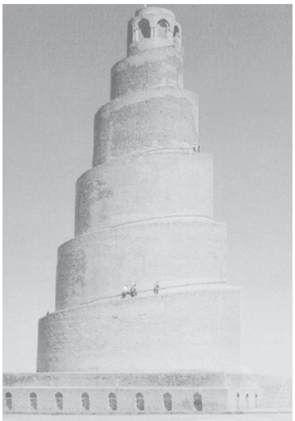
郑板桥《竹》

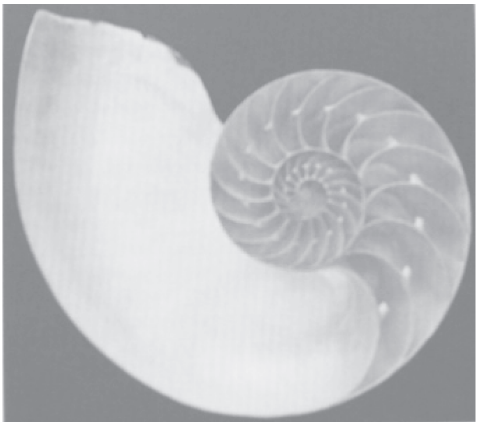
广义的对称

在许多情况下，和谐或有序来自于多种对称运算的组合。直线上的周期现象来自于一个给定非零实数的叠加。在指数映射 $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ 下，$\mathbb{R}$ 上的平移就转换成正的半直线 $\mathbb{R}_{>0}$ 上的乘法。我们给出两个从平移、旋转和比例变换产生出有序模式的例子。

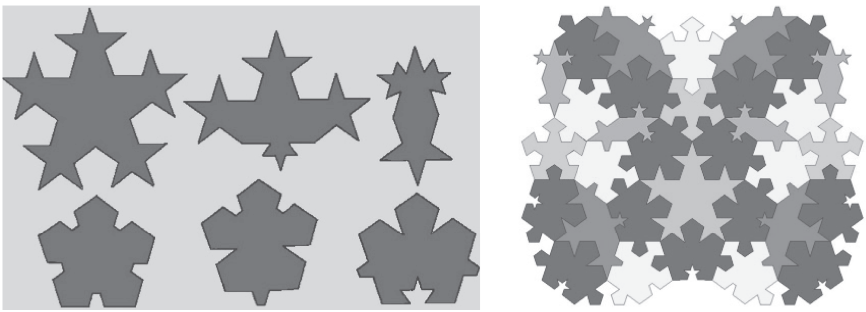
第一个是伊朗沙马拉的清真寺，建于公元 848—852 年。其中的塔楼把垂直平移、水平面上的旋转以及比例变换结合了起来。

第二个例子是鹦鹉螺的壳，是旋转与比例变换的完美结合。

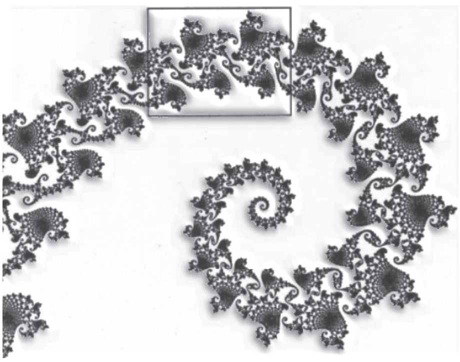

清真寺的塔楼


鹦鹉螺的壳

另一类对称的变体就是，虽然局部上是对称的，可是不存在整体的对称。一个著名的例子是彭罗斯平铺，这是非周期的。


彭罗斯平铺

分形是用来处理不规则形状的，可是它们有着众多的局部对称。事实上，在比例变换下，这种模式不断重复出现。在这种意义下，它有着丰富的局部对称性。人们创造了许多漂亮的分形图片，下图所示的就是其中一张。


分形

对称背后的数学

如我们前面所定义的，平面上一个物体如果有一个非平凡的对称群作用，则称它是对称的。所以，对称现象背后的数学就是群论。

群论是法国青年数学家伽罗瓦为了用根式来解决代数方程而引入的。

我们知道任意 2 次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以用根式来解。16 世纪时人们就发现 3 次和 4 次代数方程可以用根式来解，但是对于高次方程一直都不得其解。直到 19 世纪阿贝尔才证明了，对 5 次以上的方程，不存在一个一般解的公式。

对于某些特殊的高次方程，仍然可以用根式来解。伽罗瓦用代数方程的对称性给出了方程可解的精确条件。他的结论也许有些令人惊讶：如果方程具有过多对称的话，那么就不能用根式来解（这似乎有悖于人们的认识，丰富的对称性通常可以让问题得到简化。所以对于对称的合理解释就显得非常重要）。

考虑下面三个方程：

$$
\begin{aligned}
(x-1)^5 &= 0,\\
(x^4-6x^2+5)(x-2) &= 0,\\
a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6 &= 0,
\end{aligned}
$$

其中 $a_1,\cdots,a_6$ 是随机选取的整数。我们应该怎样定义一个方程的对称性，以及对称程度的比较呢？精确的定义需要相当的技巧。我们可以粗略地描述为每个方程都有一个有限群，称为伽罗瓦群。伽罗瓦群越大，就越对称。

第一个方程有平凡的对称（或者干脆说没有对称），所以可以很容易解出，即 $x=1$。第二个方程的对称性也很小，所以方程可以用根式解出：$x_1=2, x_2=1, x_3=-1, x_4=\sqrt{5}, x_5=-\sqrt{5}$。也许稍有些意外的是，最后这个具有随机系数的方程是最对称的，所以不能够用根式解出。根据通常的认识，随机性与对称性应该是背道而驰的，所以我们会倾向于认为一个具有随机系数的方程不是对称的。可是在许多情况下，我们也看到随机是被某些对称所支配的。另一个例子是，随机矩阵的特征值分布是由多种对称性支配的（参看文献 [12] 或本文“素数或 Zeta 函数的对称”一节）。这种现象可以用中国的一句成语来描述，就是“物极必反”。

伽罗瓦群是有限的。我们前面遇到的对称群，除了直线上的平移群以外，也都是有限的。

所有实数集合 $\mathbb{R}$ 构成一个群，直线上周期现象的平移群是它的一个子群。$\mathbb{R}$ 是挪威数学家索菲斯 · 李所引入的李群的一个重要例子。

