第三章　Hilbert 空间上的有界线性算子

由于 Hilbert 空间中存在正交基,因此其空间的几何性质比 Banach 空间要丰富得多,Hilbert 空间上的有界线性算子理论也比 Banach 空间情形更加深刻,特别是Hilbert空间上的自伴算子理论形成了有界线性算子理论中的最完美部分.

§1　投影定理与 Fréchet-Riesz 表示定理

1.1　投影定理

我们在第二章中曾指出,Banach 空间的子空间未必有补子空间.然而,在 Hilbert 空间中,任意子空间都有正交补子空间,这就是著名的投影(射影)定理.这也是 Hilbert 空间几何性质比 Banach 空间丰富的原因之一.

定理 1(投影定理)　设 M 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间,则存在唯一的闭子空间 N,满足

(i) $M \perp N$;

(ii) $H=M+N$,即对任意 $x \in H$,存在 $y \in M$ 与 $z \in N$,使得 $x=y+z$.

注　通常称 y 为 x 在 M 中的正交投影,称 N 为 M 在 H 中的正交补,记作$N=M^{\perp}$.即使 M 是 H 中任一集合,也有正交补概念,见后面的定义 1.不难看出,对任意 $x \in H$,表示式 $x=y+z$ 是唯一的,事实上,若另有 $y' \in M, z' \in N$,使得 $x=y'+z'$,则由 $y+z=y'+z'$得 $y-y'=z'-z$,从而 $y-y' \in M \cap N$,然而由(i)有 $M \perp N$,故$(y-y', y-y')=0$,于是 $\|y-y'\|=0$,故 $y=y'$,进一步 $z=z'$.

证明　显然,M 也是 Hilbert 空间,从而有一组正交基,设为$\{y_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$,记 $N=\{z \in H \mid z \perp M\}$,则 $M \perp N$.对任意 $x \in H$,由第一章 §3 引理 1 的证明知,使$(x, y_\alpha) \neq 0$ 的 α 最多只有可数个,记为$\{(x, y_{\alpha_i})\}_{i=1}^{\infty}$,则对任意 $\alpha \in \Lambda, \alpha \neq \alpha_i, i=1, 2, \cdots$,$(x, y_\alpha)=0$.令

$$y=\sum_{i=1}^{\infty}(x, y_{\alpha_i}) y_{\alpha_i},$$

由 Bessel 不等式知 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|(x, y_{\alpha_i})|^2 \leqslant \|x\|^2$,从而上式右端级数收敛.由于 M 是 H 中的闭集,所以 $y \in M$.

记 $z=x-y$,对任意 $\alpha\in\Lambda$,若 $\alpha=\alpha_j$,则

$$
\begin{aligned}
(z,y_{\alpha_j})&=(x,y_{\alpha_j})-(y,y_{\alpha_j})\\
&=(x,y_{\alpha_j})-\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x,y_{\alpha_i})y_{\alpha_i},y_{\alpha_j}\right)\\
&=(x,y_{\alpha_j})-(x,y_{\alpha_j})=0,
\end{aligned}
$$

若 $\alpha\neq\alpha_j$,则

$$(z,y_\alpha)=(x,y_\alpha)-\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x,y_{\alpha_i})y_{\alpha_i},y_\alpha\right)=0.$$

这说明对任意 $\alpha\in\Lambda$,$(z,y_\alpha)=0$,故 $z\perp M$,即 $z\in N$,由 x 的任意性知 $H=M+N$.

为证唯一性,假设另有 $N'\subset H$,满足(i),(ii),则由 N 的定义知显然有 $N'\subset N$.对任意 $z\in N$,由于 N'满足(ii),故存在 $y\in M$,$\tilde{z}\in N'$,使得 $z=y+\tilde{z}$,于是 $z-\tilde{z}=y\in M$,但因 $N'\perp M$,$N\perp M$,所以 $z-\tilde{z}\perp M$,因此 $z-\tilde{z}\perp y$,这说明 $\|z-\tilde{z}\|^2=(z-\tilde{z},y)=0$,故 $z=\tilde{z}$,即 $z\in N'$,唯一性得证.综上,定理证毕.

可以证明,对 H 的任意闭子空间 M,有$(M^\perp)^\perp=M$,即使 M 是非闭的线性子空间,我们也有类似的结论.

定义 1　设 M 是 Hilbert 空间 H 的子集,记 $M^\perp=\{y\in H\mid(y,x)=0,\forall x\in M\}$,称 $M^\perp$ 为 M 在 H 中的**正交补**.

定理 2　设 M 是 Hilbert 空间 H 的线性子空间,则 $\overline{M}=(M^\perp)^\perp$.

证明　不难证明$(M^\perp)^\perp$是 H 的闭子集.事实上,它是 H 的闭子空间,由正交补定义显然有 $M\subset(M^\perp)^\perp$,于是 $\overline{M}\subset(M^\perp)^\perp$.

现设 $x\in(M^\perp)^\perp$,由于 $\overline{M}$ 是 H 的闭子空间,故由定理 1 知存在 $y\in\overline{M}$,$z\in\overline{M}^\perp$,使得

$$x=y+z,$$

由 $z\perp\overline{M}$ 知 $z\perp M$,即 $z\in M^\perp$,从而$(x,z)=0$,于是由 $y\perp z$ 得

$$(z,z)=(y+z,z)=(x,z)=0,$$

故 $z=0$,这说明 $x=y\in\overline{M}$.证毕.

注　如果 M 是 Hilbert 空间 H 中的任一闭子集,则上述定理 2 的结论一般是不成立的,但若记 $L(M)$为含 M 的所有 H 的闭子空间之交,即 $L(M)$为含 M 的最小的闭子空间,则有 $L(M)=(M^\perp)^\perp$,其证明与上面的证明相仿.通常称$L(M)$为 M **张成的 H 之子空间**.

1.2　Fréchet-Riesz 表示定理

我们在上一章已经看到了对偶空间(或共轭空间)的影响,它在众多的问题中起着重要作用,由于它的重要性,我们有必要研究 Hilbert 空间的对偶问题,有意思的是,Hilbert 空间的对偶空间在共轭同构意义下就是它本身,这便是

Fréchet-Riesz 表示定理.

设 H 是 Hilbert 空间,显然,对任意 $y \in H$,

$$f_y(x) = (x, y)$$

定义了 H 上的一个线性泛函,由于 $|f_y(x)| = |(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$,可见 f_y 是 H 上的有界线性泛函,并且 $\|f_y\| \leqslant \|y\|$,如果取 $x=y$,则得 $|f_y(y)| = \|y\|^2$,于是又有 $\|f_y\| \geqslant \|y\|$,所以 $\|f_y\| = \|y\|$,因此,映射

$$i: y \mapsto f_y$$

是 H 到 H^* 的一个等距映射.

一个自然的问题是:H^* 中除了形如 $f_y(x) = (x, y)$ 的泛函,还有没有别的泛函?换句话说,映射 i 是不是一个满射?Fréchet-Riesz 表示定理正是对上述问题的一个完满回答.

定理 3(Fréchet-Riesz 表示定理)　设 $f \in H^*$,则存在唯一的 $y_f \in H$,使得

$$f(x) = (x, y_f), \quad \forall x \in H,$$

且

$$\|f\| = \|y_f\|.$$

证明　唯一性是平凡的,事实上,若有 $y_f, \tilde{y}_f$ 定义了同一个 f,则对任意 $x \in H$,

$$f(x) = (x, y_f) = (x, \tilde{y}_f),$$

于是 $(x, y_f - \tilde{y}_f) = 0$,特别地,取 $x = y_f - \tilde{y}_f$,则得 $\|y_f - \tilde{y}_f\|^2 = 0$,所以 $y_f = \tilde{y}_f$.

为证存在性,记 $M = \ker f = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$,则 M 显然是 H 的一个闭子空间,如果 $M = H$,则 $f = 0$,此时取 $y_f = 0$ 即可,故不妨设 $M \subsetneqq H$,从而 $M^\perp \neq \{0\}$,对任意 $x \in H$,记

$$x = x_M + x_{M^\perp}, \quad x_M \in M, \quad x_{M^\perp} \in M^\perp,$$

则 $f(x) = f(x_{M^\perp})$,显然,只要 $x_{M^\perp} \neq \{0\}$,则 $f(x_{M^\perp}) \neq 0$,取定 $x_{M^\perp}^{(0)} \in M^\perp \setminus \{0\}$,对任意 $x \in H$,令 $k = f(x)/f(x_{M^\perp}^{(0)})$,则

$$f(x) = kf(x_{M^\perp}^{(0)}) = f(kx_{M^\perp}^{(0)}),$$

因此 $f(x - kx_{M^\perp}^{(0)}) = 0$,这说明 $x - kx_{M^\perp}^{(0)} \in M$,故得到 x 的分解

$$x = x - kx_{M^\perp}^{(0)} + kx_{M^\perp}^{(0)},$$

将上式两边与 $x_{M^\perp}^{(0)}$ 作内积得

$$(x, x_{M^\perp}^{(0)}) = k\|x_{M^\perp}^{(0)}\|^2,$$

于是 $k = (x, x_{M^\perp}^{(0)} / \|x_{M^\perp}^{(0)}\|^2)$,即

$$f(x) = kf(x_{M^\perp}^{(0)}) = \left(x, \frac{x_{M^\perp}^{(0)}}{\|x_{M^\perp}^{(0)}\|^2}\right) f(x_{M^\perp}^{(0)})$$

$$= \left(x, \frac{\overline{f(x_{M^\perp}^{(0)})}}{\| x_{M^\perp}^{(0)} \|^2} x_{M^\perp}^{(0)} \right).$$

记 $y_f = \dfrac{\overline{f(x_{M^\perp}^{(0)})}}{\| x_{M^\perp}^{(0)} \|^2} x_{M^\perp}^{(0)}$，则 y_f 即为所求.

至于等式 $\|f\| = \|y_f\|$ 的证明则已包含在本段一开始的说明中.证毕.

虽然我们证明了 $i: H \to H^*$ 是一一对应且映上的保范映射，但我们还不能说 H 与 H^* 是同构的，因为我们所指的同构通常要保持线性结构，然而 i 并不是一个线性映射，例如，对任意 $y_1, y_2 \in H$ 及 $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$，记 $f_1 = i(y_1)$，$f_2 = i(y_2)$，$f_3 = i(\alpha y_1 + \beta y_2)$，则

$$\begin{aligned} f_3(x) &= (x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha}(x, y_1) + \bar{\beta}(x, y_2) \\ &= \bar{\alpha} f_1(x) + \bar{\beta} f_2(x) = (\bar{\alpha} f_1 + \bar{\beta} f_2)(x), \end{aligned}$$

可见 $f_3 = \bar{\alpha} f_1 + \bar{\beta} f_2$，即

$$i(\alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} i(y_1) + \bar{\beta} i(y_2),$$

这就是说，i 是共轭线性映射，而非线性映射.

我们可以在 H^* 中定义内积如下：

$$(f, g) = \overline{(y_f, y_g)},$$

此处 y_f, y_g 分别为 f, g 在 i 下的原像.

不难验证在此内积下，H^* 构成 Hilbert 空间，此时，我们可以说 $i: H \to H^*$ 是两个 Hilbert 空间之间的**保范共轭线性**双射，这样的两个空间通常称作**共轭同构**.若对共轭同构的 Hilbert 空间不加区别，则有 $H^* = H$.

1.3 Hilbert 共轭算子

Hilbert 空间 H 上有界线性算子的共轭与 Banach 空间稍有不同，按 Banach 空间情形下的定义，对任意 $T \in L(H)$ 及 $f \in H^*$，$x \in H$，有

$$T^* f(x) = f(Tx).$$

由 Fréchet-Riesz 表示定理，存在 $y_f \in H$，使得 $f(x) = (x, y_f)$，从而

$$f(Tx) = (Tx, y_f), \quad \forall x \in H.$$

另一方面，由于 $T^* f \in H^*$，故存在 $y_{T^* f} \in H$，使得

$$T^* f(x) = (x, y_{T^* f}), \quad \forall x \in H.$$

于是 $(Tx, y_f) = (x, y_{T^* f})$，$y_{T^* f}$ 与 y_f 是什么关系？是否必有 $y_{T^* f} = T^* y_f$？如果该等式恒成立，则意味着

$$(Tx, y_f) = (x, T^* y_f).$$

现在以 λT 替代 T，按等式 $\lambda f(Tx) = f(\lambda Tx) = (\lambda T)^* f(x)$ 应有 $(\lambda T)^* = \lambda T^*$，然

而将 λT 代入 $(Tx,y_f)=(x,T^*y_f)$ 得

$$(x,(\lambda T)^*y_f)=(\lambda Tx,y_f)=\lambda(Tx,y_f)=\lambda(x,T^*y_f)=(x,\bar{\lambda}T^*y_f),$$

可见 $(\lambda T)^*y_f=\bar{\lambda}T^*y_f$，这就是说在 Banach 空间对偶意义下，等式 $(Tx,y_f)=(x,T^*y_f)$ 可以不成立，由于我们是在共轭线性同构下将 H 与 H^* 等同，如果沿用 Banach 空间上的共轭算子的定义，等式 $(Tx,y)=(x,T^*y)$ 一般不成立，这样 Hilbert 空间中的许多性质使用起来很不方便，所以我们有必要重新探讨 Hilbert 空间上共轭算子的定义.

设 T 是 Hilbert 空间 H_1 到 H_2 的有界线性算子，对任意 $y\in H_2$，记

$$f(x)=(Tx,y),\quad \forall x\in H_1,$$

则 $|f(x)|=|(Tx,y)|\leqslant\|Tx\|\cdot\|y\|\leqslant\|T\|\ \|x\|\cdot\|y\|$，故 f 是 H_1 上的有界线性泛函，由 Fréchet-Riesz 表示定理知，存在唯一的 $y_f\in H_1$，使得

$$f(x)=(x,y_f),\quad \forall x\in H_1,$$

不难验证 y_f 由 y 唯一确定，因此，可以定义

$$T^*y=y_f,$$

容易证明 T^* 是 $H_2(=H_2^*)$ 到 $H_1(=H_1^*)$ 的有界线性算子，称 T^* 为 T 的**Hilbert共轭算子**.

由上述定义可见

$$(Tx,y)=(x,T^*y),\quad \forall x\in H_1,y\in H_2.$$

现在我们来看看，Hilbert 共轭算子具有什么性质.

定理 4 设 H 是 Hilbert 空间，$S,T\in L(H)$，则

(i) $(S+T)^*=S^*+T^*$;

(ii) $(ST)^*=T^*S^*$;

(iii) $(T^*)^*=T$;

(iv) 对任意 $\alpha\in\mathbf{C}$，$(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$;

(v) 若 T 有有界逆，则 T^* 也有有界逆，且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*;$$

(vi) $\|T^*\|=\|T\|$.

证明 (i)与(ii)由定义直接验证可得. 为证(iii)，任取 $x,y\in H$，由 $(Tx,y)=(x,T^*y)$ 知

$$(x,(T^*)^*y)=(T^*x,y)=\overline{(y,T^*x)}=\overline{(Ty,x)}=(x,Ty),$$

由 x,y 的任意性得 $(T^*)^*=T$.

下证(iv). 对任意 $x,y\in H$，

$$\begin{aligned}(x,(\alpha T)^*y)&=((\alpha T)x,y)=\alpha(Tx,y)=\alpha(x,T^*y)\\&=(x,\bar{\alpha}T^*y),\end{aligned}$$

故而$(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$.

再证(v),不难验证$I^*=I$,由于$TT^{-1}=T^{-1}T=I$,故由(ii)得

$$T^*(T^{-1})^*=(T^{-1}T)^*=I^*=I,$$

$$(T^{-1})^*T^*=(TT^{-1})^*=I^*=I.$$

进而易知T^*有有界逆,且$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$.

至于(vi),由$\|Tx\|=\sup\limits_{\|y\|\leqslant 1}|(Tx,y)|$立得

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{\|y\|\leqslant 1}|(Tx,y)|\\&=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(x,T^*y)|=\sup_{\|y\|\leqslant 1}\|T^*y\|=\|T^*\|.\end{aligned}$$

证毕.

在第二章,我们曾就 Banach 空间X上的有界线性算子T证明了如下的对偶关系:

(i) $N(T^*)=\overline{R(T)}^{\perp}$;

(ii) $N(T)={}^{\perp}\overline{R(T^*)}$;

(iii) ${}^{\perp}N(T^*)=\overline{R(T)}$;

(iv) $\overline{R(T^*)}\subset N(T)^{\perp}$.

并指出(iv)可以是严格的包含关系.对于 Hilbert 空间上的有界线性算子T,(i)—(iv)是否仍然成立呢?下面的定理肯定地回答了这个问题.

定理 5　设T是从 Hilbert 空间H_1到 Hilbert 空间H_2的有界线性算子,则

(i) $N(T)=R(T^*)^{\perp}=\overline{R(T^*)}^{\perp}$;

(ii) $N(T^*)=R(T)^{\perp}=\overline{R(T)}^{\perp}$;

(iii) $\overline{R(T)}=N(T^*)^{\perp}$;

(iv) $\overline{R(T^*)}=N(T)^{\perp}$.

应该注意的是,由于H^*与H在共轭同构意义下相同,故(i)与(iii)中的零化子均是相对于H而言.

证明　对任意$x\in N(T)$,有$Tx=0$,从而对任意$y\in H_2$,

$$(x,T^*y)=(Tx,y)=0,$$

故$x\in R(T^*)^{\perp}$,即$N(T)\subset R(T^*)^{\perp}$.

反之,设$x\in R(T^*)^{\perp}$,则对任意$y\in H_2$,

$$(Tx,y)=(x,T^*y)=0,$$

从而$Tx=0$,即$x\in N(T)$.因此$N(T)\supset R(T^*)^{\perp}$.

综上得$N(T)=R(T^*)^{\perp}$,(i)得证.

由$\overline{R(T^*)}=[R(T^*)^{\perp}]^{\perp}=N(T)^{\perp}$立知(iv)成立.

(ii)与(iii)可类似证明.证毕.

§2 几类特殊算子

2.1 定义及例子

诚如我们在第二章最后所指出的,无限维空间上的算子的结构远比有限维空间复杂得多,迄今还没有一个关于一般算子结构的比较完整的理论,于是很长时期以来,人们致力于探讨一些特殊的算子,以期通过对这些算子的研究,为一般算子理论的研究带来启示与帮助.

从大的方面看,特殊算子有两类,一类是某些特殊空间上的算子,这类算子的一个显著特点是与函数论有着密切联系,从而可以借助函数论的方法和工具来研究,同时对函数论的发展也有促进作用,最具代表性的首推 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子,这类算子不仅为一般算子提供了丰富多彩的例子,也为函数论的研究注入了新的活力,特别是其指标理论的研究沟通了算子理论、拓扑、几何等学科的内在联系,形成了核心数学的一个重要组成部分.