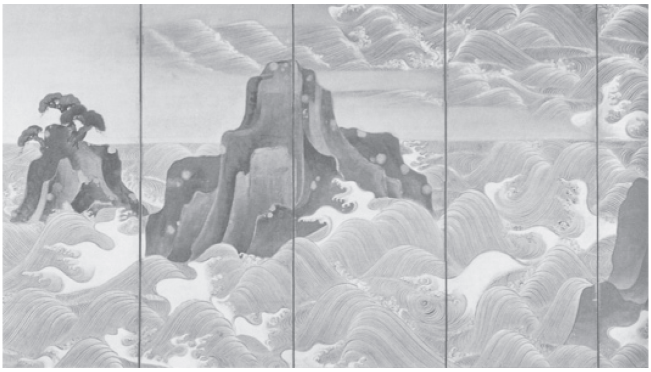
伽罗瓦

索菲斯・李（Lie）

李群通常是不可数的，并且有非平凡的拓扑，虽然它们包含某些有限群与离散子群作为特例。另一个重要的例子是 $\mathbb{R}^n$ 中全体正交变换构成的群 $O(n)$，一个非交换（或非阿贝尔）群。另一个稍大的群是 $\mathbb{R}^n$ 中的全体可逆线性变换构成的群。另一个重要的例子是作用在 $\mathbb{R}^n$ 上的特殊酉群 $SU(n)$。

在数学中，对称的概念经常与李群的概念等同起来。我们称一个对象（或一个系统、一个映射、一个微分方程）具有由一个李群 G 所给定的对称，当这个群 G 保持不变地作用在其上，或者满足某个简单的变换条件。

比如，我们熟知 $\sin 2\pi x$ 以 1 为周期，所以在平移群 $\mathbb{Z}$ 的作用下保持不变。函数 $\sin 2\pi x$ 的图像是一个波。下面的画出自一位日本画家 Ogata Koran（1658—1716）之手，就包含了许多这种波。



日本画《波浪》

虽然函数 e^x 不是周期的，但它在平移作用下满足一个简单的公式：$e^{x+1} = ee^x$，所以 e^x 相对于平移群，也享有某种对称性。这种连续的比例变换是中国山水画的重要组成部分。

正多边形与正多面体

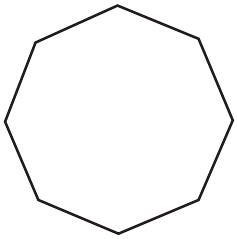
代数方程的伽罗瓦群论也许有些抽象和形式化，让我们回到对称的更加几何直观的概念。

如同前面所提到的那样，正方形比长方形更加规则。事实上，正方形是正多边形的一种。一个正多边形满足：(1) 所有的边长都相等；(2) 相邻边夹成的角度都相等。

当边数趋于无穷时，正多边形就收敛到圆，所以圆可以解释为完美理想的正多边形。

每个正多边形都具有反射和旋转对称性，在相同边数的多边形中无疑是对称程度最高的。另一方面，在艺术和建筑中，常用的往往是那些非等边的三角形。比如帕台农神庙顶部的三角形，还有金字塔就不是等边的。非常受欢迎的是黄金三角形和相应的黄金分割。关于黄金分割及其应用的详细讨论，请参看 [15]。

在拉斐尔的名画《牧场圣女》中，我们可以看到其中的许多三角形。我们留给读者一个小练习，就是找出其中一共有多少个三角形。



正多边形的例子

拉斐尔《牧场圣女》

圆是理想化的正多边形，具有无穷的对称性。由于圆的良好性质，使得它是所有等长曲线中包围面积最大的。同样的，三维欧氏空间中的球面也具有同样的极值性质。这也解释了为何肥皂泡、气球都是球形的。它在中国传统艺术中被广为使用。我们列举几个例子。

第一个是山东梁帝墓（约公元 150 年），如同车轮的圆代表着运动。圆形图案也传达了一种和谐与宁静。

梁帝墓

第二个是南京萧景墓前的带翅石狮。

萧景墓前的带翅石狮

另一个例子是公元前 10 世纪的周朝尖牙虎铜雕。

周朝尖牙虎铜雕

圆形代表了一种向上运动的感觉，传达着权势和实力，却也透露着宁静的气息。事实上，在中国园林设计中，圆形图案占了很大的比重。请看一下苏州园林的两处门洞。

苏州园林

正多边形到三维欧氏空间的推广，就是正多面体。与二维情形不同，一共只有 5 种正多面体。由定义可知，如果一个多面体满足下面的条件，则称其为正多面体。

(1) 它被有限多个平面包围，每个面都是正多边形；

(2) 所有面在等距下都是相同的；

(3) 所有相邻平面间的二面角都相等。

明显地，立方体是正多面体。其他四个正多面体是：正四面体、正八面体、正十二面体和正二十面体。它们的等距群是有限子群，可以具体地计算出来。

事实上，恩贝多克利（Empedocles，公元前 490—前 430 年）认为，万物都是由四种基本元素构成的：火、空气、水和土。这个理论在希腊被广泛接受。

既然正多面体是完全理想化的，而世界也是完美的，柏拉图于是提出：世界是由正多面体构成的。火对应于正四面体；正二十面体有着最多的面，最易滑动，就对应于水；土就是正立方体；空气就是正八面体；剩下的正十二面体就代表宇宙。由于等边三角形存在于正四面体、正八面体和正二十面体中，所以火、空气和水可以相互转换，但不能转换成正立方体所代表的土。

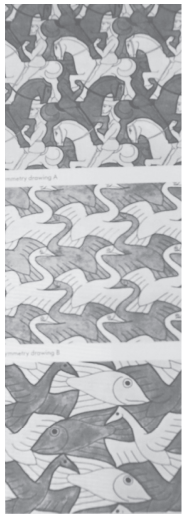
开普勒用正多面体建立了行星运动理论，所以人们相信正多面体在微观和宏观上都起着统治作用。正多面体理论及其推广在数学中非常重要，比如，在 Coxeter 的反射群理论，以及李群论和圈形簇理论中的应用。关于多面体的轻松而详细的讨论，可以参看 [3] 和经典专著 [2]。

平移对称，晶体与拟晶体

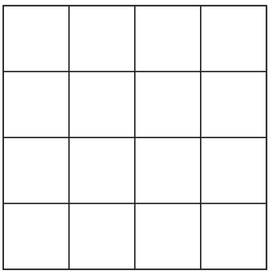
平移对称自然地出现在晶体中，贴墙纸和铺瓷砖也不例外。

位于西班牙格兰纳达的阿尔汗布拉宫的墙壁装饰，很好地展现了二维的对称。同样还有著名版画家 Escher 的作品。

阿尔汗布拉宫的墙壁装饰



Escher 的作品



方格平铺

与这种模式相关的是数学中“格”的概念。回忆一下，$\mathbb{R}^2$ 中的格是指由两个线性无关向量 v_1, v_2 生成的离散子群 $L = \mathbb{Z}v_1 + \mathbb{Z}v_2$。