另一类是一般空间上具有某些特殊性质的算子,例如可以通过代数的方法定义某些特殊算子.具体地说,这些算子可能满足某些代数方程,从而我们可以利用这些性质研究这类算子的一般理论.

本节主要讨论 Hilbert 空间上满足某些代数方程的几类特殊算子,至于函数空间上的算子,由于其理论的深度与广度均超出了本书的范围,故本书不作详细讨论.

定义 1 设 H 是 Hilbert 空间,$T\in B(H)$,

(i) 如果对任何 $x\in H$,$(Tx,x)\geqslant 0$,则称 T 为**正算子**,记为 $T\geqslant 0$.

(ii) 如果 $T^*=T$,则称 T 为**自伴算子**或**自共轭算子**.H 上的两个自伴算子 T_1,T_2 如果满足 $T_1-T_2\geqslant 0$,则记为 $T_1\geqslant T_2$.

(iii) 如果 $T^*T=TT^*$,则称 T 为**正规算子**.

(iv) 如果 $T^*T=TT^*=I$,则称 T 为**酉算子**.

注 显然,T 为自伴算子的充要条件是 $(Tx,y)=(x,Ty)$.进而,T 为自伴算子当且仅当对任何 $x\in H$,(Tx,x) 为实数.事实上,如果 T 为自伴算子,则 $(Tx,x)=(x,Tx)=\overline{(Tx,x)}$,从而 (Tx,x) 为实数.反之,如果对任意 $x\in H$,(Tx,x) 为实数,则有

$$(Tx,y)=\frac{1}{4}[(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)]+$$

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{i}}{4}[(T(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y)-(T(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)]\\=&\frac{1}{4}[(x+y,T(x+y))-(x-y,T(x-y))]+\\&\frac{\mathrm{i}}{4}[(x+\mathrm{i}y,T(x+\mathrm{i}y))-(x-\mathrm{i}y,T(x-\mathrm{i}y))]\\=&(x,Ty).\end{aligned}$$

可见 T 是自伴算子.

由此可以看出,正算子一定是自伴算子.显然,自伴算子与酉算子都是正规算子.

例 1　设 $H=L^2([a,b])$, $k(s,t)\in L^2([a,b]\times[a,b])$,算子 K 定义为

$$(Kf)(s)=\int_a^b k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t,\ s\in[a,b],\ f\in H,$$

则 K 是 $L^2([a,b])$ 上以 $k(s,t)$ 为核的积分算子.容易验证,K^* 是以 $\overline{k(t,s)}$ 为核的积分算子.

所以,K 是自伴算子的充要条件是 $k(s,t)=\overline{k(t,s)}$.

例 2　设 $H=l^2$, (a_{ij}) 是无穷矩阵 $(i,j=1,2,\cdots)$,满足:对任何 $x=\{\xi_j\}\in l^2$, $\boldsymbol{\eta}_i=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j$ 对每个 i 收敛且数列 $y=\{\boldsymbol{\eta}_i\}\in l^2$.定义算子 $A:x\mapsto y$,则 A 是 l^2 上的有界线性算子(请读者自行验证).通常称 A 是由矩阵 (a_{ij}) 表示的算子.可以验证 A^* 是由 $(\overline{a_{ji}})$ 表示的算子(见本章习题 5).

所以,A 为自伴算子的充要条件是 $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$.

例 3　设 H 是 Hilbert 空间,M 是 H 的闭子空间.由本章 §1 的投影定理,对任何 $x\in H$,有 $x=y+z$,其中 $y\in M$, $z\in M^{\perp}$,且这个表示式是唯一的.定义 $P:H\to H$ 为 $Px=y$,则 P 是 H 上的有界线性算子,且当 $x\in M$ 时 $Px=x$;当 $x\in M^{\perp}$ 时 $Px=0$,称 P 为 H 到 M 上的**正交投影算子**,简称为**投影算子**.

由于 $(Px,x)=(Px,Px)=\|Px\|^2\geqslant 0$,故 P 是正算子.

关于投影算子的性质,我们将在下一节详细讨论.

例 4　设 H 是可分的 Hilbert 空间,$\{e_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ 是 H 的正规正交基.H 上的算子 U 由 $Ue_n=e_{n+1}$ 定义,易验证 U 是 H 上的有界线性算子,$U^*e_n=e_{n-1}$,从而 $U^*U=UU^*=I$,即 U 是酉算子.通常称这个算子为**双侧位移算子**.

定义 2　Hilbert 空间上的有界线性算子 T 如果满足

$$(Tx,Ty)=(x,y),$$

则称 T 为**等距算子**.

注　不难验证,一个算子是等距算子的充要条件是 $T^*T=I$.一个等距算子 T

是酉算子的充要条件是 T 为满射. 从而酉算子一定是等距算子,但等距算子不一定是酉算子.

例 5 设 H 是可分的 Hilbert 空间,$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 H 的正规直交基. H 上的算子 S 由 $Se_n=e_{n+1}$ 定义,则 $S^*e_n=e_{n-1}(n\geqslant 2)$,$S^*e_1=0$,从而 $S^*S=I$,所以 S 是等距算子. 然而,由于 $e_1\notin R(S)$,故 S 不是酉算子. 通常称这个算子为**单侧位移算子**.

例 6 设 D 是复平面上的开单位圆盘,即 $D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$,$dA$ 是 D 上的面积测度,作 $L^2(D,dA)$ 上的乘法算子 N 如下:当 $f\in L^2(D,dA)$ 时,

$$(Nf)(z)=zf(z),z\in D,$$

显然 N 是有界线性算子,容易验证,N^* 也是乘法算子,且

$$(N^*f)(z)=\bar{z}f(z),f\in L^2(D,dA).$$

因此,当 $f\in L^2(D,dA)$ 时,

$$(NN^*f)(z)=(N^*Nf)(z)=|z|^2f(z).$$

所以 N 是正规算子.

2.2 双线性形式

设 H 是 Hilbert 空间,$T\in B(H)$ 是自伴算子,令

$$\varphi(x,y)=(Tx,y),$$

则 $\varphi(x,y)$ 满足

(i) $\varphi(\alpha x,y)=\alpha\varphi(x,y)\quad(\alpha\in\mathbf{C})$;

(ii) $\varphi(x+y,z)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z)$;

(iii) $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$.

(i) 和 (ii) 实际是说,$\varphi(x,y)$ 关于第一个变元 x 是线性的,从 (iii) 知 $\varphi(x,y)$ 关于第二个变元 y 是共轭线性的,即

$$\varphi(x,\alpha y_1+\beta y_2)=\bar{\alpha}\varphi(x,y_1)+\bar{\beta}\varphi(x,y_2),$$

我们可以利用上述性质给出一个更一般的概念.

定义 3 设 H 是 Hilbert 空间,如果二元映射 $\varphi:H\times H\to\mathbf{C}$ 满足:

(i) $\varphi(\alpha x+\beta y,z)=\alpha\varphi(x,z)+\beta\varphi(y,z)$;

(ii) $\varphi(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}\varphi(x,y)+\bar{\beta}\varphi(x,z)$,

则称 φ 为 H 上的**双线性形式**.

如果条件 (ii) 代以更强的:

(iii) $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$,

则称 φ 为 H 上**共轭的双线性形式**.

如果一个双线性形式 φ 满足:

(iv) 存在 $M\geqslant 0$,使 $|\varphi(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|$,

则称 φ 为**有界双线性形式**.

若双线性形式 φ 满足

(v) 对任意 $x,y\in H,\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$,

则称 φ 为**自伴双线性形式**.

如果共轭双线性形式 φ 满足:

(vi) 对所有的 $x\in H,\varphi(x,x)\geqslant 0$,

则称 φ 为**正定的双线性形式**.

注　双线性形式关于后一个变量实际上是共轭线性的,故而有的书上又称双线性形式为一次半线性形式.

条件(vi)实际上只是半正定性.因为 $\varphi(x,x)=0$ 并不能推出 $x=0$.有时候我们仿照内积的记号,记双线性形式 $\varphi(x,y)$ 为 $\langle x,y\rangle$.

根据定义,对有界算子 T,$\langle x,y\rangle=(Tx,y)$ 是有界的双线性形式.如果 T 还是自伴算子或正算子,则 $\langle x,y\rangle$ 还是自伴或正定的.

除了 Hilbert 空间上的有界线性算子诱导的双线性形式之外,还有没有其他的双线性形式?下面我们就来讨论这个问题.

定理 1　如果 $\varphi(x,y)$ 是 H 上的有界双线性形式,则存在唯一的有界算子 T,使

$$\varphi(x,y)=(Tx,y).$$

证明　设 $|\varphi(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|$.固定 $y\in H$,作 H 上的线性泛函 F_y 为

$$F_y(x)=\varphi(x,y).$$

由于 $|F_y(x)|\leqslant M\|x\|\|y\|$,所以 F_y 是有界线性泛函,且 $\|F_y\|\leqslant M\|y\|$.由 Fréchet-Riesz 表示定理,存在唯一的 $z_y\in H$,使

$$F_y(x)=(x,z_y),$$

且 $\|z_y\|=\|F_y\|$.

作映射 $T':y\mapsto z_y$.则 T' 是 H 上的有界线性算子.事实上,任取 $\alpha,\beta\in\mathbf{C}$ 及 $x,y_1,y_2\in H$,有

$$\begin{aligned}(x,T'(\alpha y_1+\beta y_2))&=(x,z_{\alpha y_1+\beta y_2})\\&=F_{\alpha y_1+\beta y_2}(x)=\varphi(x,\alpha y_1+\beta y_2)\\&=\bar{\alpha}\varphi(x,y_1)+\bar{\beta}\varphi(x,y_2)=\bar{\alpha}F_{y_1}(x)+\bar{\beta}F_{y_2}(x)\\&=\bar{\alpha}(x,T'y_1)+\bar{\beta}(x,T'y_2)\\&=(x,\alpha T'y_1+\beta T'y_2).\end{aligned}$$

由 x 的任意性,有 $T'(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T'y_1+\beta T'y_2$,即 T' 是线性算子.

由于 $\|T'y\|=\|z_y\|=\|F_y\|\leqslant M\|y\|$.由此证明了 T' 是有界线性算子,且

$$\varphi(x,y)=(x,T'y).$$

取 $T=T'^{*}$ 即为所求.

最后证明唯一性：若还有 $T_1\in B(H)$ 使

$$\varphi(x,y)=(T_1x,y),$$

则从 $(Tx,y)=\varphi(x,y)=(T_1x,y)$ 及 x,y 的任意性，有 $T=T_1$. 证毕.

推论　如果 $\varphi(x,y)$ 是 H 上的有界共轭（正定）双线性形式，则存在唯一的自伴（正）算子 T，使

$$\varphi(x,y)=(Tx,y).$$

对于有界的双线性形式 $\varphi(x,y)$，记

$$\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(x,y)|\mid\|x\|=1,\|y\|=1\}.$$

容易证明

$$\|\varphi\|=\inf\{M\mid|\varphi(x,y)|\leqslant M\|x\|\|y\|\},$$

且 $|\varphi(x,y)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|\|y\|$.

对于共轭双线性形式 $\varphi(x,y)$，记 $\psi(x)=\varphi(x,x)$，则 ψ 是 H 上的实函数，且满足：

(i) $\psi(\alpha x)=|\alpha|^2\psi(x),\alpha\in\mathbf{C},x\in H$;

(ii) $\psi(x+y)+\psi(x-y)=2[\psi(x)+\psi(y)]$;

(iii) $|\psi(x)|\leqslant\|\psi\|\ \|x\|^2$.

定义 4　Hilbert 空间 H 上的实函数 $\psi(x)$ 如果满足：

(i) $\psi(\alpha x)=|\alpha|^2\psi(x),\alpha\in\mathbf{C},x\in H$;

(ii) $\psi(x+y)+\psi(x-y)=2[\psi(x)+\psi(y)]$;

(iii) 存在 $M\geqslant 0$，使 $|\psi(x)|\leqslant M\|x\|^2$，

则称 ψ 为 H 上的**有界实二次形式**.

由此可见，对有界的共轭双线性形式 $\varphi(x,y)$，$\psi(x)=\varphi(x,x)$ 是 H 上的有界实二次形式. 那么 H 上的任一有界实二次形式是否都是由某个共轭双线性形式诱导的呢？下面的定理回答了这个问题.

定理 2　设 ψ 是 Hilbert 空间 H 上的有界实二次形式，则存在唯一的有界共轭双线性形式 φ，使

$$\psi(x)=\varphi(x,x).$$

证明　令 $\varphi(x,y)=\dfrac{1}{4}[\psi(x+y)-\psi(x-y)+\mathrm{i}\psi(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\psi(x-\mathrm{i}y)]$，则显然有 $\varphi(x,x)=\psi(x)$. 下面证明 φ 是有界的双线性形式.

由于 $\psi\left(\dfrac{x+y}{2}\right)+\psi\left(\dfrac{x-y}{2}\right)=\dfrac{1}{2}[\psi(x)+\psi(y)]$，所以

$$\begin{aligned}&\varphi(x,z)+\varphi(y,z)\\&=\frac{1}{4}[\psi(x+z)-\psi(x-z)+\mathrm{i}\psi(x+\mathrm{i}z)-\mathrm{i}\psi(x-\mathrm{i}z)]+\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}[\psi(y+z)-\psi(y-z)+\mathrm{i}\psi(y+\mathrm{i}z)-\mathrm{i}\psi(y-\mathrm{i}z)]\\
&=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+y}{2}+z\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x+y}{2}-z\right)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]+\\
&\quad\frac{\mathrm{i}}{2}\left[\psi\left(\frac{x+y}{2}+\mathrm{i}z\right)+\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)-\psi\left(\frac{x+y}{2}-\mathrm{i}z\right)-\psi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+y}{2}+z\right)-\psi\left(\frac{x+y}{2}-z\right)+\mathrm{i}\psi\left(\frac{x+y}{2}+\mathrm{i}z\right)-\mathrm{i}\psi\left(\frac{x+y}{2}-\mathrm{i}z\right)\right]\\
&=2\varphi\left(\frac{x+y}{2},z\right).
\end{aligned}$$

令 $y=0$,并注意 $\varphi(0,z)=0$,有

$$\varphi(x,z)=2\varphi\left(\frac{x}{2},z\right),$$

换 x 成 $x+y$,有

$$\varphi(x+y,z)=2\varphi\left(\frac{x+y}{2},z\right),$$

两者比较得

$$\varphi(x,z)+\varphi(y,z)=\varphi(x+y,z),$$

即 φ 关于第一个变量是可加的.又由

$$\begin{aligned}
\varphi(y,x)&=\frac{1}{4}[\psi(y+x)-\psi(y-x)+\mathrm{i}\psi(y+\mathrm{i}x)-\mathrm{i}\psi(y-\mathrm{i}x)]\\
&=\frac{1}{4}[\psi(x+y)-\psi(x-y)+\mathrm{i}\psi(x-\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\psi(x+\mathrm{i}y)]\\
&=\overline{\varphi(x,y)},
\end{aligned}$$

知 φ 关于第二个变量也是可加的.

所以,对任何有理数 r_1,r_2,有

$$\varphi(r_1x,r_2y)=r_1r_2\varphi(x,y).$$

从而

$$\begin{aligned}
|r_1r_2||\varphi(x,y)|&=|\varphi(r_1x,r_2y)|\\
&\leqslant\frac{M}{4}(\|r_1x+r_2y\|^2+\|r_1x-r_2y\|^2+\\
&\quad\|r_1x+\mathrm{i}r_2y\|^2+\|r_1x-\mathrm{i}r_2y\|^2)\\
&=M(r_1^2\|x\|^2+r_2^2\|y\|^2)\quad（平行四边形法则）.
\end{aligned}$$

对 $x\neq0,y\neq0$,取有理数列 $r_1^{(n)}=\dfrac{1}{r_2^{(n)}}\to\left(\dfrac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{\frac{1}{2}}$,则得

$$|\varphi(x,y)|\leqslant2M\|x\|\ \|y\|.$$

若 x,y 有一个为 0,上式显然也成立.从这个不等式可知 φ 关于 x 和 y 都是连续的,再一次利用可加性,知对任何实数 α,有 $\varphi(\alpha x,y)=\alpha\varphi(x,y)$,$\varphi(x,\alpha y)=\alpha\varphi(x,y)$.

又因为 $\psi(\mathrm{i}x)=\psi(x)$,所以

$$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{i}x,y)&=\frac{1}{4}[\psi(\mathrm{i}x+y)-\psi(\mathrm{i}x-y)+\mathrm{i}\psi(\mathrm{i}x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\psi(\mathrm{i}x-\mathrm{i}y)]\\&=\frac{1}{4}[\psi(x-\mathrm{i}y)-\psi(x+\mathrm{i}y)+\mathrm{i}\psi(x+y)-\mathrm{i}\psi(x-y)]\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}[\psi(x+y)-\psi(x-y)+\mathrm{i}\psi(x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\psi(x-\mathrm{i}y)]\\&=\mathrm{i}\varphi(x,y),\end{aligned}$$

从而 φ 是一个有界双线性形式.

唯一性从 $\varphi(x,y)$ 的构造立即得到.证毕.

推论　如果 ψ 是 H 上有界实二次形式,则存在有界自伴算子 T,使 $\psi(x)=(Tx,x)$.

定理 3　如果 $\varphi(x,y)$ 是 H 上的正定双线性形式,则有

$$|\varphi(x,y)|^2\leqslant\varphi(x,x)\varphi(y,y).$$

证明完全类似关于内积的 Schwarz 不等式的证明.

特别地,如果 T 是正算子,则有

$$|(Tx,y)|^2\leqslant(Tx,x)(Ty,y),$$

上式称为**广义 Schwarz 不等式**.

2.3　算子谱的性质

相对于一般算子而言,人们对正算子、自伴算子、酉算子以及正规算子要了解得多些,本小节给出这些算子的谱的一些常用性质.

定理 4　自伴算子的谱包含在实数域中,酉算子的谱在单位圆周上.

证明　先证自伴算子 T 的谱点一定是实数.只要证明不是实数的复数一定是 T 的正则点.任取 $x\in H$,从 $|((T\pm\mathrm{i}I)x,x)|=|(Tx,x)\pm\mathrm{i}(x,x)|\geqslant(x,x)=\|x\|^2$,有 $\|(T\pm\mathrm{i}I)x\|\geqslant\|x\|$,所以 $T\pm\mathrm{i}I$ 是一一对应,且 $(T\pm\mathrm{i}I)^{-1}$ 是有界算子.(此处 $(T\pm\mathrm{i}I)^{-1}$ 仅是定义在 $R(T\pm\mathrm{i}I)$ 上取值于 H 的算子.)