一个明显的格是 $\mathbb{Z}^2$，它由 $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1)$ 生成。基于这个格的平铺如图所示。

明显地，这种平铺在 $\mathbb{Z}^2$ 的平移作用下保持不变。可是它还有其他的对称，比如，相对于任意一个角旋转 $45°$，或者相对于对角线的反射。方格平铺的对称性与格 $\mathbb{Z}^2$ 的对称性一致。

记 $G = I(\mathbb{R}^2)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 的等距变换群。那么任意格的等距群就是 G 的子群，称为晶体群。它包含 L 作为有限指数的子群。

晶体群在晶体的研究中起了重要的作用。格的结构决定了许多性质，特别是晶体的电子性质。基本的原因在于，相对于格的周期函数的谱理论确实依赖于格的性质。这种对称性在理解晶体中 X 射线折射的内在性质方面发挥了重要的作用。

晶体的对称性体现在分子的排列上。其实，对称性的考虑在原子级别上也很重要。参看 [9]。下面我们还将看到，对称在亚原子粒子中也很重要。同样，对称也在研究恒星、太阳系和整个宇宙的天体物理学中起着重要的

作用。

大家最熟悉的晶体也许是（小颗的）钻石。可是巨大的晶体结构也在自然界中存在，比如，爱尔兰的巨人石道。每根柱子的截面就是近似的正六边形，与蜂窝类似。

爱尔兰巨人石道

虽然原则上有无穷多种墙纸的设计方案，但只有 17 种（或在仿射变换群作用下的共轭类）不同的晶体群。注意不是在等距群下的共轭类。为了解释这种差异，我们注意到所有格都是在某个仿射变换，而不是等距群下共轭的。

回忆每个晶体群 Λ 包含平移子群 L，并且商 Λ/L 是一个作用在 L 上的有限正交群，称为格的点群。$(\Lambda/L, L)$ 这样的对称叫作布拉韦 (Bravais) 格。我们发现刚好有 14 个布拉韦格。17 与 14 的差别在于 Λ 不是由 $(\Lambda/L, L)$ 唯一确定的。更多的讨论，请参看 [26], [23], [22]。

值得一提的是，一般的 $\mathbb{R}^n$ 中的晶体群等价类的有限性是著名的希尔伯特第十八问题。这已经被比伯巴赫 (Bieberbach) 在 1910 年完全解决了。详细的分类是很困难的。比如，在三维有 230 种不同类型。

晶体群的分类不仅是数学上有趣的问题，而且在固体物理中也有着重要的应用。事实上，它在晶体的分类方面很重要，对于 1984 年拟晶体的发现也起了关键的作用。其实，按照晶体群的分类来看，1984 年发现的晶体化合物有着惊人的五重点群结构。

拟晶体具有拟周期性：它的排列并不完全重复，但是却具有很强的局部正则性。

生成拟晶体结构的一种典型的方法是，取非有理嵌入在 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 V，以及一个相对标准 $\mathbb{Q}$ 结构有理的格结构（到周期平铺的分解）的交。

希尔伯特

比伯巴赫

平铺允许我们可以用一种模式周期地覆盖住整个平面。一个自然的问题是，那种平铺是否可以用非周期的方式覆盖住整个平面。这被称为非周期平铺，一个著名的例子是我们前面提到的彭罗斯平铺。这种非周期平铺很自然地出现在拟晶体中。请参考彭罗斯的文章 [19]。

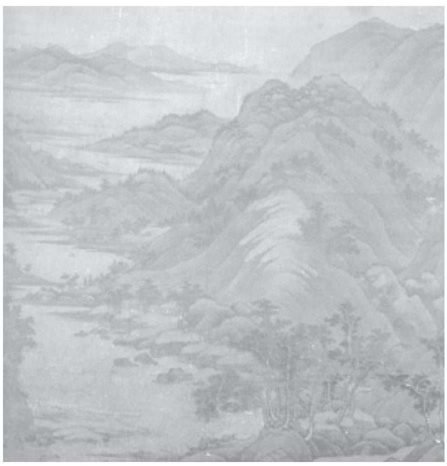
如我们提到的那样，圆周在中国传统艺术中被广泛使用。我们现在给出一种平移对称的模式，或称比例变换对称：

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \to e^{x} \quad 或 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, \quad x \to e^{-x}.$$

在这些映射下，$\mathbb{R}$ 的周期平移就成为连续的比例变换。

在唐寅的画中，山的深邃与宏大被连续的比例变换描绘出来。这种提升视野的手法在中国山水画中有着重要的地位，引导观众深入到画中。看一下公元 10 世纪时董源的山水画。

唐寅的雪山图



董源山水画

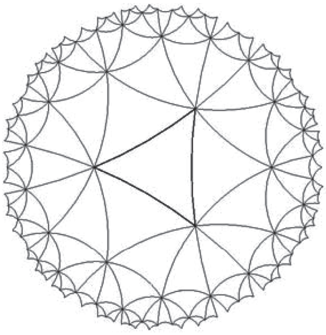
还有董其昌的画《青平山》。

青平山

许多中国山水画都展现出连续比例变换和相关的对称。

双曲镶嵌

到目前为止，我们集中于 $\mathbb{R}^2$ 中的平铺。另一类平铺见如下 Escher 的空间平铺。



双曲镶嵌

在这些照片中，瓷片在边界附近变得越来越小，并且它们看起来不是周期的。但是它们都体现了和谐与均衡。我们可以证明当圆盘是庞加莱圆盘（即具有常负曲率度量）时，那么它们是周期的。另一方面，第二张图不是周期的，虽然通过比例变换，它们只是局部对称。

Escher 的空间平铺

另一个更简单的双曲平面模型是

$$H^2 = \{x + iy | x \in \mathbb{R}, y > 0\} \cong SL(2, \mathbb{R})/SO(2),$$

其中

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{R}, ab - cd = 1 \right\}.$$

在圆盘模型中，群 $SL(2, \mathbb{R})$ 变成了 $SU(1,1)$。上面 Escher 的图相对于 $SU(1,1)$ 的一个合适的离散子群是周期的。事实上，这个图将庞加莱圆盘按照一个基本区域做了分解。

投影几何与绘画中的透视

在上面的讨论中，我们主要集中于平面 $\mathbb{R}^2$ 的对称。我们考虑了双曲镶嵌的平铺的例子。

平面的曲率为 0，双曲平面具有常负曲率 -1。根据 23 岁的克莱因在 1872 年提出的爱尔兰根纲领，它们是非常不同的几何。

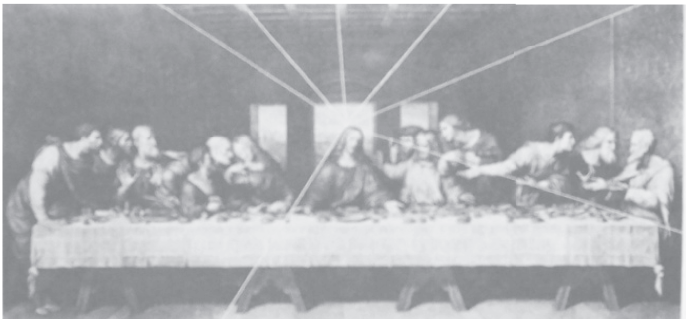
在这个纲领中，几何由它的变换群所决定。在这个思想下，欧式平面几何与双曲几何都是射影几何的子集。参看 [13, 第 38 章]。

令人惊讶的是，射影几何的发展受绘画中透视方法的影响很大。1822 年法国数学家庞斯莱发表了射影几何的第一部系统著作。

我们熟知，平面上两条平行线永不相交。另一方面，投影空间中的两条直线交于某一点。射影平面是通过在普通平面上加一个无穷远点得到的。在西方绘画中，这一点称为消失点，构成了画面的焦点，其他的事物都是根据这点出发的直线来描绘的。

看一下达 · 芬奇的“最后的晚餐”，以及拉斐尔的画“雅典学派”。

最后的晚餐



最后的晚餐（透视线）

在“雅典学派”图中，建筑物的深度清楚可见，是通过与中国画完全不同的手法得到的。另一方面，它们又是类似的，因为都收敛或趋向于无穷远处。

特征值的美妙音符

对称或正则的概念在数学中非常重要，一个例子与著名的问题“听出一个鼓的形状”有关。这个问题最早由洛仑兹、后来由卡茨 (Kac) 在一篇著名的文章 Can you hear the shape of a drum? 中提出。

洛仑兹在 1910 年的哥廷根大学提出这样一个问题，即人能否听出一个鼓的体积？这个问题被当时还是学生的外尔解决，令人惊叹。这是外尔伟大数学生涯的开始，对称是外尔工作的一个主旋律。请参看文章 [28], [19]。

更精确地，这个问题可以叙述如下。给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个有界域 Ω，具有良好的边界。考虑狄利克雷边值问题，

$$\Delta\varphi(x) = \lambda\varphi(x), \quad x \in \Omega; \quad \varphi(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

特征值构成了一个递增列 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$。特征值对应于鼓 Ω 的频率，也就是

雅典学派

雅典学派（透视线）

我们可以听到的音调。问题就是，是否鼓 Ω 的面积可以被这些特征值 λ_i 所决定。

著名的外尔定理说，小于 λ 特征值的个数按照 $c_n\mathrm{vol}(\Omega)^{\frac{n}{2}}$ 的形式增长，其中 c_n 是只依赖于维数的万有常数。从这个公式我们就可以看出特征值决定了 $\mathrm{vol}(\Omega)$。

这个定理也可以表述为，正规化的特征值 $c\lambda_i^{\frac{2}{n}}$ 在合理的常数 c 下，按照 i 增长。这是非常了不起的公式，因为特征值的计算通常是很困难的，而且头几个特征值往往并不以对称或规则的模式出现。如我们在前面所讨论的，序

列 $1,2,\cdots$ 是最对称的对象，自然在艺术中占有一席之地。

一个自然的问题是，差 $c\lambda_i^{\frac{2}{n}} - i$ 的行为如何？这个问题很复杂。它的分布很可能由某个更高层次的对称所支配。这是受到了我们下面将要讨论的黎曼 Zeta 函数 $\zeta(s)$ 的启发的。

素数或 Zeta 函数的对称

素数 $2,3,5,7,11,\cdots$ 是最基本和重要的研究对象。可是它们在自然数列 $1,2,3,\cdots$ 中的分布看起来好像完全是随机的。研究它们的一个重要工具就是著名的黎曼 Zeta 函数。

它定义在 $\mathrm{Re}(s) > 1$ 上，

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

可以亚纯解析延拓到整个复平面上。我们把 $\zeta(s)$ 规范化，得到

$$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

$\xi(s)$ 或 $\zeta(s)$ 的一个重要性质是下面的函数方程

$$\xi(1-s) = \zeta(s),$$

即它关于直线 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 对称。这就反映出了序列 $1,2,\cdots$，或者说整个整数集合的对称性。让我惊讶的是，这个对称性质的证明与双曲镶嵌的对称性有关，也就是相对于模群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 的模性质。简而言之，双曲镶嵌要求在 $SL(2,\mathbb{R})$ 的离散子群（例如 $SL(2,\mathbb{Z})$）作用下的不变性，模形式满足 $SL(2,\mathbb{Z})$ 作用下的某些变换律。

模性的现象在数学和物理学中频繁出现。一个例子是朗兰兹纲领，几何有意义和实际的数的序列都是模性的，也就是说它们是一个模形式（或自守表示）的系数。一个著名的例子就是怀尔斯关于费马大定理的证明。另一个重要的例子是 Borcherds [Bo] 证明的大魔群的月光猜想，他因此得到了 1998 年的菲尔兹奖。

这也可以解释为数学和自然科学中对称无处不在。

Zeta 函数的零点在素数分布的研究中特别重要。著名的黎曼猜测说，它的所有非平凡零点都出现在对称线 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上。这是美国克雷数学研究所悬赏百万美元的难题。

对称性在 $\zeta(s)$ 的零点分布方面发挥了重要的作用。事实上，在合理的正规化以后，零点的分布可以用李群来控制，李群也支配了随机矩阵特征值的间隔。

李群与物理

对称与李群在物理学中有许多应用。在物理学中的应用极大刺激了群论的发展。事实上，量子力学极大地影响了李群表示论的发展。

对称可以在物理学中从多个层面上观察到。例如，在牛顿力学中，包括万有引力定律在内的许多定律都在平移、旋转和反射下保持不变。

在广义相对论中，对称性由洛伦兹群（或庞加莱群）所支配。狭义相对论的一个重要特征就是空间与时间的观念是对称的。其实，伟大的物理学家狄拉克对杨振宁说过，这个概念也许是爱因斯坦对物理学最大的贡献（参考 [29, p.23]）。