下证 $R(T\pm\mathrm{i}I)=H$.由本章 §1 定理 5,有

$$\overline{R(T\pm\mathrm{i}I)}=N(T\mp\mathrm{i}I)^{\perp}=H,$$

所以 $R(T\pm\mathrm{i}I)$ 在 H 中是稠密的.接下来要证明 $R(T\pm\mathrm{i}I)$ 为闭集.

由不等式 $\|(T\pm\mathrm{i}I)x\|\geqslant\|x\|$ 知 $R(T\pm\mathrm{i}I)$ 是闭集,所以 $R(T\pm\mathrm{i}I)=H$.

可见 $(T\pm\mathrm{i}I)^{-1}$ 是 H 到 H 的有界线性算子,即 $\pm\mathrm{i}\notin\sigma(T)$.

任取 $b\in\mathbf{R}$,且 $b\neq 0$,则 $T-(a+\mathrm{i}b)I=b\left(\dfrac{T-aI}{b}-\mathrm{i}I\right)$.由于 T 是自伴的,所以$\dfrac{T-aI}{b}$也是自伴算子,由前一段知 $T-(a+\mathrm{i}b)I$ 可逆,$a+\mathrm{i}b\notin\sigma(T)$,故有 $\sigma(T)\subseteq\mathbf{R}$.

下面证明酉算子的谱一定在单位圆周上.设 U 是酉算子,由于 $\|U\|\leqslant 1$,所以 $\sigma(U)\subseteq\{z\in\mathbf{C}\mid |z|\leqslant 1\}$.

对 $\lambda_0=0$,显然 $U-\lambda_0 I=U$ 可逆,所以 $0\notin\sigma(U)$.

对 $\lambda_0\neq 0$,且 $|\lambda_0|<1$,则 $U-\lambda_0 I=U(I-\lambda_0 U^*)=\lambda_0 U(\lambda_0^{-1}I-U^*)$.由于 U^* 仍是酉算子,且 $|\lambda_0^{-1}|>1$,因此 $\lambda_0^{-1}I-U^*$ 可逆.又 U 可逆,$\lambda_0\neq 0$,所以 $U-\lambda_0 I$ 可逆,即 $\lambda_0\notin\sigma(U)$.这说明 $\sigma(U)\subseteq\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$.证毕.

定理 5　(i) 自伴算子的谱半径等于算子范数;

(ii) 正规算子的谱半径等于算子范数.

在证明之前,我们先回忆一些相关概念.一个算子 $T\in B(H)$ 的谱半径$r(T)$定义为 $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|$.对谱半径 $r(T)$ 有一个估计:$r(T)\leqslant\|T\|$,以及一个确切的计算公式:

$$r(T)=\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

下面我们利用这个公式来证明定理 5.

定理 5 的证明　设 T 是自伴算子,则有 $T=T^*$,所以 $\|T^2\|=\|T^*T\|=\|T\|^2$(为什么? 留作练习),进一步有

$$\|T^4\|=\|T^2\|^2=\|T\|^4,\cdots,\|T^{2^k}\|=\|T\|^{2^k},$$

所以 $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{k\to\infty}\|T^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}}=\|T\|$.

下设 T 是正规算子,则 $T^*T=TT^*$.由

$$\|T^2\|^2=\|(T^2)^*T^2\|=\|T^*T^*TT\|=\|(T^*T)^2\|=\|T^*T\|^2=\|T\|^4,$$

可知 $\|T^2\|=\|T\|^2$.余者同上.证毕.

推论　如果正规算子 T 的谱是单点集$\{\lambda\}$,则 $T=\lambda I$.

证明　记 $S=T-\lambda I$,则 S 也是正规算子.如果 $S\neq 0$,则 $\|S\|\neq 0$,因此$r(S)=\|S\|\neq 0$.所以必存在 $\lambda_1\neq 0$,使 λ_1是 S 的谱点.因此 $\lambda+\lambda_1$是 T 的谱点.而 $\lambda+\lambda_1\neq\lambda$,与假设矛盾.所以 $S=0$,即 $T=\lambda I$.证毕.

定理 6　$T\in B(H)$是正算子的充要条件是 T 是自伴算子且 T 的谱点都是非负实数.

证明　设 T 是正算子,则 $T=T^*$,故 T 的谱点都是实数.

设 $\lambda_0<0$,则有 $((T-\lambda_0 I)x,x)=(Tx,x)-\lambda_0(x,x)\geqslant-\lambda_0\|x\|^2$.所以 $\|(T-\lambda_0 I)x\|\geqslant-\lambda_0\|x\|$.注意到 $-\lambda_0>0$,由此知 $T-\lambda_0 I$ 是一一对应,且 $(T-\lambda_0 I)^{-1}$有界.由 $\overline{R(T-\lambda_0 I)}=N(T-\lambda_0 I)^{\perp}=H$ 以及 $R(T-\lambda_0 I)$ 是闭集知,

$R(T-\lambda_0 I)=H$.故有 $\lambda_0\notin\sigma(T)$,即 T 的谱点都是非负实数.

反之,设 T 是自伴算子且 T 的谱都为非负实数.记 $\|T\|=a$,则 $r(T)=a$ 且 $\sigma(T)\subseteq[0,a]$,因此 $S=T-\frac{a}{2}I$ 的谱 $\sigma(S)\subseteq\left[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right]$,进而

$$\left\|\frac{a}{2}I-T\right\|=\|S\|=r_\sigma(S)\leqslant\frac{a}{2},$$

于是

$$\frac{a}{2}(x,x)-(Tx,x)=\left(\left(\frac{a}{2}I-T\right)x,x\right)\leqslant\left\|\left(\frac{a}{2}I-T\right)x\right\|\|x\|\leqslant\frac{a}{2}\|x\|^2.$$

这说明$(Tx,x)\geqslant 0$,即 T 为正算子.证毕.

2.4　自伴算子的上下界

定义 5　设 T 为 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,令

$$m(T)=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x),\quad M(T)=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x).$$

称 $m(T)$,$M(T)$分别为 T 的**下界**和**上界**.

定理 7　设 H 是 Hilbert 空间,对自伴算子 $T\in B(H)$,有

$$\|T\|=\max\{|m(T)|,|M(T)|\}.$$

证明　设 $K=\max\{|m(T)|,|M(T)|\}$,因为

$$|M(T)|=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|,$$

$$|m(T)|\leqslant\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\|T\|,$$

所以 $K\leqslant\|T\|$.

为证相反的不等式,任取 $\lambda>0$,容易验证

$$\|Tx\|^2=\frac{1}{4}\left[\left(T\left(\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right),\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right)-\left(T\left(\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right),\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right)\right].$$

故

$$\begin{aligned}\|Tx\|^2&\leqslant\frac{1}{4}K\left(\left\|\lambda x+\frac{1}{\lambda}Tx\right\|^2+\left\|\lambda x-\frac{1}{\lambda}Tx\right\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}K\left(\lambda^2\|x\|^2+\frac{1}{\lambda^2}\|Tx\|^2\right).\end{aligned}$$

不妨设 $x\neq 0$,令 $\lambda=\sqrt{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}}$,则有

$$\|Tx\|^2\leqslant K\|Tx\|\|x\|,$$

于是

$$\|Tx\|\leqslant K\|x\|,$$

所以 $\|T\|\leqslant K$.证毕.

注　根据 $m(T),M(T)$ 的定义，有

$$m(T)I\leqslant T\leqslant M(T)I.$$

定理 8　设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子，则 $\sigma(T)\subseteq[m(T),M(T)]$，且 $m(T),M(T)\in\sigma(T)$.

证明　设 $\lambda\notin[m(T),M(T)]$，由于 $\sigma(T)\subseteq\mathbf{R}$，不妨设 $\lambda\in\mathbf{R}$，且 $\lambda<m(T)$.

记 $d=m(T)-\lambda$，则对任意 $x\in H$，$\|x\|=1$，有

$$(Tx,x)-\lambda\geqslant d,$$

即

$$(Tx-\lambda x,x)\geqslant d.$$

所以对任意 $x\in H$，有 $d\|x\|^2\leqslant\|(T-\lambda I)x\|\ \|x\|$，从而 $d\|x\|\leqslant\|(T-\lambda I)x\|$. 由此可知 $(\lambda I-T)^{-1}$ 存在且有界（定义在 $R(\lambda I-T)$ 上），且对任意 $y\in R(\lambda I-T)$ 有

$$\|(\lambda I-T)^{-1}y\|\leqslant d^{-1}\|y\|.$$

往证 $R(\lambda I-T)=H$. 由于 $\overline{R(\lambda I-T)}=N(\bar{\lambda}I-T^*)^{\perp}=N(\lambda I-T)^{\perp}=H$，故只要证明 $R(\lambda I-T)$ 是 H 的闭子空间即可.

若 $y_n\in R(\lambda I-T)$ 满足 $y_n\to y$. 不妨设 $y_n=(\lambda I-T)x_n$，由于 $\|y_n-y_m\|=\|(\lambda I-T)(x_n-x_m)\|\geqslant d\|x_n-x_m\|$，故 x_n 是 Cauchy 列从而收敛，设 $x_n\to x$，则 $(\lambda I-T)x_n\to(\lambda I-T)x$，即 $y=(\lambda I-T)x\in R(\lambda I-T)$. 所以 $R(\lambda I-T)$ 是闭的. 因此 $\lambda\in\rho(T)$，这就证明了 $\sigma(T)\subseteq[m(T),M(T)]$.

下证 $m(T),M(T)\in\sigma(T)$. 设 $\lambda=m(T)$，则对任意 $x\in H$，有

$$((T-\lambda I)x,x)\geqslant 0.$$

分别以 $T-\lambda I$，x，$(T-\lambda I)x$ 代替定理 3 中的 T，x 和 y 得

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda I)x\|^4&\leqslant((T-\lambda I)x,x)((T-\lambda I)^2x,(T-\lambda I)x)\\&\leqslant((T-\lambda I)x,x)\ \|T-\lambda I\|^3\ \|x\|^2.\end{aligned}$$

由于 $\inf\limits_{\|x\|=1}((T-\lambda I)x,x)=\inf\limits_{\|x\|=1}(Tx,x)-\lambda=m(T)-\lambda=0$，所以 $\inf\limits_{\|x\|=1}\|(T-\lambda I)x\|=0$，从而 $\lambda\in\sigma(T)$.

$M(T)\in\sigma(T)$ 的证明是类似的. 证毕.

2.5　谱映射定理

回忆在线性代数中，如果知道矩阵 A 的特征值，那么 A 的多项式的特征值也可以计算出来. 具体说来，若 λ 是 A 的特征值，则对任意多项式 p，$p(\lambda)$ 是 $p(A)$ 的特征值. 在无限维空间上是不是也有一个类似的结论呢？这正是下面要探讨的问题.

设 $T\in B(H)$，$p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$ 是多项式，则可定义 $p(T)$ 为 c_0I+c_1T

$+\cdots+c_nT^n$，简记为

$$p(T)=\sum_{k=0}^{n}c_kT^k,$$

其中 $T^0=I$.

容易证明这种运算满足下列性质：如果 p,q 是两个多项式，则

$$(pq)(T)=p(T)q(T),\quad (p+q)(T)=p(T)+q(T).$$

如果 T 是可逆算子，则对于有负次幂的多项式 $p(z)=\sum_{k=-m}^{n}c_kz^k$，也可以作运算 $p(T)=\sum_{k=-m}^{n}c_kT^k$，其中，如果 $k<0$，则 $T^k=(T^{-1})^{-k}$.

定理 9　设 H 是 Hilbert 空间，$T\in B(H)$，p 是多项式，则 $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$.

注　$p(\sigma(T))$ 是指集合 $\{p(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(T)\}$.

证明　设 $p(z)=\sum_{k=0}^{n}c_kz^k$，由代数基本定理，可以将 $p(z)$ 分解为

$$p(z)=c_n(z-\xi_1)(z-\xi_2)\cdots(z-\xi_n).$$

所以

$$p(T)=c_n(T-\xi_1I)(T-\xi_2I)\cdots(T-\xi_nI).$$

显然 $p(T)$ 可逆等价于每一个 $T-\xi_iI$ 可逆，这又等价于 p 的根都是 T 的正则点，即 $\sigma(T)\subseteq\{z\mid p(z)\neq0\}$，或者说 $p(T)$ 可逆等价于 $0\notin p(\sigma(T))$. 故 $\xi\notin\sigma(p(T))$ 当且仅当 $p(T)-\xi I$ 可逆当且仅当 $q(T)$ 可逆，其中 $q(z)=p(z)-\xi$ 当且仅当 $0\notin q(\sigma(T))$ 当且仅当 $\xi\notin p(\sigma(T))$. 所以 $p(\sigma(T))=\sigma(p(T))$. 证毕.

定理 10　设 H 是 Hilbert 空间，$T\in B(H)$ 是可逆算子，$p(z)=\sum_{k=-m}^{n}c_kz^k$. 则 $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$.

证明　令 $q(z)=z^mp(z)$，则 $q(T)=T^mp(T)$. 由于 T^m 可逆，所以 $p(T)$ 可逆等价于 $q(T)$ 可逆，即 $0\notin\sigma(q(T))=q(\sigma(T))$.

又 $0\notin\sigma(T)$，所以 $0\notin q(\sigma(T))$ 等价于 $0\notin p(\sigma(T))$，从而 $p(T)$ 可逆的充要条件是 $0\notin p(\sigma(T))$. 由此易知 $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$. 证毕.

推论　设 $U\in B(H)$ 是酉算子，$p(z)=\sum_{k=-m}^{n}c_kz^k$，则

$$\|p(U)\|=\max_{e^{it}\in\sigma(U)}|p(e^{it})|.$$

证明　由定理 10，有 $\sigma(p(U))=p(\sigma(U))$. 又因为 $p(U)$ 仍是正规算子，所以 $\|p(U)\|=r(p(U))$. 从而 $\|p(U)\|=r(p(U))=\max\limits_{\lambda\in\sigma(p(U))}|\lambda|=\max\limits_{e^{it}\in\sigma(U)}|p(e^{it})|$. 证毕.

§3 紧自伴算子

首先来看一个线性代数中的问题：

例 1 设 $\mathbf{C}^n$ 是有限维的复欧几里得空间，A 是 $\mathbf{C}^n$ 中的自伴算子. 任取 $\mathbf{C}^n$ 中的一组正规正交基，A 在这组基下的矩阵 (a_{ij}) 是 Hermite 矩阵，即满足：$a_{ij}=\overline{a_{ji}}$，由线性代数的知识知道，一定可以通过一个酉变换将 A 化为实对角矩阵，即存在 $\mathbf{C}^n$ 的一组正规直交基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，使

$$Ae_i=\lambda_i e_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

其中 λ_i 是 A 的特征值. 记 P_i 为 $\mathbf{C}^n$ 到 e_i 所张成的一维子空间上的投影算子，则易知 A 有如下的分解：

$$A=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i P_i, \qquad \sum_{i=1}^{n}P_i=I.$$

这就是有限维空间上自伴算子的谱分解.

对于无限维空间上的自伴算子，人们也试图得到类似的分解，但很快就发现了问题：无限维空间上的自伴算子甚至可能没有特征值！

例 2 设 $H=L^2[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$，定义算子 A 为

$$(Af)(t)=tf(t),\ t\in[a,b],\ f(t)\in L^2[a,b].$$

容易验证 A 是一个自伴算子. 但 A 没有特征值. 事实上，假设 λ 是 A 的特征值，f 是相应的非零特征向量，由

$$(\lambda I-A)f=0$$

有 $(\lambda-t)f(t)=0$ a.e.，因此 $f(t)=0$ a.e.，即 f 为 $L^2[a,b]$ 中的零向量，这个矛盾说明 A 没有特征值.

然而，我们知道，紧算子的非零谱都是特征值，而且紧算子是有限秩算子的逼近，从某种意义上说，紧算子是最接近有限维空间上的算子的. 是不是紧自伴算子就有类似于有限维空间中的谱分解呢？事实正是如此，本节将要探讨这个问题.

3.1 投影算子

无限维空间中的几何理论远比有限维空间复杂，在 Hilbert 空间中，人们常常将空间中的某些几何性质转换为代数的形式，从而利用代数的方法来研究其几何性质. 在上节的例 3 中我们给出了 H 到 M 上的直交投影算子 P 的概念，这一小节我们要讨论这些算子的性质，这些性质反映了 Hilbert 空间中子空间的几何性质.

为了表示 P 与 M 的关系，有时候我们用 P_M 来记 H 到 M 上的投影算子.

定理 1 $P\in B(H)$为投影算子的充要条件是：(i) $P^*=P$(自伴性)；(ii) $P^2=P$(幂等性).

证明 必要性.设 P 为 H 到 M 上的投影算子，由上一节例 3，P 是正算子，从而是自伴算子，又对 $x\in H$，设 $Px=x_1\in M$，则 $Px_1=x_1$.从而 $P^2x=P(Px)=Px_1=x_1=Px$，即 $P^2=P$.

充分性.设 P 的值域为 M，任取 $x,y\in H$，有

$$(x-Px,Py)=(Px-P^2x,y)=0.$$

由 $y\in H$ 的任意性，知 $x-Px\in M^{\perp}$.令 $Px=x_1$，$x-Px=x_2$，则 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in M$，$x_2\in M^{\perp}$，从而对任意 $x\in H$，都存在直交分解 $x=x_1+x_2$，$x_1\in M$，$x_2\in M^{\perp}$.下面我们证明 M 是闭的.

任取$\{x_n\}\subset M$，$x_n\to x$，设 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1\in M$，$x_2\in M^{\perp}$，则$(x_n,x_2)=0$.令 $n\to\infty$，得$(x,x_2)=0$，从而 $x_2=0$，所以 $x=x_1\in M$.故 M 是闭的.

这说明 P 是 H 到 M 上的直交投影.证毕.

两个投影算子的和、差、积不一定是投影算子，而是需要加上一定的条件.接下来我们就来讨论这些问题 .

定理 2 设有两个投影算子 P_M，P_N，则下列三条等价：

(i) P_M+P_N仍是投影算子；

(ii) $P_MP_N=0$；

(iii) $M\perp N$，此时 $P_M+P_N=P_{M\oplus N}$.

证明 我们按照(i)$\Rightarrow$(ii)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i)的顺序来证明这个定理.

(i)$\Rightarrow$(ii)，设 P_M+P_N是投影算子，由定理 1，$(P_M+P_N)^2=P_M+P_N$，所以$P_MP_N+P_NP_M=0$.在上式左乘 P_M，有 $P_MP_N+P_MP_NP_M=0$.取共轭又有 $P_NP_M+P_MP_NP_M=0$.由此知 $P_NP_M=P_MP_N$，故 $P_MP_N=0$.

(ii)$\Rightarrow$(iii).任取 $x\in M$，$y\in N$，则

$$(x,y)=(P_Mx,P_Ny)=(x,P_MP_Ny)=0,$$

所以 $M\perp N$.