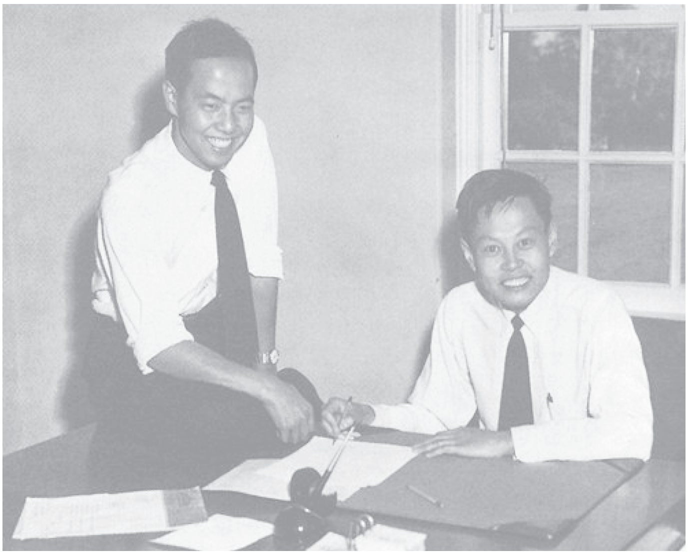
埃米・诺特

对称性在物理中的一个非常重要的应用是，可以从对称推出守恒律。这是历史上最著名的女数学家埃米 · 诺特证明的。比如，空间中的平移对称（或不变性）可以推出动量的守恒律，时间的平移不变性可以推出能量的守恒律。

如我们在文章开头所讨论的那样，反射对称在艺术中也普遍存在。可是在物理中，这是最复杂的问题，有时甚至是错误的。两个分别发生在右手和左手坐标系里的物理现象称为宇称守恒。事实上，杨振宁和李政道在 1956 年提出，在弱作用领域，宇称是不守恒的。他们因此在 1957 年获得诺贝尔物理学奖，他们的发现被著名华裔女物理学家吴健雄用实验证实。参考 [17] 中关于物理学中弱作用的介绍。

对称性（或群论）在物理学中的另一个了不起的应用是关于亚原子粒子（称为八重道粒子）的分类规划。这种命名来自于佛教中的八正道 (Eightfold Way)。这是佛教认为可以达到至善至美的中庸之道。为了解释这一规划，Gell-Mann 引入了基本夸克，使他在 1969 年获得了诺贝尔物理学奖。

简单地说，一个粒子对应于希尔伯特空间上哈密顿作用的特征函数。如果一个李群保持哈密顿作用（或与之交换），那么哈密顿作用的特征空间就是表示空间。同一个特征空间中的状态有许多共同的性质。除了有时出现的退化现象，特征空间给出了群的所有不可约表示，并且属于一个不可约子空间的特征函数（或状态）自然地形成初等粒子的多重态。在 20 世纪 60 年代初期，许多新的亚原子结构被发现，可是缺少一致的组成结构。李群 $SU(3)$ 的加权空间分解给出了粒子多重态的参数化。一个相关的特别重要的表示是李代数 $SU(3)$ 的伴随表示。它是八维的，所以命名为八重道。一些新的粒子最早就是由这个分类所预言，后来由实验加以证实的。



李政道与杨振宁

除了这些和 $SU(3)$ 的平凡表示，只有另一个十维的表示很自然地出现。$SU(3)$ 在 $\mathbb{C}^3$ 上的标准表示并不出现。这个标准表示中的三个权向量被 Gell-Mann 称为夸克。对表示的标准运算，如取张量和对称积可以用来解释和澄清亚原子粒子的某些结构。在这个意义来说，$SU(3)$ 代表了宇宙的对称（或者更加谦虚地说，代表了亚原子世界的对称）。详细请参看 [23, Chap 5]。

对称在物理学中的其他应用，请看杨振宁先生的文章 [Ya2]。

对称空间

在上面的各节中，我们讨论了欧氏空间、双曲平面（即庞加莱圆盘）中的对称物体和对称模式。

虽然前面没有提，可是直觉告诉我们，这些空间一定是对称的，至少具有丰富的对称性质。事实上，这个条件是必要的。

我们发现，它们是一类非常重要、被称为对称空间的黎曼流形的两个实例。对称空间的定义比对称物体的定义要复杂得多。在此我们只做简要讨论。

在 $\mathbb{R}^n$ 中，任意两个都没有区别，因为我们总可以用一个等距平移把一个点变到另一个点。具有这种性质的空间称为齐性空间。在 $\mathbb{R}^n$ 中，一个更强的性质是，任意两点处的任意两个方向都是一样的，也就是说可以用一个等距，把一个方向变到另一个方向。这些性质双曲平面也同样具有，可是这还不是对称空间的正确定义。

对称空间的正确定义是说，在每一个点处，相对于它的反射都是空间的

整体等距。我们很容易验证欧氏空间和双曲平面是对称空间。

对称空间的另一个重要例子是复平面 $\mathbb{C}^2$，但它不满足上面两个条件。

对称空间定义以后，一个自然的问题是，它们是否与李群相关？我们已经强调过李群是对称概念的严格数学基础。回答当然是肯定的。对称空间与李群的关系仍然是数学中的一个活跃的研究领域。比如，朗兰兹纲领的几何背景就由对称空间及其商空间构成。

注记

对称在许多场合中出现。完美的宇宙，对称是其中的重要一环。完美的理想化总是通过对称表现出来。

有许多专题本文中并未提及。其实，关于对称的不同方面有许多专著。这里向读者推荐一二。

外尔有一本经典的书 [26]。一本最近的且比较容易的书是 Walser 撰写的 [25]。几本其他关于对称的书请参考文献 [8], [16], [20], [10]。

关于对称在化学中应用的介绍，请看 Heibronner 和 Dunitz 的书 [9]。有关几何与对称在艺术和生活中的应用请看 Ghyka 的 [6]。

关于物理学中的对称，请看 Feynman 的书 [5]，还有 Wigner 的 [27]，以及前面提到过的杨振宁的文章 [29]。

参考文献

[1] M Armstrong. *Groups and Symmetries*. Springer, 1988.

[2] H Coxeter. *Regular Polytopes*. The Macmillan Co., 1963.

[3] P Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge University Press, 1997.

[4] K Devlin. *Mathematics: The Science of Patterns*. Scientific American Library, 1997.

[5] R Feynman. *The Character of Physical Law*. The Modern Library, 1994.

[6] M Ghyka. *The Geometry of Art and Life*. Dover, 1977.

[7] T Hales, P Sarnak, M Pugh. Advances in random matrix theory, zeta functions, and sphere packing. *Proc Natl Acad Sci USA* 97 (2000) 12963−12964.

[8] I Hargitta, M Hargitta. *Symmetry: A Unifying Concept*. Shelter Publications, Inc., 1994.

[9] E Heilbronner, J Dunitz. *Reflections on Symmetry*. Verlag Helvetica Chimica Acta, Basel, 1993.

[10] S Jablan. *Theory of Symmetry and Ornament*. Beograd, Matematicki Institut, 1995.

[11] M Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer Math Monthly* 73 (1966) No. 4, part II, 1−23.

[12] N Katz, P Sarnak. Zeroes of zeta functions and symmetry. *Bull Amer. Math Soc*, 1999, 36, 1−26.

[13] M Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.

[14] M Kline. *Mathematics in Western Culture*. Oxford University Press, 1953.

[15] M Livio. *The Golden Ratio*. Broadway Books, 2002.

[16] L Lederman, C Hill. *Symmetry and the Beautiful Universe*. Promethus Books, 2004.

[17] T D Lee. The weak interaction: its history and impact on physics. In: L Bergström, U Lindström. *The Oskar Klein Memorial Lectures*, vol. 3. pp. 1−31, World Scientific, 2001.

[18] J Marsden, T Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry*. Springer, 1994.

[19] R Penrose. Hermann Weyl, space-time and conformal geometry. In: K Chandrasekharan. *Hermann Weyl, 1885—1985*. Springer, 1986, pp. 23−52.

[20] J Rosen. *Symmetry Discovered*. Dover, 1998.

[21] L Shlan. *Arts & Physics*. Perennial, 1993.

[22] A Shubinikov, V Koptsik. *Symmetry in Science and Art*. Plenum Press, 1974.

[23] S Sternberg. *Group Theory and Physics*. Cambridge University Press, 1994.

[24] I Stewart, M Golubitsky. *Fearful Symmetry*: *Is God a Geometer*? Oxford University Press, 1992.

[25] H Walser. *Symmetry*. A volume in: MAA Spectrum. Mathematical Association of America, Washington DC, 2000. xii+95 pp.

[26] H Weyl. *Symmetry*. In: Princeton Science Library. Princeton University Press, 1989.

[27] P Wigner. *Symmetries and Reflections*. Indiana University Press, 1967.

[28] C N Yang. Hermann Weyl's contribution to physics. In: K Chandrasekharan. *Hermann Weyl, 1885—1985*. Springer, 1986, pp. 7−21.

[29] C N Yang. Symmetry and physics. In: G Ekspong. *The Oskar Klein Memorial Lectures*, vol. 1, pp. 11−33, World Scientific, 1991.

[30] A Zee. *Fearful Symmetry*. In: Princeton Science Library. Princeton University Press, 1999.

数学与音乐

陈秀惠

陈秀惠，美国密歇根音乐教师协会 (MMTA) 成员，美国国家钢琴教师协会 (NGPT) 会员。由于在钢琴教学方面的杰出成就，她在 2002 年入选 NGPT 名人堂。

著名数学家西尔维斯特 (Sylvester) 曾说过："难道不可以把音乐描述为感觉的数学，把数学描述为理智的音乐吗?" 19 世纪数学家傅里叶 (Fourier) 的工作对音乐的研究达到顶点。他证明所有的器乐和声乐都可用数学式来描述，这些数学式是简单的周期正弦函数的和。每一个声音有三个性质，即音高、音量和音质，将它与其他乐声区别开来。音高与曲线的频率有关，音量和音质分别与周期函数的振幅和形状有关。傅里叶的发现使声音的这三个性质可以在图形上清楚地表示出来。

西尔维斯特

傅里叶

对音乐的数学分析，使得电脑等高科技手段能大量应用于音乐创作和乐器设计。周期函数的性质在乐器的现代设计和声控计算机的设计方面是必不可少的。许多乐器制造者把他们的产品的周期声音曲线与这些乐器的理想曲线相比较，电子音乐录制的保真度也与周期曲线密切相关。音乐家和数学家的协作将继续在音乐的创作和录制方面发挥重要的作用。

诸如上述的关于数学与音乐的联系已经有了许多研究。这两个领域的交织是许多科技展览的热门话题。一种较为流行的说法是，指尖与琴键间不断地有节奏的接触生成了一系列温和、律动的刺激，通过神经系统的传达，可以起到增进智力、促进大脑发育的功效。作为一个钢琴教师，我总是被音乐与数学这两个非常不同的学科之间的关系所吸引。可惜我不是音乐或数学的专业研究人员，所以无法给出有力而系统的证据来支持我的论断。在这篇文章中，所给出的是在我 25 年的钢琴教学生涯中，对所接触到的学生的观察中得出的体会。

从我童年起，到大学，甚至一直到成为两个孩子的母亲以后，音乐与数学都是我日常生活的一部分。还在读大学的时候，我就开始做钢琴家教了。在教琴过程中，我也不断地从孩子们身上增长见识。这种经历使我有难得的机会来观察他们在音乐或者科学方面的发展。我的学生既有牙牙学语的 3 岁稚童，也有 50 多岁的成年人，但大多数还是小学生。他们中的许多人不仅要与童年荷尔蒙、多变的脾气做斗争，还要应付来自家长与同学间竞争的压力。掌握一段复杂的钢琴乐章可能是一段苦恼的经历，可是当亲手弹奏一首美妙的钢琴曲时，那悠扬的琴声足以抚平烦躁的情绪和保持宁静的思绪。我所感兴趣的是研究钢琴学习对于提升儿童（3 ～ 12 岁）数学修养的作用。我们的讨论将主要围绕以下三个方面。

1. 扎实的数学教育如何有助于学生音乐素养的发展?
2. 音乐在学生的生活中如何帮助他们学习数学?
3. 数学与音乐的联系究竟怎样?

扎实的数学教育如何有助于学生音乐素养的发展?