(iii)$\Rightarrow$(i).由于 $M\perp N$，任取 $x\in H$，$P_Nx\in N$，得 $P_MP_Nx=0$，即 $P_MP_N=0$.取共轭，有 $P_NP_M=0$，所以$(P_M+P_N)^2=P_M+P_MP_N+P_NP_M+P_N=P_M+P_N$，从而 P_M+P_N是幂等的.显然 P_M+P_N是自伴的，故 P_M+P_N是投影算子.

显然 P_M+P_N的值域是 $M\oplus N$，证毕.

定理 3 投影算子 P_M，P_N的积 P_MP_N仍为投影算子的充要条件是 $P_MP_N=P_NP_M$，而且此时 $P_MP_N=P_{M\cap N}$.

证明 必要性.设 P_MP_N为投影算子，则 $P_MP_N=(P_MP_N)^*=P_NP_M$.

充分性，如果 $P_MP_N=P_NP_M$，则$(P_MP_N)^*=P_NP_M=P_MP_N$，所以 P_MP_N是自伴算

子. 又 $(P_MP_N)^2=P_MP_NP_MP_N=P_M^2P_N^2=P_MP_N$，所以 P_MP_N 是幂等的自伴算子，从而是投影算子.

接下来证明 P_MP_N 的值域是 $M\cap N$.

如果 $x\in M\cap N$，则 $P_MP_Nx=P_Mx=x$，所以 $x\in R(P_MP_N)$. 另一方面，显然 $R(P_MP_N)\subset M$，$R(P_NP_M)\subset N$，所以 $R(P_MP_N)=R(P_NP_M)\subset M\cap N$. 证毕.

定理 4　对投影算子 P_M，P_N，下列等价：

(i) $M\supseteq N$；

(ii) $P_MP_N=P_NP_M=P_N$；

(iii) 对任意 $x\in H$，$\|P_Nx\|\leqslant\|P_Mx\|$；

(iv) $P_N\leqslant P_M$.

证明　我们按照(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(i)的顺序来证明这一定理.

(i)⇒(ii). 如果 $M\supseteq N$，则对任意 $x\in H$，$P_Nx\in M$，于是 $P_MP_Nx=P_Nx$，所以 $P_MP_N=P_N$. 又 $P_N=(P_MP_N)^*=P_NP_M$，故有 $P_MP_N=P_NP_M=P_N$.

(ii)⇒(iii). 对任何 $x\in H$，由于 $P_Nx=P_NP_Mx$，又 $\|P_N\|\leqslant 1$，所以 $\|P_Nx\|=\|P_NP_Mx\|\leqslant\|P_Mx\|$.

(iii)⇒(iv). 设 $\|P_Nx\|\leqslant\|P_Mx\|$，则 $(P_Nx,x)\leqslant(P_Mx,x)$，从而 $P_N\leqslant P_M$.

(iv)⇒(i). 设 $P_N\leqslant P_M$，则对任意 $x\in H$，有 $(P_Nx,x)\leqslant(P_Mx,x)$. 特别地，取 $x\in N$，则有 $(x,x)\leqslant(P_Mx,x)$，这推出 $((I-P_M)x,x)\leqslant 0$. 但 $I-P_M\geqslant 0$，所以 $(I-P_M)x=0$，即 $x=P_Mx\in M$，故 $N\subseteq M$. 证毕.

定理 5　投影算子 P_M 与 P_N 之差 P_M-P_N 仍是投影算子的充要条件是 $N\subseteq M$，且此时 P_M-P_N 的值域为 $N^\perp\cap M$.

证明　必要性. 设 $P=P_M-P_N$ 为投影算子，设其值域为 L，则 $P_M=P_N+P_L$. 由定理 2，$M=N\oplus L$，从而 $N\subseteq M$ 且 $L=M\cap N^\perp$.

充分性. 如果 $N\subseteq M$，由定理 4，有 $P_MP_N=P_NP_M=P_N$，所以 $(P_M-P_N)^2=P_M-P_MP_N-P_NP_M+P_N=P_M-P_N$，即 P_M-P_N 是幂等算子. 显然 P_M-P_N 是自伴的. 故 P_M-P_N 是投影算子. 证毕.

最后，我们考察无穷多个投影算子相加的情形.

如果 $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ 是一列投影算子，且两两正交，即 $P_nP_m=0\ (n\neq m)$，则对任意正整数 n，$\sum\limits_{k=1}^{n}P_k$ 也是投影算子. 现在的问题是：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n$ 是否收敛？是否也是投影算子？由于任意非零投影算子的范数为 1，所以 $\|P_{n+1}+P_{n+2}+\cdots+P_{n+l}\|$ 一般而言为 1，故在一般情况下，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n$ 不按范数收敛. 但我们有如下的结论.

定理 6　设 $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ 是 Hilbert 空间 H 上一列两两正交的投影算子，则存在投

影算子 P,使得对任意 $x\in H$,有 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x=Px$.

证明　对任意 x,由于 $P_n x\perp P_m x(n\neq m)$,所以

$$\begin{aligned}&\|P_{n+1}x\|^2+\|P_{n+2}x\|^2+\cdots+\|P_{n+l}x\|^2\\=&\|P_{n+1}x+P_{n+2}x+\cdots+P_{n+l}x\|^2\leqslant\|x\|^2.\end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n x\|^2<+\infty$,可见 $\sum_{k=1}^{n}P_k x$ 在 H 中收敛.记 $Px=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}P_k x$.显然 P 是线性的.又 $\|Px\|^2=\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}P_k x\right\|^2\leqslant\|x\|^2$,从而 P 有界,且 $\|P\|\leqslant 1$.

由于 $\sum_{k=1}^{n}P_k$ 仍是投影算子,从而是自伴算子,所以 P 是自伴算子.

又从 $(P^2x,y)=(Px,Py)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}P_k x,\sum_{k=1}^{n}P_k y\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}P_k x,y\right)=(Px,y)$,知 P 是幂等算子.故 P 是投影算子.证毕.

3.2　不变子空间和约化子空间

在第二章我们曾提到过算子的不变子空间及约化问题,它是涉及算子结构的重要问题.下面我们就 Hilbert 空间情形,利用投影算子将不变子空间及约化子空间转换成代数的语言,从而可以从代数的角度重新考察这些问题.

记 P_M 为 H 到 M 的直交投影,关于不变子空间和约化子空间,有以下两个简单性质.

(i) M 是 T 的约化子空间的充要条件是 M 是 T 和 T^* 的不变子空间.

事实上,设 M 是 T 的约化子空间,则 $TM\subseteq M$ 及 $TM^{\perp}\subseteq M^{\perp}$ 同时成立.对任意 $x\in M$,作 T^*x 的直交分解

$$T^*x=y_1+y_2,$$

则

$$\|y_2\|^2=(y_1+y_2,y_2)=(T^*x,y_2)=(x,Ty_2).$$

由于 $Ty_2\in M^{\perp}$,所以 $(x,Ty_2)=0$.因此 $y_2=0$,即 $T^*x=y_1\in M$.所以 M 也关于 T^* 不变.

反之,设 M 关于 T 与 T^* 不变,即 $TM\subseteq M,T^*M\subseteq M$.对任意 $x\in M^{\perp}$,作 Tx 的直交分解

$$Tx=z_1+z_2,z_1\in M,z_2\in M^{\perp}.$$

则

$$\|z_1\|^2=(z_1+z_2,z_1)=(Tx,z_1)=(x,T^*z_1).$$

由于 $T^*z_1\in M$,所以 $(x,T^*z_1)=0$.因此 $z_1=0$,即 $Tx=z_2\in M^{\perp}$.所以 $M^{\perp}$ 关于 T 不

变，即 M 是 T 的约化子空间.

(ii) M 是 T 的不变子空间的充要条件是 $TP_M=P_MTP_M$；M 是 T 的约化子空间的充要条件是 $TP_M=P_MT$.

证明　设 M 是 T 的不变子空间，任取 $x\in H$，有 $P_Mx\in M$，所以 $TP_Mx\in M$，从而 $P_MTP_Mx=TP_Mx$，故 $TP_M=P_MTP_M$.

反之，设 $TP_M=P_MTP_M$. 任取 $x\in M$，有 $P_Mx=x$，所以 $Tx=P_MTx\in M$，从而 M 是 T 的不变子空间.

由性质(i)，M 是 T 的约化子空间的充要条件是 M 是 T 与 T^* 的不变子空间. 这等价于 $TP_M=P_MTP_M$ 及 $T^*P_M=P_MT^*P_M$ 同时成立. 后一式取共轭，得 $P_MT=P_MTP_M$，故有 $TP_M=P_MT$.

如果 $TP_M=P_MT$，则 $TP_M=TP_M^2=P_MTP_M$. 又 $T^*P_M=P_MT^*$，则 $T^*P_M=P_MT^*P_M$，即 M 是 T 与 T^* 的不变子空间，从而约化 T. 证毕.

如果 M 是 T 的约化子空间，则 $TM\subseteq M$ 及 $T^*M\subseteq M$，从而可以考虑 T 到 M 上的限制 $T|_M$，这是 Hilbert 空间 M 上的有界线性算子. 易验证，$(T|_M)^*=T^*|_M$. 从而如果 T 是自伴算子，$T|_M$ 也是自伴算子. 如果 T 是紧算子，则容易看到，$T|_M$ 也是紧算子.

定理 7　如果 T 是正规算子，λ 是复数，则 $N(T-\lambda I)=N((T-\lambda I)^*)$，且 $N(T-\lambda I)$ 是 T 的约化子空间.

证明　因为 T 是正规算子，故 $T-\lambda I$ 也是正规算子，所以

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda I)x\|^2&=((T-\lambda I)x,(T-\lambda I)x)\\&=((T-\lambda I)^*(T-\lambda I)x,x)\\&=((T-\lambda I)(T-\lambda I)^*x,x)\\&=\|(T-\lambda I)^*x\|^2.\end{aligned}$$

故得 $N(T-\lambda I)=N((T-\lambda I)^*)$.

又对 $x\in N(T-\lambda I)$，有 $Tx=\lambda x\in N(T-\lambda I)$，所以 $N(T-\lambda I)$ 是 T 的不变子空间.

同样 $N((T-\lambda I)^*)$ 是 T^* 的不变子空间. 但 $N(T-\lambda I)=N((T-\lambda I)^*)$，故 $N(T-\lambda I)$ 是 T 的约化子空间. 证毕.

定理 8　如果 T 是正规算子，且 λ,μ 是 T 的不同的特征值，则 $N(T-\lambda I)\perp N(T-\mu I)$.

证明　设 $h\in N(T-\lambda I)$，$g\in N(T-\mu I)$. 由定理 7，$g\in N((T-\mu I)^*)$，即 $T^*g=\bar{\mu}g$. 所以

$$\lambda(h,g)=(Th,g)=(h,T^*g)=(h,\bar{\mu}g)=\mu(h,g).$$

因为 $\lambda\neq\mu$，所以 $(h,g)=0$，即 $h\perp g$. 证毕.

3.3 紧自伴算子的谱分解定理

定理 9 如果 T 是紧自伴算子,则 $\|T\|$ 或 $-\|T\|$ 是 T 的特征值.

证明 如果 $T=0$,则定理自然成立.不妨设 $T\neq 0$.由本章§2 定理 7,$\|T\|=\max\{|m(T)|,|M(T)|\}$,从而存在一列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\|x_n\|=1$,使 $(Tx_n,x_n)\to\lambda$,其中 $\lambda=m(T)$ 或 $M(T)$,且 $|\lambda|=\|T\|$.由于 T 为紧算子,故 Tx_n 有收敛子列,仍记为 Tx_n 即 $Tx_n\to y$.由于 $0\leqslant\|(T-\lambda I)x_n\|^2=\|Tx_n\|^2-2\lambda(Tx_n,x_n)+\lambda^2\leqslant 2\lambda^2-2\lambda(Tx_n,x_n)\to 0$,所以 $Tx_n-\lambda x_n\to 0$.从 $\lambda\neq 0$ 及 $Tx_n\to y$,知 x_n 也收敛.设 $x_n\to x$,则 $\|x\|=1$ 且 $(T-\lambda I)x_n\to(T-\lambda I)x$,所以 $Tx=\lambda x$,即 λ 是 T 的特征值.这说明 $\|T\|$ 或 $-\|T\|$ 是 T 的特征值.证毕.

下面的定理称为紧自伴算子的谱分解定理.它是有限维空间中相关结论的直接推广.

定理 10 如果 T 是 Hilbert 空间 H 上的紧自伴算子,则 T 有至多可数个互不相同的特征值.如果 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\cdots\}$ 是 T 的互异的非零特征值全体,P_n 是 H 到 $N(T-\lambda_n I)$ 上的直交投影,则

(i) 当 $n\neq m$ 时,$P_nP_m=P_mP_n=0$;

(ii) 在按算子范数收敛意义下,有 $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n$.

证明 由定理 8,知(i)成立.由定理 9,存在实数 $\lambda_1\in\sigma_p(T)$,使 $|\lambda_1|=\|T\|$.记 $M_1=N(T-\lambda_1 I)$,P_1 是 H 到 M_1 上的直交投影.令 $H_2=M_1^{\perp}$.由于 M_1 约化 T,所以 H_2 也约化 T.且 $T_2=T|_{H_2}$ 也是紧自伴算子.再由定理 9,存在实数 $\lambda_2\in\sigma_p(T_2)$,使 $|\lambda_2|=\|T_2\|$.记 $M_2=N(T_2-\lambda_2 I)$.注意 $\{0\}\neq M_2\subseteq N(T-\lambda_2 I)$,若 $\lambda_1=\lambda_2$,则 $M_2\subseteq N(T-\lambda_1 I)=M_1$,但 $M_1\perp M_2$,所以必有 $\lambda_1\neq\lambda_2$.

记 P_2 为 H 到 M_2 的投影及 $H_3=(M_1\oplus M_2)^{\perp}$.注意到 $\|T_2\|\leqslant\|T\|$,故 $|\lambda_2|\leqslant|\lambda_1|$.由归纳法,我们可以得到一列 $\{\lambda_n\}$ 满足

(1) $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots$;

(2) 对 $M_n=N(T-\lambda_n I)$,$|\lambda_{n+1}|=\|T|_{(M_1\oplus\cdots\oplus M_n)^{\perp}}\|$.

由(1),存在 $\alpha\geqslant 0$,使 $|\lambda_n|\to\alpha$.往证 $\alpha=0$,即 $\lambda_n\to 0$.事实上,设 $e_n\in M_n$,$\|e_n\|=1$,由 T 的紧性,存在 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子列 $\{e_{n_j}\}$ 及 $h\in H$,使 $Te_{n_j}\to h$.但由于 $e_n\perp e_m(n\neq m)$,及 $Te_{n_j}=\lambda_{n_j}e_{n_j}$,所以

$$\|Te_{n_j}-Te_{n_i}\|^2=\lambda_{n_j}^2+\lambda_{n_i}^2\geqslant 2\alpha^2.$$

由于 $\{Te_{n_j}\}$ 是 Cauchy 列,所以 $\alpha=0$.

最后证明 $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n$.若 $h\in M_k(1\leqslant k\leqslant n)$,则$\left(T-\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_jP_j\right)h=Th-\lambda_kh$

$=0$.所以

$$M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n\subseteq N\Big(T-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_j\Big),$$

又对 $h\in(M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n)^{\perp}$,有 $P_jh=0(1\leqslant j\leqslant n)$,故

$$\Big(T-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_j\Big)h=Th.$$

注意到$(M_1\oplus\cdots\oplus M_n)^{\perp}$约化 T,显见

$$\Big\|T-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jP_j\Big\|=\big\|T|_{(M_1\oplus\cdots\oplus M_n)^{\perp}}\big\|=|\lambda_{n+1}|\to 0,$$

故 $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_nP_n$.证毕.

推论 1 设 $T,\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$及 P_n同定理 10,则有

(i) $N(T)=[V\{P_nH\mid n\geqslant 1\}]^{\perp}=(R(T))^{\perp}$;

(ii) $\|T\|=\sup\{|\lambda_n|\,\big|\,n\geqslant 1\}$ 且 $\lambda_n\to 0\quad(n\to\infty)$.

这里 $V\{P_nH\mid n\geqslant 1\}$表示由 $P_nH(n\geqslant 1)$张成的 H 的子空间.

证明 由于 $P_n\perp P_m(n\neq m)$,如果 $h\in H$,则由定理 10,

$$\|Th\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda_nP_nh\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^2\|P_nh\|^2.$$

故 $Th=0$ 的充要条件是对所有的 n,$P_nh=0$,即 $h\in N(T)$的充要条件是对所有的 n,$h\perp P_nH$.(i)得证.

(ii) 从定理 10 的证明立知.

§4 有界自伴算子的谱分解定理

我们在上一节对紧自伴算子 $T\in B(H)$,利用 T 的谱和相应的特征子空间上的投影(称为谱投影)给出了其表示.但对一般的自伴算子,它的谱不一定是特征值,谱点也不一定是可数多个,因此,要建立类似紧自伴算子的结构理论,需引进新的概念与方法.

4.1 谱系、谱测度与谱积分

对一般自伴算子建立类似于紧自伴算子的分解理论,关键在于如何寻找类似紧自伴算子的特征子空间或其投影,为此,我们引进下面的

定义 1 设 H 是 Hilbert 空间,对每一个实数 $\lambda\in\mathbf{R}$,对应于一个投影算子 E_λ.如果算子族$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$满足如下条件:

(i) 单调性:当 $\lambda\leqslant\mu$ 时,$E_\lambda\leqslant E_\mu$;

（ii）右连续：对任意 $x\in H$，有 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}E_\lambda x=E_{\lambda_0}x$；

（iii）存在有限实数 $\lambda=a$ 及 $\lambda=b$，使 $E_a=0, E_b=I$，

则称 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ 为 H 上的**谱系**或**单位分解**.

由上一节定理 4，谱系条件（i）等价于：当 $\lambda<\mu$ 时，$E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda$.

条件（ii）实际上是指在强收敛意义下，E_λ 是右连续的.

例 1　设 $\{P_n\}_1^\infty$ 是 Hilbert 空间 H 上的两两直交的投影算子，且（强）$\sum\limits_{n=1}^\infty P_n=I$，$\{\lambda_n\}_1^\infty$ 是一列实数，满足 $a<\lambda_n\leqslant b$，定义

$$E_\lambda=\sum_{\lambda_n\leqslant\lambda}P_n$$

（当 $\lambda<\inf\limits_n\lambda_n$ 时规定 $E_\lambda=0$）. 则 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ 是谱系.

证明　注意和式 $\sum\limits_{\lambda_n\leqslant\lambda}P_n$ 有可能是无穷和，这时指的是强收敛意义下求和. 由本章 §3 定理 6，E_λ 存在且是投影算子.

（i）单调性：当 $\lambda\leqslant\mu$ 时，$E_\mu=\sum\limits_{\lambda_n\leqslant\mu}P_n=\sum\limits_{\lambda_n\leqslant\lambda}P_n+\sum\limits_{\lambda<\lambda_n\leqslant\mu}P_n=E_\lambda+\sum\limits_{\lambda<\lambda_n\leqslant\mu}P_n$，由于 $\sum\limits_{\lambda<\lambda_n\leqslant\mu}P_n\geqslant 0$，所以 $E_\lambda\leqslant E_\mu$.

（ii）右连续性：设 $\lambda_0\in\mathbf{R}, x\in H$，因为当 $\lambda>\lambda_0$ 时，$E_\lambda-E_{\lambda_0}=\sum\limits_{\lambda_0<\lambda_n\leqslant\lambda}P_n$，所以只要证明 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}\sum\limits_{\lambda_0<\lambda_n\leqslant\lambda}P_nx=0$ 即可.

由于 $\{P_n\}$ 两两直交，所以

$$\sum_{n=1}^\infty\|P_nx\|^2\leqslant\|x\|^2.$$

记 $M_\lambda=\{n\mid\lambda_0<\lambda_n\leqslant\lambda\}$，$n_\lambda=\min\limits_{n\in M_\lambda}n$（当 M_λ 是空集时规定 $n_\lambda=\infty$），显然当 $\lambda_1<\lambda_2$ 时，$M_{\lambda_1}\subseteq M_{\lambda_2}$，而且 $\bigcap\limits_{\lambda>\lambda_0}M_\lambda=\varnothing$，所以 n_λ 关于 $\lambda\in(\lambda_0,\infty)$ 是单调不增的函数，而且 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}n_\lambda=\infty$. 又因为

$$\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_n\leqslant\lambda}P_nx\right\|^2=\sum_{\lambda_0<\lambda_n\leqslant\lambda}\|P_nx\|^2=\sum_{n\in M_\lambda}\|P_nx\|^2\leqslant\sum_{n=n_\lambda}^\infty\|P_nx\|^2,$$

当 $\lambda\to\lambda_0+0$ 时，上式右端趋于零，所以

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0+0}\left\|\sum_{\lambda_0<\lambda_n\leqslant\lambda}P_nx\right\|^2=0.$$

即 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0}(E_\lambda-E_{\lambda_0})=0$，故 E_λ 是右连续的.

（iii）显然有 $E_a=0, E_b=I$.

这就证明了 $\{E_\lambda\}$ 是谱系.

例 2　设 H 是 Hilbert 空间 $L^2[0,1]$,记$(-\infty,\lambda]$的特征函数为 $e_\lambda(t)$,作算子 E_λ如下:

$$(E_\lambda f)(t)=e_\lambda(t)f(t),\quad f\in L^2[0,1].$$

由于 e_λ是有界实函数,而且 $e_\lambda^2(t)=e_\lambda(t)$,所以 E_λ是幂等的自伴算子,即投影算子.

(i) 当 $\lambda<\mu$ 时,$e_\lambda(t)e_\mu(t)=e_\mu(t)e_\lambda(t)=e_\lambda(t)$,所以

$$E_\lambda E_\mu=E_\mu E_\lambda=E_\lambda,$$

由本章 §3 定理 4 知,$E_\lambda\leqslant E_\mu$.

(ii) 对任何 $f\in L^2[0,1]$,由 Lebesgue 控制收敛定理,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\int_0^1|e_\lambda(t)-e_{\lambda_0}(t)|^2|f(t)|^2\mathrm{d}t=0,$$

即$(E_\lambda-E_{\lambda_0})f\to0(\lambda\to\lambda_0)$,所以 E_λ是强连续的.

(iii) 显然 $E_0=0,E_1=I$.

因此$\{E_\lambda\}$是谱系.

定理 1　设$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$是 H 上的谱系,则对任意 $\lambda_0\in\mathbf{R}$,存在投影算子 P,使得对任意 $x\in H$,有 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}E_\lambda x=Px$,即 E_λ在强收敛意义下的左极限存在.

证明　首先证明对任意 $x,y\in H$,$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,y)$存在.任取 $\lambda<\lambda_0$,由 $E_\lambda\leqslant E_{\lambda_0}$,有

$$(E_\lambda x,x)\leqslant(E_{\lambda_0}x,x)\leqslant\|x\|^2,$$

又由于$\{(E_\lambda x,x)\}$随着 λ 的增加而增加,故 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,x)$存在.于是对任意 $\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当 $\lambda_0-\delta<\lambda'<\lambda''<\lambda_0$时,有

$$0\leqslant(E_{\lambda''}x,x)-(E_{\lambda'}x,x)<\varepsilon,$$

即

$$0\leqslant((E_{\lambda''}-E_{\lambda'})x,x)<\varepsilon.$$

任取 $x,y\in H$,由于 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,x)$及 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda y,y)$都存在,故对任给 $\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当 $\lambda_0-\delta<\lambda'<\lambda''<\lambda_0$时,有

$$0\leqslant((E_{\lambda''}-E_{\lambda'})x,x)<\varepsilon$$

及

$$0\leqslant((E_{\lambda''}-E_{\lambda'})y,y)<\varepsilon$$

同时成立.故由广义 Schwarz 不等式,有

$$|(E_{\lambda''}x,y)-(E_{\lambda'}x,y)|^2\leqslant((E_{\lambda''}-E_{\lambda'})x,x)((E_{\lambda''}-E_{\lambda'})y,y)<\varepsilon^2,$$

即

$$|(E_{\lambda''}x,y)-(E_{\lambda'}x,y)|<\varepsilon.$$

再由 Cauchy 收敛原理,知 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,y)$存在.

对任意 $x,y\in H$,令

$$\langle x,y\rangle=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,y).$$

易证$\langle x,y\rangle$满足如下性质:

(i) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$.事实上$\langle x,x\rangle=\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,x)=\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}\|E_\lambda x\|^2\geqslant 0$;

(ii) 共轭双线性:$\langle \alpha x+\beta y,z\rangle=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle$,及$\langle x,\alpha z\rangle=\bar{\alpha}\langle x,z\rangle$;

(iii) 有界性:$|\langle x,y\rangle|\leqslant\|x\|\ \|y\|$.

因此由本章 §2 定理 1 的推论,存在唯一的正算子 $P\in B(H)$,使

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,y)=(Px,y).$$

下证 P 是投影算子,只要证明 P 是幂等的自伴算子.由于

$$\begin{aligned}(Px,y)&=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,y)=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(x,E_\lambda y)\\&=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}\overline{(E_\lambda y,x)}=\overline{(Py,x)}=(x,Py),\end{aligned}$$

所以 $P=P^*$.

可以证明对任意 $\mu<\lambda_0$,$E_\mu P=PE_\mu=E_\mu$.事实上,对任意 $x,y\in H$,

$$(E_\mu Px,y)=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,E_\mu y)=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\mu E_\lambda x,y),$$

由于当 $\lambda>\mu$ 时,$E_\mu E_\lambda=E_\mu$,所以$(E_\mu Px,y)=(E_\mu x,y)$.故 $E_\mu P=E_\mu$.取共轭即有 $E_\mu=PE_\mu$.由此可知

$$(P^2x,y)=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda Px,y)=\lim_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,y)=(Px,y).$$

因此 P 是投影算子.

往证对任何 $x\in H$,$\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}E_\lambda x=Px$.

由前面的证明,对任意 $\lambda<\lambda_0$,$E_\lambda P=PE_\lambda=E_\lambda$.因此 $P-E_\lambda$是投影算子,从而

$$\|(P-E_\lambda)x\|^2=((P-E_\lambda)x,x)=(Px,x)-(E_\lambda x,x).$$

由于 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}(E_\lambda x,x)=(Px,x)$,所以 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}\|E_\lambda x-Px\|=0$,即 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0-0}E_\lambda x=Px$.证毕.

定理 1 的证明思想是:首先找一个弱收敛意义下的极限算子(这比直接找强收敛意义下的极限算子要简单),然后证明这个算子是投影算子,最后证明在强收敛意义下也收敛.这是一种很有用的方法.

对一个谱系$\{E_\lambda\}$,如果设 Δ 是左开右闭区间 $\Delta=(\alpha,\beta]$,令 $E(\Delta)=E_\beta-E_\alpha$,则由单调性知 $E(\Delta)$仍是投影算子.这时,如果有两个这种区间 Δ_1及 Δ_2,则可以验证

$$E(\Delta_1\cap\Delta_2)=E(\Delta_1)E(\Delta_2).$$

我们可以将映射 $\Delta\mapsto E(\Delta)$扩张到 $\mathbf{R}$ 上所有 Borel 集形成的 σ-代数上,从而得到所谓的谱测度.

定义 2 设 X 是一个集合，Ω 是由 X 的某些子集形成的 σ-代数，H 是Hilbert 空间，映射 $E:\Omega\to B(H)$ 满足下列条件：

(i) $E(\varnothing)=0, E(X)=I$;

(ii) 每个 $E(\Delta)$ 是投影算子，其中 $\Delta\in\Omega$;

(iii) 对 $\Delta_1,\Delta_2\in\Omega$，有 $E(\Delta_1\cap\Delta_2)=E(\Delta_1)E(\Delta_2)$;

(iv) 如果 $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$，则 $E(\Delta_1\cup\Delta_2)=E(\Delta_1)+E(\Delta_2)$;

(v) 对任意的 $x,y\in H$，$E_{x,y}(\Delta)=(E(\Delta)x,y)$，$\Delta\in\Omega$ 是 (X,Ω) 上的测度，则称 $E(\Delta)$ 是 (X,Ω,H) 上的**谱测度**.

如果 $X=\mathbf{R}^n$，我们总是假设 Ω 为 Borel 集全体形成的 σ-代数 $\mathscr{B}$.

例 3 设 X 是一个紧集，Ω 是 X 的所有 Borel 子集形成的 σ-代数，μ 是 (X,Ω) 上的测度，$H=L^2(X,\mathrm{d}\mu)$. 对 $\Delta\in\Omega$，设 χ_{Δ} 为 Δ 的特征函数，定义 $L^2(X,\mathrm{d}\mu)$ 上的算子 $E(\Delta)$ 如下：

$$(E(\Delta)f)(x)=\chi_{\Delta}(x)f(x), f\in L^2(X,\mathrm{d}\mu), x\in X.$$

容易验证 $E(\Delta)$ 是 (X,Ω,H) 上的谱测度(见本章习题 28).

例 4 设 X 是任意非空集合，Ω 是 X 的子集全体，H 是任一可分的 Hilbert 空间，$\{x_n\}$ 是 X 中固定的点列. 若 $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 是 H 的正规直交基，对 $\Delta\in\Omega$，定义 $E(\Delta)$ 为到 $\bigvee\{e_n \mid x_n\in\Delta\}$ 上的直交投影. 则 $E(\Delta)$ 是 (X,Ω,H) 上的谱测度(见本章习题 29). 由于 $E(\Delta)$ 是投影算子，所以 $E_{x,x}(\Delta)=(E(\Delta)x,x)=\|E(\Delta)x\|^2$，从而 $E_{x,x}(\Delta)$ 是正测度.

由定义 2 条件(iii)知，任意两个投影 $E(\Delta_1)$ 与 $E(\Delta_2)$ 交换. 由条件(iv)可以推出有限可加性. 那么，谱测度是否具有可数可加性？也即如 $\Delta=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$，其中 $\Delta_n\in\Omega$ 是两两不交的，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}E(\Delta_n)$ 是否在算子范数意义下收敛于$E(\Delta)$？由本章 §3 定理 6 知，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(\Delta_k)$ 强收敛于某个投影算子，又由(v)，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(\Delta_k)$ 弱收敛于 $E(\Delta)$，所以，对任何 $x\in H$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(\Delta_k)x=E(\Delta)x$，即谱测度有强收敛意义下的可数可加性.

下面我们考察 $\mathbf{R}$ 上的谱测度，并讨论谱系与谱测度之间的关系.

如果 $E(\Delta)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的谱测度，对任意 $\lambda\in\mathbf{R}$，令 $E_\lambda=E((-\infty,\lambda])$，则 E_λ 满足谱系的条件(i)与(ii)，如果 $E(\Delta)$ 还是具有紧支集的谱测度(即存在 $\mathbf{R}$ 上的闭区间$[a,b]$使 $E([a,b])=I$)，则 E_λ 是一个谱系.

事实上，如果 $\lambda<\mu$，则由于

$$(-\infty,\mu]=(-\infty,\lambda]\cup(\lambda,\mu],$$

由谱测度的条件(iii),有

$$E_\mu - E_\lambda = E((\lambda,\mu]),$$

从 $E((\lambda,\mu])$ 仍是投影算子知 $E_\mu \geqslant E_\lambda$. 为证右连续性,设 $x \in H,\lambda_0 \in \mathbf{R}$,令 $\lambda_n = \lambda_0 + \dfrac{1}{n}$,则 $E_{\lambda_n} - E_{\lambda_0} = E(\Delta_n)$,其中 $\Delta_n = \left(\lambda_0,\lambda_0+\dfrac{1}{n}\right]$. 所以

$$\| E_{\lambda_n}x - E_{\lambda_0}x \|^2 = \| E(\Delta_n)x \|^2 = (E(\Delta_n)x,x).$$

由于 $E_{x,x}$ 是正测度,且 $\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \supseteq \cdots$,及 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \varnothing$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(E(\Delta_n)x,x) = 0$. 故

$$\lim_{n\to\infty} E_{\lambda_n}x = E_{\lambda_0}x.$$

再由 E_λ 的单调性,容易证明 $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_0+0} E_\lambda x = E_{\lambda_0}x$,即右连续性成立.

现在的问题是:如果给出 $\mathbf{R}$ 上的一个谱系 E_λ,是否存在一个 $\mathbf{R}$ 上有紧支集的谱测度?我们有下面的结论:

定理 2　设 E_λ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个谱系,则必存在唯一的 $\mathbf{R}$ 上有紧支集的谱测度 $E(\Delta)$,使 $E_\lambda = E((-\infty,\lambda])\ (\lambda \in \mathbf{R})$.

证明　对任意 $x \in H$,$(E_\lambda x,x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调上升的右连续函数,则由这个函数可以作出一个 Lebesgue-Stieltjes 测度,记为 μ_x. 显然,对任意 $x \in H, a, b \in \mathbf{R}$,有

$$\mu_x((a,b]) = ((E_b - E_a)x,x).$$

固定一个 Borel 集 A_0,令 $\varphi_{A_0}(x) = \mu_x(A_0)$,由于

$$(E_\lambda(\alpha x),\alpha x) = |\alpha|^2(E_\lambda x,x),\ \alpha \in \mathbf{C},$$

所以

$$\mu_{\alpha x}(A_0) = |\alpha|^2 \mu_x(A_0),$$

即

$$\varphi_{A_0}(\alpha x) = |\alpha|^2 \varphi_{A_0}(x).$$

又

$$(E_\lambda(x+y),x+y) + (E_\lambda(x-y),x-y) = 2(E_\lambda x,x) + 2(E_\lambda y,y),$$

所以

$$2\mu_x + 2\mu_y = \mu_{x+y} + \mu_{x-y}.$$

故

$$\varphi_{A_0}(x+y) + \varphi_{A_0}(x-y) = 2\varphi_{A_0}(x) + 2\varphi_{A_0}(y).$$

因为

$$0 \leqslant \varphi_{A_0}(x) = \mu_x(A_0) \leqslant \mu_x(\mathbf{R}) = \| x \|^2,$$

所以 φ_{A_0} 是实的有界二次形式,由本章 §2 定理 2,存在唯一的有界自伴算子 T_{A_0} 使 $\varphi_{A_0}(x) = (T_{A_0}x,x)$,即

$$(T_{A_0}x,x)=\mu_x(A_0).$$

将这个算子记为 $E(A_0)=T_{A_0}$.

由 $E((a,b])=E_b-E_a$，可以证明 $E(\Delta)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的谱测度.

E 具有紧支集很容易从谱系的条件(iii)得到. 证毕.

从前面的讨论，我们知道在 $\mathbf{R}$ 上，谱系与谱测度的概念本质上是一致的. 但在 $\mathbf{R}^n$ 上，因为没有谱系的概念，所以谱测度是一个更有用更一般的概念.

有了谱系和谱测度，我们就可以给出谱积分的概念了. 先考虑直线上的谱积分.

设 $\{E_\lambda\}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的谱系，$E_a=0,E_b=I$，则对于任意 $x\in H$，$(E_\lambda x,x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增加的有界函数，从而是有界变差实函数. 对任意 $x,y\in H$，由于

$$(E_\lambda x,y)=\frac{1}{4}[(E_\lambda(x+y),x+y)-(E_\lambda(x-y),x-y)+$$
$$\mathrm{i}(E_\lambda(x+\mathrm{i}y),x+\mathrm{i}y)-\mathrm{i}(E_\lambda(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)],$$

从而 $(E_\lambda x,y)$ 是复值的有界变差函数. 事实上，对 $[a,b]$ 的任一分划：

$$a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b,$$

记 $\Delta_k=(\lambda_{k-1},\lambda_k]$，$E(\Delta_k)=E_{\lambda_k}-E_{\lambda_{k-1}}(k=1,2,\cdots,n)$，则有

$$(E(\Delta_i)x,E(\Delta_j)x)=0,\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\|E(\Delta_k)x\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{n}E(\Delta_k)x\right\|^2=\|x\|^2.$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|(E(\Delta_k)x,y)|&=\sum_{k=1}^{n}|(E(\Delta_k)x,E(\Delta_k)y)|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\|E(\Delta_k)x\|\,\|E(\Delta_k)y\|\\&\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}\|E(\Delta_k)x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\|E(\Delta_k)y\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

故 $(E_\lambda x,y)$ 是有界变差函数，而且其全变差 $V_a^b(E_\lambda x,y)\leqslant\|x\|\,\|y\|$. 因此，$(E_\lambda x,y)$ 定义了 $\mathbf{R}$ 上的 Lebesgue-Stieltjes 测度. 对任意 $[a,b]$ 上的有界 Borel 可测函数 $f(\lambda)$，Lebesgue-Stieltjes 积分 $\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)$ 存在.

定义 3　设 $\{E_\lambda\}$ 是 H 上的谱系，$E_a=0,E_b=I$，$f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的有界 Borel 可测函数，若存在 $T\in B(H)$，使对任意 $x,y\in H$，有

$$(Tx,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y),$$

则称 T 为函数 $f(\lambda)$ 关于 E_λ 的**弱谱积分**,记为 $T=(\text{弱})\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$.

如果 $f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,Lebesgue-Stieltjes 积分 $\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)$ 也是 Riemann-Stieltjes 积分,为积分和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)[(E_{\lambda_i}x,y)-(E_{\lambda_{i-1}}x,y)]$ 当 $\eta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_{i-1}|\to 0$ 时的极限.或者说,T 是和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(E_{\lambda_i}-E_{\lambda_{i-1}})$ 当$\eta\to 0$时的弱极限.但算子空间 $B(H)$ 中除弱收敛概念外,还有一致收敛和强收敛的概念,是不是可以定义相应的一致谱积分和强谱积分呢? 事实的确如此.