有许多学者做了大量工作，试图验证在孩童时期学习一种器乐可以促进智力发育。世界各地许多医生和护士开始向新生儿的家长们建议，在给婴儿喂食的时候，可以放一些古典音乐，他们相信这样可以促进大脑某些部位的发育。作为一名音乐教师，我特别关注的是，孩子什么时候可以从被动的聆听转为主动地演奏乐器。

什么时候可以说一个孩子已经有能力接受音乐课程了呢？比如，在我的经验中，一个 3 岁的孩子总是比一个 10 岁左右的孩子缺少耐心。幼童大约

只能集中注意力听老师讲半个小时，然后就会心烦意乱。对这些孩子，我一开始总是教他们五个手指的概念：也就是 1 ~ 5 这五个数。每只手有五个手指，我们每天都会用它们来抓食物、捏拳头、开门等等。我们用双手做许多事情。音乐要求五个手指注意力高度集中，特别是钢琴。钢琴演奏者需要两手并用，紧跟乐谱上的指法。钢琴家需要对手指有精确的控制力，因为钢琴要求同时协调地使用两手十指。一旦学生开始用双手演奏音乐，很重要的一点就是，不论孩子有多小，我都要求他们把 1, 2, 3, 4, 5 对应到拇指、示指、中指、无名指和小指，如图 A 所示。我要求他们牢记手指和数字的对应关系，直到烂熟为止。只有当他们已经熟练地掌握了这一基本概念以后，才会开始教他们读乐谱。

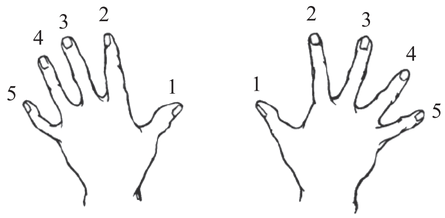
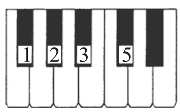


图 A

无论怎么强调五指模式的重要性，都是不过分的，特别是对那些年轻的初学者而言。图 B 描述了怎样用简单的手指规则来演奏图 C 中的五线谱。我经常用这种图例来帮助孩子理解与强化手指与数字的对应关系。



3 2 1 2 3 3 3 2 2 2 3 5 5

Mer - ri - ly we roll a - long, Roll a - long, Roll a - long,

3 2 1 2 3 3 3 2 2 3 2 1

Mer - ri - ly we roll a - long, o’er the deep blue sea.

图 B

除了强调手指的序数外，我也向各个年龄的学生们解释相关的数学概念。为了使他们更好地适应今后在音乐上将会遇到的挑战，我必须让他们拥有良好的数学基础，虽然有时候他们因为太年幼而对数学无甚感觉。音乐的拍子记号总是出现在五线谱的最左端。

关于儿童学习行为的许多研究都表明，如果孩子经常接触实际的例子，就

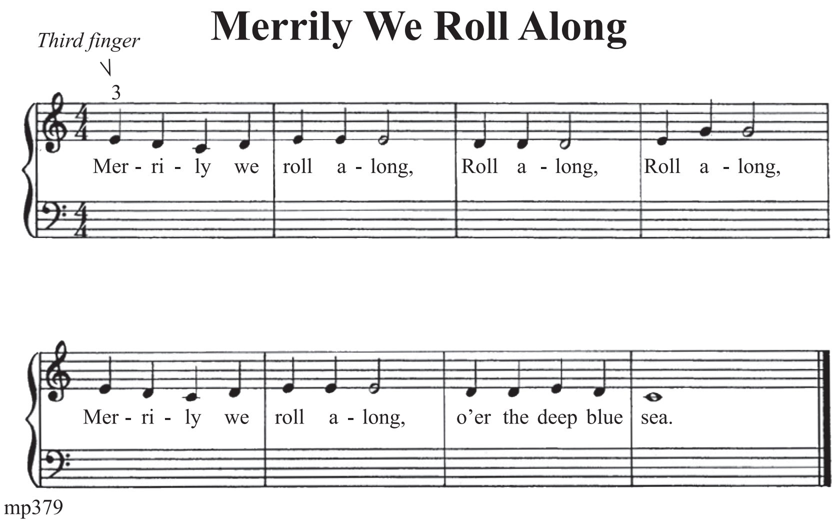


图 C

会更适应数学概念。实例教学是一种值得推广的教学方法。五指模式与不同的节拍计数方法是钢琴教学中的两个例子。在小学的一年级，我们常常可以看到，接受过钢琴训练的孩子与那些未接触过这些数学概念的孩子相比，明显拥有更多优势。一旦他们进入一二年级，他们能够更快地掌握初等的算术技巧。

比如加减之类的基本数学概念，对于音乐学习是非常有效的。这不仅对年幼的初学者有效，对中级和高级的钢琴家也有帮助。事实上，对于想在钢琴演奏上更上一层楼的人来说，拥有坚实的数学基础是很重要的，这可以帮助他们演绎出完美无瑕的乐章来。大多数学生演奏平均节拍的音乐没有什么困难，例如，在我所称的“二配一”（一只手是 1/4 拍，另一只手是 1/8 拍），或者“四配一”（一只手是 1/16 拍，另一只手是 1/8 拍）。可是，有些乐章要求一只手是三连音，而另一只手是 1/8 拍。我称之为“三对二”。这种音乐要求高度集中注意力才能准确地演奏出来。在演奏水平不断提高的同时，学生们会不可避免地遇到更加复杂的乐章，需要两只手有更高程度的协调性，比如“五对三”等等。简化音调符号是一种非常有用的方法，可以帮助学生掌握具有复杂拍号的乐章的技巧与结构。学生们应该用他们建立在实践基础上的数学观念，来完善他们所需要的记忆力。这也同时训练他们发展两手的高度平衡来迎接所要面对的挑战。

从技术层面来看，可以解释为何数学能够帮助学生更好地消化、理解和解释复杂的音乐章节。这对于完全依靠计算节拍来达到两手完美协调的钢琴师来说，尤为重要。通过对大量学生所做的观察，我还注意到一个有趣的现象，不妨与感兴趣的读者分享。

在 Ann Arbor 地区学校的初中和高中生每年都要参加“独奏与合唱”音乐会，其中管弦乐队与学生们可以在专业的音乐家面前表演他们的拿手绝技，音乐家会对他们的表现给出一个 1 ～ 5 之间的分数（1 表示最好）。获得 1 分的学生将能够继续参加密歇根州的半决赛。这是一项极为难得的荣誉，吸引了整个州的狂热学生前来参加。我注意到，大多数获得认可能够进入州一级比赛的学生的数学成绩都是相当不错的。

音乐在学生的生活中如何帮助他们学习数学?