定义 4　设 E_λ 是 $\mathbf{R}$ 上的谱系,并且 $E_a=0,E_b=I$.设 $f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上定义的有界 Borel 可测函数.用分点

$$a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b$$

将 $(a,b]$ 分成一组左开右闭的区间 $\Delta_k=(\lambda_{k-1},\lambda_k]$,并令 $E(\Delta_k)=E_{\lambda_k}-E_{\lambda_{k-1}}(k=1,2,\cdots,n)$.任取 $\xi_k\in\Delta_k$,作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)E(\Delta_k).$$

令 $\eta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|$,如果当 $\eta\to 0$ 时,不论分划如何作出,也不论 ξ_k 如何选取,上述和式都在算子范数意义下收敛于一个给定的算子 T,即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,只要 $\eta<\delta$,就有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)E(\Delta_k)-T\right\|<\varepsilon,$$

则称 T 为 $f(\lambda)$ 关于谱系 E_λ 的**一致谱积分**,记为 $T=(\text{一致})\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$.

如果对任意 $\varepsilon>0,x\in H$,存在 $\delta>0$,只要 $\eta<\delta$,就有

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)E(\Delta_k)x-Tx\right\|<\varepsilon,$$

则称 T 为 $f(\lambda)$ 关于 E_λ 的**强谱积分**,记为 $T=(\text{强})\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$.

注　如果有一个 $\mathbf{R}^n$ 中具紧支集的谱测度 $E(\Delta)$,我们仍可以按类似的方法定义在各种收敛意义下的谱积分.

是不是对任意的谱系,相应的谱积分都存在呢? 下面的定理回答了这一问题.

定理 3　设 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ 是 H 上的谱系,$E_a=0,E_b=I,f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的有界 Borel 可测函数,则存在 $T\in B(H)$,使对任意 $x,y\in H$,

$$(Tx,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y).$$

即弱谱积分是存在的.

证明　前面已经指出,对任意 $x,y\in H$,积分 $\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)$ 存在.令

$$\varphi(x,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y).$$

显然,$\varphi(x,y)$ 是 H 上的双线性形式.又

$$|\varphi(x,y)|\leqslant\|f\|\ \|x\|\ \|y\|,$$

所以 φ 还是有界的,由本章§2 定理 1,存在唯一的有界线性算子 $T\in B(H)$,使

$$\varphi(x,y)=(Tx,y).$$

即 T 是弱谱积分.证毕.

下面这个定理讨论了各种谱积分之间的关系.

定理 4　设 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$ 是 H 上的谱系,且 $E_a=0,E_b=I$,$f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,则(一致) $\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 存在,而且弱谱积分就是一致谱积分.

证明　对连续函数 $f(\lambda)$ 而言,Lebesgue-Stieltjes 积分也是 Riemann-Stieltjes 积分,由定理 3,弱谱积分存在.设 $T\in B(H)$,且对任意 $x,y\in H$,

$$(Tx,y)=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y).$$

往证在一致收敛意义下 $T=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$.

首先设 $f(\lambda)$ 是实函数,在 $[a,b]$ 中插入分点

$$a=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=b,$$

任取 $\mu_k\in[\lambda_{k-1},\lambda_k]$,$k=1,2,\cdots,n$,令

$$\varepsilon=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\sup_{\lambda_{k-1}\leqslant\lambda<\mu\leqslant\lambda_k}|f(\lambda)-f(\mu)|,\quad \delta=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k-\lambda_{k-1}\}.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续,从而是一致连续的,故当 $\delta\to 0$ 时,$\varepsilon\to 0$.令

$$S=\sum_{k=1}^n f(\mu_k)E(\Delta_k),$$

其中 $E(\Delta_k)=E_{\lambda_k}-E_{\lambda_{k-1}}$.对任意 $x\in H$ 有

$$(Tx,x)=\sum_{k=1}^n\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,x),$$

$$(Sx,x)=\sum_{k=1}^n\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}f(\mu_k)\mathrm{d}(E_\lambda x,x),$$

从而

$$(Tx,x)-(Sx,x)=\sum_{k=1}^n\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\left[f(\lambda)-f(\mu_k)\right]\mathrm{d}(E_\lambda x,x).$$

由于 $(E_\lambda x,x)$ 单调增加,所以

$$|((T-S)x,x)|\leqslant\varepsilon\|x\|^2,$$

于是

$$\sup_{\|x\|=1}|((T-S)x,x)|\leqslant\varepsilon.$$

但 $T-S$ 是自伴算子(见下面的定理 6),所以上式左端为 $\max\{|m(T-S)|,|M(T-S)|\}=\|T-S\|$,即

$$\|T-S\|\leqslant\varepsilon.$$

这说明,当 $\delta\to0$ 时,$S\to T$,即 $T=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 在算子范数收敛意义下成立.

对复值函数,只要考虑实、虚部分解即可.证毕.

显然一致谱积分是强谱积分,因此根据这个定理,对于连续函数,三种谱积分实际上是一样的.

我们简单地讨论一下谱积分的性质.假设以下的谱积分都是弱谱积分.对于一致谱积分和强谱积分,只要所涉及的积分存在,结论也是对的.

定理 5　设 E_λ 是 $\mathbf{R}$ 上的谱系,$E_a=0$,$E_b=I$,$f(\lambda)$,$g(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的有界 Borel 可测函数.则

(i) $\int_a^b[f(\lambda)+g(\lambda)]\mathrm{d}E_\lambda=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda+\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$;

(ii) $\int_a^b \alpha f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\alpha\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$;

(iii) $\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right)^*=\int_a^b\overline{f(\lambda)}\mathrm{d}E_\lambda$;

(iv) $\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\left(\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right)\left(\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\right)$.

注　性质(i),(ii)与(iii)与普通的抽象积分的性质一样,也很容易从定义证明.我们要特别注意的是性质(iv),这个性质与普通的积分是不同的,以前我们所接触的积分都不具有这个性质!

证明　仅证明性质(iv).设

$$T_1=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda,T_2=\int_a^b g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda,S=\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

则对任意 $x,y\in H$,有

$$\begin{aligned}(T_1T_2x,y)&=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda T_2x,y)\\&=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}(T_2x,E_\lambda y)\\&=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\int_a^b g(\mu)\mathrm{d}(E_\mu x,E_\lambda y)\\&=\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\int_a^b g(\mu)\mathrm{d}(E_\lambda E_\mu x,y).\end{aligned}$$

由于当 $\mu>\lambda$ 时，$E_\mu E_\lambda=E_\lambda$，当 $\mu\leqslant\lambda$ 时，$E_\mu E_\lambda=E_\mu$，所以上式最后一个积分为

$$\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}\int_a^\lambda g(\mu)\,\mathrm{d}(E_\mu x,y)$$
$$=\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x,y)=(Sx,y).$$

故 $T_1T_2=S$. 证毕.

推论　设 E_λ，$f(\lambda)$，$g(\lambda)$ 同定理 5，则

(i) $\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 与 $\int_a^b g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 可交换；

(ii) $\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 与每个 $E(\Delta)$ 可交换，其中 Δ 是 Borel 集；

(iii) $\left\|\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right\|\leqslant\sup\limits_{\lambda\in[a,b]}|f(\lambda)|$.

前面两点容易从上述定理 5 得到，下证(iii). 由于

$$\left|\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x,y)\right|\leqslant\|f\|_\infty V_a^b(E_\lambda x,y)\leqslant\sup_{\lambda\in[a,b]}|f(\lambda)|\,\|x\|\,\|y\|,$$

所以 $\left\|\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right\|\leqslant\sup\limits_{\lambda\in[a,b]}|f(\lambda)|$.

由定理 5 易得下面的

定理 6　设 E_λ 是 $\mathbf{R}$ 上的谱系，$f(\lambda)$ 是 $[a,b]$ 上的有界 Borel 可测函数，则

(i) 如果 $f(\lambda)$ 是实值函数，则 $\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 是自伴算子；

(ii) 如果 $f(\lambda)\geqslant 0$，则 $\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 是正算子；

(iii) 如果 $|f(\lambda)|\equiv 1$，则 $\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 是酉算子；

(iv) 一般地，$\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ 是正规算子.

4.2　有界自伴算子的谱分解定理

有了前面的准备工作，现在可以建立有界自伴算子的谱分解理论了.

定理 7　设 T 是 Hilbert 空间上的有界自伴算子，则存在谱系 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$，满足：

(i) 对每个 λ，$E_\lambda T=TE_\lambda$；

(ii) 对每个 $\lambda<m(T)$，$E_\lambda=0$，$\lambda\geqslant M(T)$，$E_\lambda=I$；

(iii) 对任意的 $x,y\in H$，及实系数多项式 p，有

$$(p(T)x,y)=\int_\alpha^\beta p(\lambda)\,\mathrm{d}(E_\lambda x,y),$$

其中 $\alpha<m(T),\beta\geqslant M(T)$.

证明 设 $p(\lambda)$是任一实系数多项式,则 $p(T)$是自伴算子,从而 $p(T)$的谱半径是 $\|p(T)\|$.又由谱映射定理,有 $\sigma(p(T))=p(\sigma(T))$,故

$$\|p(T)\|=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|p(\lambda)|.$$

记 $C_R([m(T),M(T)])$为区间$[m(T),M(T)]$上的实值连续函数全体组成的实 Banach 空间,取上确界范数.由 Weierstrass 定理知,实系数多项式全体 P 在 $C_R([m(T),M(T)])$中稠密.任取 $x,y\in H$,令

$$L(p)=(p(T)x,y),$$

易知 L 是 P 上的复值线性泛函,且

$$|L(p)|\leqslant\|p\|_\infty\|x\|\ \|y\|,$$

因此 L 是 P 上的连续线性泛函.由于 P 在 C_R中稠密,L 可以唯一地延拓成 C_R上的连续线性泛函,仍记为 L.由于 C_R的共轭空间是规范化的实值有界变差函数全体 $V_0[a,b]$(即满足在(a,b)每一点右连续且$f(a)=0$的有界变差函数f全体).如果设 $L(f)=L_1(f)+\mathrm{i}L_2(f)$,其中 L_1,L_2是 C_R上的实值连续线性泛函,我们可以得到唯一的复值有界变差函数 $V(\lambda;x,y)$,使

$$(p(T)x,y)=L(p)=\int_{m(T)}^{M(T)}p(\lambda)\mathrm{d}V(\lambda;x,y),\tag{1}$$

且 $V(\lambda;x,y)$满足规范化条件

$$V(m(T);x,y)=0,V(\lambda;x,y)=V(\lambda+0;x,y),\ \forall\lambda\in(m(T),M(T)).$$

下面要证明:对固定的 $\lambda,V(\lambda;x,y)$是有界的共轭双线性形式.

(i) 对 $\alpha\in\mathbf{C}$,由于

$$\begin{aligned}\int_{m(T)}^{M(T)}\lambda^n\mathrm{d}V(\lambda;\alpha x,y)&=(T^n(\alpha x),y)=\alpha(T^nx,y)\\&=\alpha\int_{m(T)}^{M(T)}\lambda^n\mathrm{d}V(\lambda;x,y)\\&=\int_{m(T)}^{M(T)}\lambda^n\mathrm{d}[\alpha V(\lambda;x,y)].\end{aligned}$$

所以对任意多项式,且进一步对任意连续函数f,有

$$\int_{m(T)}^{M(T)}f(\lambda)\mathrm{d}V(\lambda;\alpha x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)}f(\lambda)\mathrm{d}[\alpha V(\lambda;x,y)].$$

从而 $V(\lambda;\alpha x,y)=\alpha V(\lambda;x,y)$.

(ii) 由完全类似的证明可得

$$V(\lambda;x_1+x_2,y)=V(\lambda;x_1,y)+(\lambda;x_2,y),$$

及

$$V(\lambda;x,y)=\overline{V(\lambda;y,x)}.$$

(iii) 由第一段的讨论,对 C_R上的连续线性泛函 L,有

$$\|L\| \leqslant \|x\|\ \|y\|.$$

将 L 写成 $L_1+\mathrm{i}L_2$,其中 L_1,L_2是实的连续线性泛函.则 $\|L_1\|$及 $\|L_2\| \leqslant \|x\|\ \|y\|$,这样 L_1,L_2所对应的有界变差函数的全变差也不大于 $\|x\|\ \|y\|$.于是

$$|V(\lambda;x,y)| \leqslant 2\|x\|\ \|y\|.$$

这就证明了共轭双线性形式 $V(\lambda;x,y)$是有界的.因而存在有界的自伴线性算子 $F(\lambda)$,使

$$V(\lambda;x,y)=(F(\lambda)x,y).$$

由 $V(m(T);x,y)=0$ 得 $F(m(T))=0$.

取 $p\equiv 1$,(1)式成为

$$(x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)} \mathrm{d}V(\lambda;x,y)=V(M(T);x,y),$$

故 $F(M(T))=I$.

下证对 $\lambda\leqslant\mu$,有

$$F(\lambda)F(\mu)=F(\mu)F(\lambda)=F(\lambda).$$

特别地,$F(\lambda)^2=F(\lambda)$,从而 $F(\lambda)$是直交投影.记

$$U(\lambda;x,y)=\int_{m(T)}^{\lambda} \mu^m \mathrm{d}V(\mu;x,y).$$

由 Stieltjes 积分的性质,有

$$\int_{m(T)}^{M(T)} \lambda^n \mathrm{d}U(\lambda;x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)} \lambda^{n+m}\mathrm{d}V(\lambda;x,y)$$

$$=(T^{m+n}x,y)=(T^n x,T^m y)=\int_{m(T)}^{M(T)} \lambda^n \mathrm{d}V(\lambda;x,T^m y).$$

从而,对于所有的多项式,进一步,对于所有的连续函数 $f(\lambda)$,有

$$\int_{m(T)}^{M(T)} f(\lambda)\mathrm{d}U(\lambda;x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)} f(\lambda)\mathrm{d}V(\lambda;x,T^m y).$$

由唯一性,有

$$U(\lambda;x,y)=V(\lambda;x,T^m y).$$

又

$$V(\lambda;x,T^m y)=(F(\lambda)x,T^m y)=(T^m F(\lambda)x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)} \mu^m \mathrm{d}V(\mu;F(\lambda)x,y),$$

所以

$$\int_{m(T)}^{\lambda} \mu^m \mathrm{d}(F(\mu)x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)} \mu^m \mathrm{d}(F(\mu)F(\lambda)x,y).$$

左边的积分可以写为 $\int_{m(T)}^{M(T)} \mu^m \mathrm{d}W(\mu;x,y)$,其中

$$W(\mu;x,y)=\begin{cases}(F(\mu)x,y), & m(T)\leqslant\mu\leqslant\lambda,\\ (F(\lambda)x,y), & \lambda\leqslant\mu\leqslant M(T).\end{cases}$$

仍由唯一性,有

$$(F(\mu)F(\lambda)x,y)=(F(v)x,y),$$

此处 $v=\min\{\lambda,\mu\}$.故当 $\lambda\leqslant\mu$ 时,有

$$F(\lambda)F(\mu)=F(\mu)F(\lambda)=F(\lambda).$$

最后证明 $F(\lambda)$的右连续性.设 $\lambda\in(m(T),M(T))$,$x\in H$,记

$$F(\lambda+0)x=\lim_{\mu\to\lambda+0}F(\mu)x.$$

下证

$$F(\lambda+0)x=F(\lambda)x,\quad \lambda\in(m(T),M(T)).$$

对 $\mu>\lambda$,由于 $F(\lambda)\leqslant F(\mu)$,故 $F(\mu)-F(\lambda)$也是投影算子,于是

$$\begin{aligned}\|F(\mu)x-F(\lambda)x\|^2&=(F(\mu)x-F(\lambda)x,x)\\&=(F(\mu)x,x)-(F(\lambda)x,x)\\&=V(\mu;x,x)-V(\lambda;x,x).\end{aligned}$$

由于 $V(\lambda;x,y)$是规范的,所以当 $\mu\to\lambda+0$ 时,有 $\|F(\mu)x-F(\lambda)x\|^2\to 0$,即

$$F(\lambda+0)x=F(\lambda)x,\quad \lambda\in(m(T),M(T)).$$

类似上式的证明,当 $m(T)<\lambda_1<\lambda_2$,且 $\lambda_i\to m(T)+0(i=1,2)$时,有

$$\|F(\lambda_2)x-F(\lambda_1)x\|^2=(F(\lambda_2)x,x)-(F(\lambda_1)x,x)\to 0.$$

故 $\lim\limits_{\lambda\to m(T)+0}F(\lambda)x$ 存在,记为 $F(m(T)+0)x$.由于

$$(p(T)x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)}p(\lambda)\,\mathrm{d}\,(F(\lambda)x,y),$$

定义

$$E_\lambda=\begin{cases}0, & \lambda<m(T),\\ I, & \lambda\geqslant M(T),\\ F(\lambda+0), & m(T)\leqslant\lambda\leqslant M(T).\end{cases}$$

则当 $m(T)<\lambda\leqslant M(T)$时,有 $E_\lambda=F(\lambda)$.容易验证 E_λ的确是谱系,且当 $\lambda<m(T)$时,$E_\lambda=0$;当 $\lambda\geqslant M(T)$时,$E_\lambda=I$.但 E_λ在 $m(T)$点可能与 $F(\lambda)$不同.

任取 $\alpha<m(T)$及 $\beta\geqslant M(T)$,容易计算

$$\int_{M(T)}^{\beta}p(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)=0.$$

而

$$\int_{\alpha}^{m(T)}\mathrm{d}(E_\lambda x,y)+\int_{m(T)}^{M(T)}p(\lambda)\mathrm{d}[(E_\lambda x,y)-(F(\lambda)x,y)]=0.$$

故

$$\int_{\alpha}^{\beta}p(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,y)=\int_{m(T)}^{M(T)}p(\lambda)\mathrm{d}(F(\lambda)x,y)=(p(T)x,y).$$

往证 $TE_\mu=E_\mu T$.因为

$$
\begin{aligned}
(E_\mu Tx, y) = (Tx, E_\mu y) &= \int_\alpha^\beta \lambda \mathrm{d}(E_\lambda x, E_\mu y) \\
&= \int_\alpha^\beta \lambda \mathrm{d}(E_\mu E_\lambda x, y) = \int_\alpha^\beta \lambda \mathrm{d}(E_\lambda E_\mu x, y) \\
&= (TE_\mu x, y),
\end{aligned}
$$

故 $E_\mu T = TE_\mu$. 定理 7 证毕.

定理 7 中的 $p(T)$ 是 $p(\lambda)$ 在弱收敛意义下的谱积分. 由于多项式是连续函数,根据定理 4,弱谱积分也是一致谱积分,故有下面的主要结论:

定理 8(有界自伴算子的谱分解定理)　设 T 是 Hilbert 空间上的有界自伴算子,则存在谱系 E_λ,使对任意的 $\alpha<m(T)$, $M(T)\leqslant\beta$,及实系数多项式 $p(\lambda)$,有

$$p(T) = (\text{一致}) \int_\alpha^\beta p(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda.$$

特别地,有

$$T = (\text{一致}) \int_\alpha^\beta \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

满足定理 7 中条件的谱系是由算子 T 唯一确定的,即如果 G_λ 是谱系,满足 $TG_\lambda = G_\lambda T$,及

$$(Tx, x) = \int_\alpha^\beta \lambda \mathrm{d}(G_\lambda x, x),$$

则 $G_\lambda = E_\lambda$. 这一点我们可以从定理 7 的证明中提到的规范化有界变差函数的唯一性得到. 通常称 $\{E_\lambda\}$ 为 T 的谱系或单位分解.

定理 8 中, $p(T) = \int_\alpha^\beta p(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda$, p 是一个实值多项式,下面我们要将这个公式推广到任意的在 $[m(T), M(T)]$ 上定义的复值连续函数上去. 对 $f\in C[m(T), M(T)]$,扩充 f 的定义:当 $\lambda\in[\alpha, m(T)]$ 时, $f(\lambda)=f(m(T))$;当 $M(T)\leqslant\lambda\leqslant\beta$ 时, $f(\lambda)=f(M(T))$,则 $f(\lambda)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. 由定理 4,(一致) $\int_\alpha^\beta f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 存在,于是可以令

$$f(T) = \int_\alpha^\beta f(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda. \tag{2}$$

从而将函数演算推广到连续函数情形.

从定理 3 可以看出,即使对于 $[\alpha,\beta]$ 上的有界可测 Borel 函数,仍可以利用

$$(f(T)x, y) = \int_\alpha^\beta f(\lambda) \mathrm{d}(E_\lambda x, y)$$

定义 $f(T)$,但此时

$$f(T) = \int_\alpha^\beta f(\lambda) \mathrm{d}E_\lambda$$

不一定在算子范数意义下成立.

自伴算子的函数演算有以下性质：

定理 9　设 f,g 是 $[m(T),M(T)]$ 上的连续函数，如上所述扩充到 $[\alpha,\beta]$ 上，$f(T),g(T)$ 如(2)式定义，则

(i) $(f+g)(T)=f(T)+g(T)$；

(ii) $(\alpha f)(T)=\alpha f(T),\alpha\in\mathbf{C}$；

(iii) $(fg)(T)=f(T)g(T)$；

(iv) $\|f(T)x\|^2=\int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2$；

(v) 若 $f_n,f\in C[\alpha,\beta]$，且 $\|f_n-f\|\to 0\ (n\to\infty)$，则

$$\|f_n(T)-f(T)\|\to 0\ (n\to\infty)；$$

(vi) $S\in B(H)$ 与 T 可交换当且仅当对任意 λ，$SE_\lambda=E_\lambda S$，当且仅当对任意 $f\in C[\alpha,\beta]$，$Sf(T)=f(T)S$.

证明　(i)与(ii)是显然的，(iii)可以从定理 5 的(iv)得到.

(iv) 的证明：从 $\|f(T)x\|^2=(f(T)^*f(T)x,x)=\left(\int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2\mathrm{d}E_\lambda x,x\right)=\int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2\mathrm{d}(E_\lambda x,x)=\int_\alpha^\beta |f(\lambda)|^2\mathrm{d}\|E_\lambda x\|^2$ 立即得到.

(v) 可以从定理 5 的推论得到.

(vi) 的证明：如果 S 与 T 可交换，则对任意多项式 p，有 $p(T)S=Sp(T)$. 又因为多项式全体在 $C[\alpha,\beta]$ 中稠密，结合(v)，知对任一 $f\in C[\alpha,\beta]$，有 $f(T)S=Sf(T)$. 任取 $x,y\in H$，由 $Sf(T)=f(T)S$，得

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda Sx,y)&=(f(T)Sx,y)\\&=(Sf(T)x,y)\\&=(f(T)x,S^*y)\\&=\int_\alpha^\beta f(\lambda)\mathrm{d}(E_\lambda x,S^*y).\end{aligned}$$

由于 $(E_\lambda Sx,y)$，$(E_\lambda x,S^*y)$ 都是规范化的有界变差函数，而 f 又是任意的，故由唯一性，有 $(E_\lambda Sx,y)=(E_\lambda x,S^*y)$，从而 $E_\lambda S=SE_\lambda$.

反之，如果对任意 λ，$E_\lambda S=SE_\lambda$，由 T 作为积分和的极限知 $TS=ST$. 证毕.

自伴算子的谱系 E_λ 实际上反映了 T 的谱的性质. 下面两个定理说明了这一点.

定理 10　设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自伴算子，如果 $\lambda_0\in\mathbf{R}$，则 $\lambda_0\in\rho(T)$ 当且仅当存在 $\varepsilon>0$，使 E_λ 在 $[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]$ 上取常值.

证明　为证充分性，令 $f(\lambda)=\lambda_0-\lambda$，

$$g(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_0-\lambda}, & \lambda \overline{\in} [\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon],\\ \text{线性函数}, & \lambda \in [\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon],\end{cases}$$

则当 $\lambda \overline{\in} [\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]$ 时,$f(\lambda)g(\lambda)=1$.由于 E_λ 在$[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]$取常值,故

$$f(T)g(T)=\int_\alpha^\beta f(\lambda)g(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}E_\lambda=I.$$

所以 $g(T)$ 是 $\lambda_0 I-T=f(T)$ 的逆,故 $\lambda_0\in\rho(T)$.

下证必要性.设 $\lambda_0\in\mathbf{R}$,且 $\lambda_0\in\rho(T)$.由于 $\lambda_0\neq m(T)$,$\lambda_0\neq M(T)$,而当 $\lambda<m(T)$ 时,$E_\lambda=0$;当 $\lambda>M(T)$ 时,$E_\lambda=I$,故只需对 $\lambda_0\in(m(T),M(T))$ 证之.

反设对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda_0-\varepsilon,\lambda_0+\varepsilon]$,$\lambda_1<\lambda_2$,使 $E_{\lambda_1}\neq E_{\lambda_2}$.由于 $E_{\lambda_1}<E_{\lambda_2}$,故 $E_{\lambda_1}H\subsetneqq E_{\lambda_2}H$.取 $y\in E_{\lambda_2}H\ominus E_{\lambda_1}H$,则 $E_{\lambda_2}y=y$,$E_{\lambda_1}y=0$.

当 $\lambda\leqslant\lambda_1$ 时,$E_\lambda y=E_\lambda E_{\lambda_1}y=0$;

当 $\lambda\geqslant\lambda_2$ 时,$E_\lambda y=E_\lambda E_{\lambda_2}y=E_{\lambda_2}y=y$.

所以

$$\|(\lambda_0 I-T)y\|^2=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}(\lambda_0-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2\leqslant\varepsilon^2\|y\|^2.$$

由 ε 的任意性知,$\inf\limits_{\|x\|=1}\|(\lambda_0 I-T)x\|=0$,所以 $\lambda_0\in\sigma(T)$.这与假设矛盾.证毕.

定理 11 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界自伴算子,则

(i) $\mu\in\mathbf{R}$ 是 T 的点谱的充要条件是 $E_\mu\neq E_{\mu-0}$,相应于 μ 的特征子空间是投影算子 $E_\mu-E_{\mu-0}$ 的值域;

(ii) $\mu\in\mathbf{R}$ 属于 T 的连续谱的充要条件是 $E_\mu=E_{\mu-0}$ 且 E_λ 在 μ 的任何邻域都不取常值.

证明 $E_{\mu-0}$ 的存在性由定理 1 立得.由于当 $\lambda\leqslant\mu$ 时,$E_\lambda E_\mu=E_\lambda$,所以当 $\mu>\lambda$ 时,有 $E_\lambda E_{\mu-0}=E_\lambda$.故 $E_{\mu-0}$ 及 $E_\mu-E_{\mu-0}$ 也是投影算子.

若 $E_\mu\neq E_{\mu-0}$,则存在 $y=(E_\mu-E_{\mu-0})x$,使 $y\neq0$.因为当 $\lambda<\mu$ 时,

$$E_\lambda y=(E_\lambda E_\mu-E_\lambda E_{\mu-0})x=0;$$

当 $\lambda\geqslant\mu$ 时,

$$E_\lambda y=(E_\lambda E_\mu-E_\lambda E_{\mu-0})x=(E_\mu-E_{\mu-0})x=y.$$

所以

$$\|(\mu I-T)y\|^2=\int_\alpha^\beta(\mu-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2=\int_\alpha^\mu(\mu-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2=0.$$

故 μ 是 T 的特征值.

反之,设 μ 是 T 的特征值,$y\neq0$ 满足 $Ty=\mu y$,则

$$0=\int_\alpha^\beta(\mu-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2.$$

不妨设 $M(T)<\beta$,则 $\alpha<m(T)\leqslant\mu<\beta$.取 $\varepsilon>0$,使 $\alpha<\mu-\varepsilon$ 及 $0<\mu<\mu+\varepsilon<\beta$.由于

$(\mu-\lambda)^2\geqslant 0$,故有

$$\int_{\alpha}^{\mu-\varepsilon}(\mu-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}(\mu-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2=0.$$

但左端积分$\geqslant\varepsilon^2(\|E_{\mu-\varepsilon}y\|^2-\|E_\alpha y\|^2)=\varepsilon^2\|E_{\mu-\varepsilon}y\|^2$,从而 $E_{\mu-\varepsilon}y=0$,所以 $E_{\mu-0}y=0$.同样考虑积分 $\int_{\mu+\varepsilon}^{\beta}(\mu-\lambda)^2\mathrm{d}\|E_\lambda y\|^2=0$,可得 $E_\mu y=y$.故 $E_\mu\neq E_{\mu-0}$.又 $y=(E_\mu-E_{\mu-0})y$,故 T 的相应于 μ 的特征子空间是 $E_\mu-E_{\mu-0}$的值域.结合这个结论与定理 10 可得到(ii).证毕.

4.3 正算子

在本章§2,我们介绍了正算子的概念,并且知道一个算子 $T\in B(H)$是正算子的充要条件为 T 是自伴算子且 $\sigma(T)\subseteq\mathbf{R}^+=\{x\in\mathbf{R}\mid x\geqslant 0\}$.本小节要利用前面的谱分解定理,进一步讨论正算子的一些性质,特别是给出正算子的平方根的存在性和自伴算子的正负分解.同时,正如复数 z 可以写成 $z=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$一样,我们还要讨论一般算子的类似分解,这时,正算子扮演了复数模 z 的类似物的角色.

对正算子 T 而言,$M(T)\geqslant m(T)\geqslant 0$,由本章§2 定理 7,$M(T)=\|T\|$.由谱分解定理,存在谱系$\{E_\lambda\}$满足:当 $\lambda<0$ 时,$E_\lambda=0$,$E_{\|T\|}=I$,且对任意 $\varepsilon>0$,有

$$T=\int_{-\varepsilon}^{\|T\|}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda.$$

由于 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0}\int_{-\varepsilon}^{0}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda=0$,故 $T=\int_{0}^{\|T\|}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$.

定理 12 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的正算子,则存在唯一的正算子 S,使 $T=S^2$.

证明 由谱分解定理,$T=\int_{0}^{\|T\|}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda$.取 $f(\lambda)=\sqrt{\lambda}$,则 f 是$[0,\|T\|]$上的非负连续函数.由函数演算,令

$$S=\int_{0}^{\|T\|}\sqrt{\lambda}\,\mathrm{d}E_\lambda,$$

则可知 S 也是正算子,且 $S^2=\int_{0}^{\|T\|}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda=T$.

下证唯一性.设有另一个正算子 S_1,使 $T=S_1^2$,往证 $S=S_1$.由前面的存在性证明知,有正算子 V,V_1,使 $V^2=S$,$V_1^2=S_1$.任取 $x\in H$,令 $y=(S-S_1)x$,则

$$\begin{aligned}\|Vy\|^2+\|V_1y\|^2&=(V^2y,y)+(V_1^2y,y)=(Sy,y)+(S_1y,y)\\&=((S+S_1)y,y)=((S+S_1)(S-S_1)x,y)\\&=((S^2-S_1^2)x,y)=((T-T)x,y)=0,\end{aligned}$$

故 $Vy=V_1y=0$,从而

$$\|y\|^2=(y,y)=((S-S_1)x,y)$$

$$= (V^2x,y)-(V_1^2x,y)$$
$$= (Vx,Vy)-(V_1x,V_1y)=0.$$

即对一切 $x\in H$，$Sx=S_1x$，所以 $S=S_1$. 证毕.

通常称定理 12 中的 S 为 T 的平方根，记为 $T^{\frac{1}{2}}$.

推论 1　$T\in B(H)$ 是正算子的充要条件是存在 $S\in B(H)$，使 $T=S^*S$.

证明　如果 T 是正算子，令 $S=T^{\frac{1}{2}}$，则有 $T=S^2=S^*S$.

反之，若 $T=S^*S$，则对任意 $x\in H$，有

$$(Tx,x)=(S^*Sx,x)=(Sx,Sx)=\|Sx\|^2\geqslant 0,$$

从而 T 是正算子. 证毕.

推论 2　设 T 为正算子，$x_0\in H$，若 $(Tx_0,x_0)=0$，则 $Tx_0=0$.

证明　从 $0=(Tx_0,x_0)=(T^{\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}x_0,x_0)=\|T^{\frac{1}{2}}x_0\|^2$，得 $T^{\frac{1}{2}}x_0=0$，所以 $Tx_0=T^{\frac{1}{2}}(T^{\frac{1}{2}}x_0)=0$. 证毕.

推论 3　设自伴算子 T_1,T_2 满足 $T_1\geqslant T_2$，正算子 T 与 T_1,T_2 可交换，则 $TT_1\geqslant TT_2$.

证明　由于 T_1,T_2 与 T 可交换，由定理 9 的(vi)，T_1,T_2 与 $T^{\frac{1}{2}}$ 也可交换，故对任意 $x\in H$，$(TT_1x,x)=(T^{\frac{1}{2}}T_1x,T^{\frac{1}{2}}x)=(T_1T^{\frac{1}{2}}x,T^{\frac{1}{2}}x)\geqslant(T_2T^{\frac{1}{2}}x,T^{\frac{1}{2}}x)=(TT_2x,x)$. 故 $TT_1\geqslant TT_2$. 证毕.

类似实值函数的正负部分解，对自伴算子也可作正负部分解，这就是下面的

定理 13　设 $T\in B(H)$ 是自伴算子，则存在唯一的正算子 T_+,T_-，使 $T=T_+-T_-$，$T_+T_-=0$.

证明　设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

则 $f(x)$，$g(x)$ 都是非负连续函数，且 $f(x)-g(x)=x$，$f(x)g(x)=0$，由函数演算，有 $f(T)-g(T)=T$，$f(T)g(T)=0$，$f(T)\geqslant 0$，$g(T)\geqslant 0$，令 $T_+=f(T)$，$T_-=g(T)$ 即得存在性.

由 $T=T_+-T_-$ 及 $T_+T_-=0$，有 $T^2=T_+^2+T_-^2$. 然而，$(T_++T_-)^2=T_+^2+T_-^2$，所以 $(T_++T_-)^2=T^2$. 由正算子平方根的唯一性，有 $T_++T_-=(T^2)^{\frac{1}{2}}$. 将右边这个算子记为 $|T|$，得到 $T_+=\dfrac{|T|+T}{2}$，$T_-=\dfrac{|T|-T}{2}$. 由此可知满足条件 $T=T_+-T_-$，$T_+T_-=0$ 的正算子 T_+,T_- 是唯一的. 证毕.

为了得到一般算子的分解式，我们还需找到 $e^{i\arg z}$ 的类似物，这个类似物就是下面的

定义 5　设算子 $V\in B(H)$,如果对任意 $x\in N(V)^{\perp}$,有 $\|Vx\|=\|x\|$,则称 V 为**部分等距算子**.称 $N(V)^{\perp}$ 为 V 的**始空间**,$R(V)$ 为 V 的**终空间**.

显然,如果 $N(V)=\{0\}$,则部分等距算子 V 就是我们在本章 § 2 定义 2 中提到的等距算子.

定理 14　设 $V\in B(H)$,则下列等价:

(i) V 是部分等距算子;

(ii) V^* 是部分等距算子;

(iii) VV^* 是投影算子;

(iv) V^*V 是投影算子.

进一步,如果 V 是部分等距算子,则 VV^* 是到 V 的终空间的投影算子,V^*V 是到 V 的始空间的投影算子.

证明　设 V 是部分等距算子,任取 $x\in H$,作直交分解

$$x=x_1+x_2,\quad x_1\in N(V)^{\perp},\quad x_2\in N(V),$$

则 $\|Vx\|^2=\|Vx_1\|^2=\|x_1\|^2=\|x\|^2-\|x_2\|^2\leqslant\|x\|^2$,所以 $\|Vx\|\leqslant\|x\|$.又

$$((I-V^*V)x,x)=(x,x)-(V^*Vx,x)=\|x\|^2-\|Vx\|^2\geqslant 0,$$

所以 $I-V^*V$ 是正算子.设 $x\in N(V)^{\perp}$,则 $\|Vx\|=\|x\|$,这推出 $((I-V^*V)x,x)=0$,由定理 12 的推论 2,$(I-V^*V)x=0$,即 $V^*Vx=x$,所以 V^*V 是到 V 的始空间的投影算子.

反之,设 V^*V 是投影算子,$x\in N(V^*V)^{\perp}$,则 $V^*Vx=x$,因此

$$\|Vx\|^2=(V^*Vx,x)=(x,x)=\|x\|^2,$$

即 V 在 $N(V^*V)^{\perp}$ 上是等距的.又从 $\|Vx\|^2=(V^*Vx,x)$,可知 $N(V^*V)=N(V)$,故 V 是部分等距算子.这就证明了(i)与(iv)是等价的.

用 V^* 代替 V,可知(ii)与(iii)也是等价的.

最后,如果 V^*V 是投影算子,则 $V(V^*V)=V$,从而

$$(VV^*)^2=V(V^*V)V^*=VV^*,$$

故 VV^* 也是投影算子.证毕.

定理 15(有界线性算子的极分解)　设 $T\in B(H)$,则存在部分等距算子 V,它的始空间是 $N(T)^{\perp}$,终空间是 $\overline{R(T)}$,使得 $T=V|T|$,其中 $|T|=(T^*T)^{\frac{1}{2}}$.进一步,如果有 $T=UP$,其中 $P\geqslant 0$,U 是部分等距算子,使 $N(U)=N(P)$,则 $P=|T|$,$U=V$.