在学习和演奏音乐的过程中，可以增长数学的技能。有研究表明，欣赏音乐可以放松和舒缓来自于学习工作和人际关系等日常生活中的精神压力。听音乐是放松，而研习音乐则需要积极的投入。比如阅读钢琴曲，我们要按照音符，随着五线谱上的和音，谨记指法，这些都是同时进行的。所有这些功能都要求有很强的记忆力，精细的手眼协同能力，以及一种难以定义的素质，姑且称之为“触觉”。练习钢琴要求学生把肌肉与脑力都发挥到极致。

掌握数学需要逻辑、理解与材料的组织，也需要拥有把新学到的概念与已有知识结合加以理解的能力。音乐把对这种能力的要求推向极致，特别是当一个学生在公众或评委面前忘我演奏的时候。如果一个学生在一次独奏会上因为某种不可预料的原因忘记了乐谱，如果他有充分的日常训练，那么他的潜在记忆就会自动使他保持演奏而不走调。一旦学生发展了音符与乐谱的能力与思维，以及简单的算术运算能力与眼脑协调，那么掌握更加高深的数学概念就会变得非常自然。以下是我在教学过程中接触到的三个实例。

实例一：Lucy Huang 是一个 10 岁的女孩子。她 9 岁时就来我的音乐工作室学习。与其他学生相比，她学习钢琴课程的起步已经有些晚了。当她开始听课以后，我发现她非常拼命，可以说是挣扎着阅读乐谱。她的前进轨迹与我的其他学生相比，并不那么令人满意。可是，在 6 个月的课程中，她坚持不懈地完成我布置的练习（每天一小时），包括了不同难度的指法练习。我注意到，她听课更专心了，全心投入的时间也更长了。随着时间的推移，学习新的乐谱对她来说变得越发容易。后来我把自己的观察告诉 Lucy，她很开心地说，她不再对数学课感到无所适从了。现在她可以很轻松地理解计算方法，掌握新的概念。

实例二：我在过去 25 年中教过许多学生，有一位学生让我印象最为深刻。Michelle Mei，今年 15 岁，她在 8 岁时跟我学琴。有时我和她的父母在电话里谈论 Michelle 在学琴方面的进展，她的父亲会提到她的数学不是很好，特别是对于新概念和新老知识的衔接学习上有些困难。Michelle 一向喜欢音乐，所以她的父亲希望也许学习音乐可以促进她的智力发育，从而对她的学

业有所帮助。在 7 年中，Michelle 每周都来上课，也认真完成练习。她的进步轨迹在第一年的时候很一般。可是当她开始变得主动性更强时，她花在练琴上的时间也逐步增加到每天 2 ~ 3 个小时。她的父母和我都明显地注意到她的演奏技巧也发生了突飞猛进的变化。不久，她的父母告诉我，Michelle 的数学成绩也有了长足进步，甚至连西班牙语和英语成绩也提高了。Michelle 在过去三年中研读和背诵了大量的乐谱。我相信，她在音乐上坚持不懈的努力使她的逻辑思维和信息组织能力都得到了提高，她的数学成绩就是明证。现在，她是中学二年级学生，也是学校里的音乐和学习明星。

实例三：Robin He 是另一个可以表明音乐在儿童智力发展中具有渗透作用的、与众不同的例子。Robin 在 6 岁时开始学琴。他的父母注意到随着音乐技能的提高，他的数学能力也有了很大的进步。三年后，他在北美 Kumon 数学竞赛中获得了 4 年级组第一名。后来他又获得 6 年级组的第二名以及 7 年级组的第一名。所有这些荣誉都伴随着丰厚的奖学金。他的父母深信，练琴在 Robin 数学能力的发展中起了重要的作用。Ann Arbor 地区的学校有一项非常受欢迎的活动，就是"趣味数学竞赛"。通过校际的比赛来推动学习数学的热情。学生们通过多轮的比赛，最后进入半决赛和决赛一争高下。令人兴奋的是，代表我家附近的学校 Clague 中学进军地区决赛的学生中的大多数，都是我钢琴课上的学生。这个现象也许意味着在某种程度上，音乐确实有助于学生们发挥出更强的数学潜能。

数学与音乐的联系究竟怎样?

许多历久不衰的名篇，如贝多芬的第一交响曲、肖邦的夜曲、莫扎特的钢琴奏鸣曲，其中都精心融入了许多数学的对称与和谐。我让学生详细研究乐曲的结构，每一个乐章都有不同的频率，每一小节的拍数也不尽相同，哪个音符对上节拍，何时提起或放下脚踏板，何时打断圆滑线，以及一组颤音中应该包含多少个音符等等。只是简单地对着乐谱依样弹奏不会让学生得到太多好处。只有从数学的角度细致研究了音符的结构以后，学生们才能够真正理解复杂的旋律背后，作曲家那极具匠心的功力所在。

最后，我想借这个机会把自己在音乐与数学上的经历与大家共享。1957 年我出生于一个典型的中产阶级家庭，是 6 个兄弟姐妹中最小的一个。我的父亲是化肥厂的电子工程师。虽然他微薄的工资刚好凑合养活一个 8 口之家，可是他坚定地相信良好的教育是孩子们未来发展的重要条件。于是父亲还兼做零工补贴家用，以支付孩子们的教育费用。虽然当时我还小，但也能够理解父母的不易。从小学到高中，我都很用功地学习。我的数理成绩也总是很出色。那些非常晦涩的概念与逻辑对我来说都非常自然，我甚至想过做一个

科学家或工程师。可是我从小就有做一个钢琴家的梦想，对于我这样一个出生卑微的孩子，能够让这个难以企及的梦想得以实现是多么的令人振奋啊。靠着我优异的学习成绩和对钢琴不懈的热爱，终于说服了我的父母。从我的小学到高中，我都坚持了自己的理想和我对父母的承诺。当我从台北第一女子高中毕业时，我得到了所能给予优秀学生的最高荣誉。在完成学业的同时，我一直都没有放弃钢琴训练，甚至是在我面临着大学入学考试的沉重压力的关头。很长时间以来，我都觉得我之所以能够在学业上一直保持优秀的原因是，为了让父母支持我学钢琴，我总是非常努力地在学习上证明给他们看。可是，我也很清楚地记得，在我学琴以后，我的成绩突然有了很大提高。在我自己开始教琴以后，我才意识到，我在数学推理和逻辑上的能力在潜移默化中提高了我的音乐素养。回想我的音乐与求学生涯，我深深地相信我在数学上的良好训练帮助我更好地分析和理解音乐的结构，使我在提高钢琴演奏水平的道路上，克服了许多技术上的障碍。同样数学也给予我许多教学上的灵感，让孩子们在学琴道路上少走了许多弯路。我很欣慰地看到，我的学生中有许多人已经在琴艺上超过了当年的我。

总之，我个人的经历告诉我，音乐帮助孩子发展理解数学概念的能力，反过来，拥有良好的数学基础，是学习音乐的巨大优势。