证明　设 $x\in H$,则 $\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(T^*Tx,x)=(|T|x,|T|x)$,因此

$$\|Tx\|^2=\||T|x\|^2.$$

所以 $N(|T|)=N(T)$.由本章 § 1 定理 5,有

$$\overline{R(|T|)}=N(|T|)^{\perp}=N(T)^{\perp}.$$

定义 $V:R(|T|)\to R(T)$ 如下：

$$V(|T|x)=Tx,$$

则 V 是等距的，因此可以扩充为 $N(T)^{\perp}$ 到 $\overline{R(T)}$ 上的等距算子. 当 $x\in N(T)$ 时，定义 $Vx=0$，则 V 是一个部分等距算子，而且 $V|T|=T$.

至于唯一性，注意到 $T^*T=PU^*UP$. 由定理 14，U^*U 是到 V 的始空间上的投影算子. 又 $N(U)^{\perp}=N(P)^{\perp}=\overline{R(T)}$，所以 $T^*T=P(U^*U)P=P^2$. 由正算子平方根的唯一性，有 $P=|T|$. 从 $T=U|T|$，$U|T|x=Tx=V|T|x$，即 U 与 V 在它们共同的始空间的稠密子集 $R(|T|)$ 上相等知，$U=V$. 证毕.

§5　酉算子的谱分解定理

酉算子是除自伴算子外另一类结构较为清楚的算子，由于它也是正规算子，故可以利用后面关于正规算子的谱分解理论得到它的谱分解，但本节给出一个较为简洁的证明.

假设 $U\in B(H)$ 是酉算子，对三角多项式 $p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$，$c_k\in\mathbf{C}$，定义

$$p(U)=\sum_{k=-n}^{n}c_kU^k,$$

其中如果 $k<0$，则 $U^k=(U^{-1})^{-k}$. 显然

$$p(U)^*=\sum_{k=-n}^{n}\bar{c}_kU^{-k},$$

且 $p(U)$ 是正规算子.

定理 1　设 U 是 Hilbert 空间 H 上的酉算子，则存在谱系 $\{E_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 使得：

(i) 当 $t\leqslant 0$ 时，$E_t=0$；当 $t\geqslant 2\pi$ 时，$E_t=I$.

(ii) $E_tU=UE_t$.

(iii) 对任何 $x,y\in H$，以及三角多项式 $p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$，有

$$(p(U)x,y)=\int_0^{2\pi}p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}(E_tx,y).$$

证明类似于自伴算子谱分解定理的证明，我们只叙述大概，而不给出详细证明.

首先令 $P[0,2\pi]=\{f\in C[0,2\pi]\mid f(0)=f(2\pi)\}$，对每个 $x,y\in H$ 及三角多项式 p，令

$$\Phi(p;x,y)=(p(U)x,y),$$

则

$$|\Phi(p;x,y)| \leqslant \|p(U)\| \ \|x\| \ \|y\|.$$

由本章§2定理5的推论，$\|p(U)\| = \sup\limits_{e^{it}\in\sigma(U)} |p(e^{it})|$. 又由于 $\sigma(U) \subseteq \{z \mid z\in \mathbf{C}, |z|=1\}$，所以 $\|p(U)\| \leqslant \|p\|$. 故

$$|\Phi(p;x,y)| \leqslant \|p\| \ \|x\| \ \|y\|.$$

这样对固定的 x,y，Φ 是 p 的有界线性泛函，它可以延拓为 $P[0,2\pi]$ 上的有界线性泛函. 故存在$[0,2\pi]$上的规范化的有界变差函数 $g(t;x,y)$ 使

$$\Phi(p;x,y) = \int_0^{2\pi} p(e^{it})\,dg(t;x,y).$$

规范化保证 $g(0;x,y)=0$，$g(2\pi;x,y)=(x,y)$.

可以证明 $g(t;x,y)$ 关于 x,y 是有界的共轭双线性形式，因此存在自伴算子 E_t 使

$$g(t;x,y) = (E_t x, y),$$

且 $E_0=0$ 及 $E_{2\pi}=I$. 将 E_t 补充定义到$(-\infty,+\infty)$上，对 $t<0$，令 $E_t=0$；对 $t>2\pi$，令 $E_t=I$. 可以证明 $\{E_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ 是谱系，且满足

$$(p(U)x,y) = \int_0^{2\pi} p(e^{it})\,d(E_t x,y).$$

这就完成了定理的证明.

同样，这个弱收敛意义下的谱分解公式在算子范数意义下也成立.

定理 2 $P(U) = \int_0^{2\pi} p(e^{it})\,dE_t$ 在算子范数收敛意义下成立.

证明 只对 $p(e^{it}) = e^{int}$ 证明此式. 一般情形可由线性性质立即得到. 在$[0,2\pi]$中插入分点

$$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_m=2\pi.$$

任取 $s_k\in[t_{k-1},t_k]$，记 $\eta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\{t_k-t_{k-1}\}$，作和式

$$S = \sum_{k=1}^{m} e^{ins_k}(E_{t_k}-E_{t_{k-1}}).$$

由于 $E_{t_{k-1}} \leqslant E_{t_k}$，所以 $P_k = E_k - E_{k-1}$ 是投影，而且 $P_jP_k=0\ (j\neq k)$. 故

$$S^*S = SS^* = \sum_{k=1}^{m} |e^{ins_k}|^2 P_k = I,$$

即 S 也是酉算子.

记 $A=U^n-S$，则

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= ((U^n-S)x,(U^n-S)x)\\
&= (U^n x, U^n x) - (U^n x, Sx) - (Sx, U^n x) + (Sx,Sx)\\
&= 2(x,x) - (U^n x, Sx) - (Sx, U^n x).
\end{aligned}$$

由于

$$(E_\lambda x, U^n x) = (U^{-n} E_\lambda x, x) = \int_0^{2\pi} e^{-int} d(E_t E_\lambda x, x) = \int_0^\lambda e^{-int} d(E_t x, x),$$

所以

$$\begin{aligned}(Sx, U^n x) &= \sum_{k=1}^m e^{ins_k}(E_{t_k}x - E_{t_{k-1}}x, U^n x)\\ &= \sum_{k=1}^m e^{ins_k}\int_{t_{k-1}}^{t_k} d(E_\lambda x, U^n x)\\ &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{in(s_k-t)} d(E_t x, x).\end{aligned}$$

于是

$$(U^n x, Sx) + (Sx, U^n x) = 2\sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos(n(s_k - t))\, d(E_t x, x),$$

从而

$$\| Ax \|^2 = 2\sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} [1 - \cos(n(s_k - t))]\, d(E_t x, x).$$

对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $\eta<\delta$ 时,对任意 $t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$,

$$1-\cos(n(s_k-t))<\frac{\varepsilon}{2}.$$

所以 $\| Ax \|^2 \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} d(E_t x, x) = \varepsilon \| x \|^2$,即 $\| A \| \leqslant \sqrt{\varepsilon}$.进而

$$\lim_{\eta\to 0}\sum_{k=1}^m e^{ins_k}[E_{t_k} - E_{t_{k-1}}] = U^n,$$

即 $U^n = \int_0^{2\pi} e^{int} dE_t$ 在算子范数收敛意义下成立.证毕.

完全类似于自伴算子情形,可以证明 E_t 是由 U 唯一确定的,通常也称 E_t 为 U 的谱系或单位分解.

U 的谱性质可以由 E_t 来反映,此处不再详述.

§6　正规算子的谱分解定理

Hilbert 空间 H 上的算子 $T\in B(H)$ 称为正规算子,即满足 $T^*T=TT^*$,我们前面研究的自伴算子与酉算子都是正规算子的特例.本节研究正规算子的谱分解.

自伴算子的谱为 **R** 的子集,酉算子的谱在单位圆周上.用拓扑的观点来看,它们的谱都是“一维”的,所以可以表示为谱系的积分.但对一般的正规算子,我们只知道它的谱是平面的有界闭子集,是二维子集,因此不能表示为谱系的积

分.合适的做法是将它表示为平面上的谱测度的积分.

设 $T\in B(H)$,则 $T_1=\dfrac{T^*+T}{2}$,$T_2=\dfrac{T^*-T}{2\mathrm{i}}$都是自伴算子,且 $T=T_1+\mathrm{i}T_2$.称 T_1,T_2 为 T 的实部和虚部,分别记为 $\mathrm{Re}\ T=T_1$,$\mathrm{Im}\ T=T_2$.任取 $x\in H$,$\|x\|=1$,由于 $|(Tx,x)|^2=|(T_1x,x)|^2+|(T_2x,x)|^2$,所以 $|(T_ix,x)|\leqslant\|T\|(i=1,2)$,故有 $\|T_1\|\leqslant\|T\|$ 及 $\|T_2\|\leqslant\|T\|$.

定理 1 设 H 是 Hilbert 空间,$T\in B(H)$,则 T 为正规算子的充要条件是 $\mathrm{Re}\ T$与 $\mathrm{Im}\ T$ 可交换.

证明 记 $T_1=\mathrm{Re}\ T$,$T_2=\mathrm{Im}\ T$,$T=T_1+\mathrm{i}T_2$.则 $T^*=T_1-\mathrm{i}T_2$,所以

$$T^*T=T_1^2+\mathrm{i}(T_1T_2-T_2T_1)+T_2^2,$$

$$TT^*=T_1^2+\mathrm{i}(T_2T_1-T_1T_2)+T_2^2.$$

故 $T^*T=TT^*$ 的充要条件是 $T_1T_2-T_2T_1=T_2T_1-T_1T_2$,即 $T_1T_2=T_2T_1$.证毕.

下面讨论正规算子的谱分解.

设 $T=T_1+\mathrm{i}T_2$令 $b=\|T\|$,$a=-\|T\|-1$ 则 $\sigma(T_i)\subseteq(a,b]$,$i=1,2$.由于 T_1,T_2为自伴算子,由自伴算子的谱分解定理,有

$$T_1=\int_a^b t\mathrm{d}E_t=\lim\sum_{k=1}^n\xi_k(E_{t_k}-E_{t_{k-1}}),$$

$$T_2=\int_a^b s\mathrm{d}F_s=\lim\sum_{l=1}^m\eta_l(F_{s_l}-F_{s_{l-1}}).$$

注意到 E_t与 F_s可交换,且 $\sum\limits_{k=1}^n(E_{t_k}-E_{t_{k-1}})=I$, $\sum\limits_{l=1}^m(F_{s_l}-F_{s_{l-1}})=I$,所以

$$\begin{aligned}T&=T_1+\mathrm{i}T_2\\&=\lim\sum_{k,l}[\xi_k(E_{t_k}-E_{t_{k-1}})(F_{s_l}-F_{s_{l-1}})+\mathrm{i}\eta_l(F_{s_l}-F_{s_{l-1}})(E_{t_k}-E_{t_{k-1}})]\\&=\lim\sum_{k,l}(\xi_k+\mathrm{i}\eta_l)(E_{t_k}-E_{t_{k-1}})(F_{s_l}-F_{s_{l-1}}).\end{aligned}$$

对$(a,b]\times(a,b]$内任一子矩形 $\Delta=(\alpha,\beta]\times(\gamma,\delta]$,令

$$G(\Delta)=(E_\beta-E_\alpha)(F_\delta-F_\gamma),$$

则 $T=\lim\sum\lambda_jG(\Delta_j)$,其中 $\lambda_j\in\Delta_j$.故可将 T 写成

$$\int_{(a,b]\times(a,b]}z\mathrm{d}G(z),$$

此即正规算子的谱分解.

然而,需要注意的是,我们仅仅对$(a,b]\times(a,b]$的子矩形 Δ 定义了 $G(\Delta)$,所以上述积分实际上没有定义.这尚不完善,关键是如何将 $G(\Delta)$扩充为平面上的谱测度.

6.1　乘积谱测度

设 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 Borel 可测集全体. E,F 是 $(\mathbf{R},\mathscr{B})$ 上的两个谱测度,由本章 §4, E,F 可由相应的谱系 E_λ,F_λ 给出. 记 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 为由 $A\times B, A,B\in\mathscr{B}$ 生成的 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 上的 σ-代数. 它实际上是 $\mathbf{R}^2$ 上的 Borel 可测集全体. 如果 G 是 $(\mathbf{R}^2,\mathscr{B}\times\mathscr{B})$ 上的谱测度,使对任意 $A,B\in\mathscr{B}$,有

$$G(A\times B)=E(A)F(B).$$

则称 G 为 E,F 的**乘积谱测度**.

显然,乘积谱测度如果存在,一定是唯一的. 现在的问题是:乘积谱测度是否存在? 由于 $G(A\times B)=E(A)F(B)$ 仍为投影,则必须 $E(A)$ 与 $F(B)$ 可交换. 这是乘积谱测度存在的必要条件. 那么,如果 E,F 是两个可交换的谱测度,是否存在乘积谱测度? 为讨论这个问题,记 $P=\{A\times B\mid A,B\in\mathscr{B}\}$,称 P 为 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 中的可测矩形全体.

令 $G:P\to B(H), A\times B\mapsto E(A)F(B)$,则 G 具有如下性质:

1°　若 $\Delta_1=A_1\times B_1,\Delta_2=A_2\times B_2$,且 $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$,则 $G(\Delta_1)G(\Delta_2)=0$.

事实上,由 $\Delta_1\cap\Delta_2=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)=\varnothing$ 知, $A_1\cap A_2=\varnothing$ 或 $B_1\cap B_2=\varnothing$. 不妨设 $A_1\cap A_2=\varnothing$,则 $E(A_1)E(A_2)=0$. 故

$$\begin{aligned}G(\Delta_1)G(\Delta_2)&=E(A_1)F(B_1)E(A_2)F(B_2)\\&=E(A_1)E(A_2)F(B_1)F(B_2)=0\text{(由交换性)}.\end{aligned}$$

2°　若 $\Delta_1\subseteq\Delta_2$,则 $G(\Delta_1)\leqslant G(\Delta_2)$.

因为 $\Delta_1\subseteq\Delta_2$,则 $A_1\subseteq A_2,B_1\subseteq B_2$,从而 $E(A_1)\leqslant E(A_2),F(B_1)\leqslant F(B_2)$,所以 $G(\Delta_1)G(\Delta_2)=E(A_1)E(A_2)F(B_1)F(B_2)=E(A_1)F(B_1)=G(\Delta_1)$ (由交换性). 故

$$G(\Delta_1)\leqslant G(\Delta_2).$$

3°　若 $\Delta_1\cup\Delta_2\subseteq\Delta$,且 $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$,则 $G(\Delta_1)+G(\Delta_2)\leqslant G(\Delta)$.

因为 $G(\Delta_1)\leqslant G(\Delta)$ 及 $G(\Delta_2)\leqslant G(\Delta)$,又 $G(\Delta_1)G(\Delta_2)=0$,所以 $G(\Delta_1)+G(\Delta_2)$ 仍为直交投影,且值域为 $G(\Delta_1)$ 与 $G(\Delta_2)$ 值域的直交和,从而包含在 $G(\Delta)$ 的值域中,故 $G(\Delta_1)+G(\Delta_2)\leqslant G(\Delta)$. 这一结论可以推广到任何有限和中,即若 $\{\Delta_i\}_{i=1}^n\subseteq P$,且 Δ_i 两两不交, $\bigcup\limits_{i=1}^n\Delta_i\subseteq\Delta\in P$,则有

$$G(\Delta_1)+G(\Delta_2)+\cdots+G(\Delta_n)\leqslant G(\Delta).$$

4°(有限可加性)　设 $\{\Delta_i\}_{i=1}^n\subseteq P$,且 Δ_i 两两不交,并设 $\bigcup\limits_{i=1}^n\Delta_i$ 仍属于 P,则有

$$G(\Delta_1)+G(\Delta_2)+\cdots+G(\Delta_n)=G\Big(\bigcup_{i=1}^n\Delta_i\Big).$$

该性质的证明较复杂，我们仅以 $n=2$ 为例. 设 $\Delta_1=A_1\times B_1$，$\Delta_2=A_2\times B_2$，且 $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$，$\Delta_1\cup\Delta_2=\Delta=A\times B$. 由于 $\Delta_1\cap\Delta_2=\varnothing$，不妨设 $A_1\cap A_2=\varnothing$，由 $\Delta_1\cup\Delta_2=A\times B$，得 $A=A_1\cup A_2$，$B=B_1\cup B_2$.

下面证明 $B_1=B_2$. 事实上，若 $y\in B_1$，任取 $x\in A_2$，则 $x\in A$，从而 $(x,y)\in A\times B$ 但 $x\notin A_1$ 所以 $(x,y)\notin\Delta_1$，这说明 $(x,y)\in\Delta_2$，故 $y\in B_2$，即 $B_1\subseteq B_2$. 类似可证 $B_2\subseteq B_1$，因此 $B=B_1=B_2$. 进而

$$\begin{aligned}G(\Delta)&=E(A)F(B)=(E(A_1)+E(A_2))F(B)\\&=E(A_1)F(B_1)+E(A_2)F(B_2)=G(\Delta_1)+G(\Delta_2).\end{aligned}$$

5°（次可加性） 设 $\Delta\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\Delta_i$，则从 4° 容易验证 $G(\Delta)\leqslant\sum_{i=1}^{n}G(\Delta_i)$.

记 $P_0=\{(a,b]\times(c,d]\mid a\leqslant b,c\leqslant d\}$，即 P_0 为左下开右上闭的矩阵全体，则 $P_0\subset P$.

引理 1 G 限制在 P_0 上，有可数可加性. 即若 $\{\Delta_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq P_0$，$\Delta_k$ 两两不交，且 $\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k=\Delta\in P_0$，则

$$G(\Delta)=\sum_{k=1}^{\infty}G(\Delta_k)$$

在强收敛意义下成立.

证明 对任意 n，由于 $\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k\subseteq\Delta$，所以

$$\sum_{k=1}^{n}G(\Delta_k)\leqslant G(\Delta).$$

又由本章 §3 定理 6，$\sum_{k=1}^{\infty}G(\Delta_k)$ 在强收敛意义下收敛于某一投影算子，记为 P，由 $\left\|\sum_{k=1}^{n}G(\Delta_k)x\right\|\leqslant\|G(\Delta)x\|$，有 $\|Px\|\leqslant\|G(\Delta)x\|$. 故

$$\sum_{k=1}^{\infty}G(\Delta_k)\leqslant G(\Delta).$$

下证 $G(\Delta)=\sum_{k=1}^{\infty}G(\Delta_k)$.

若 $\sum_{k=1}^{\infty}G(\Delta_k)<G(\Delta)$，则存在 x_0，$\|x_0\|=1$，使 $G(\Delta)x_0=x_0$，而对任意 k，$G(\Delta_k)x_0=0$. 设 $\Delta_k=(a_k,b_k]\times(c_k,d_k]$，$\Delta=(a,b]\times(c,d]$，则

$$E((a_k,b_k])F((c_k,d_k])x_0=0.$$

由于 E,F 所对应的谱系是右连续的，故可以取 $\widetilde{\Delta}_k=(a_k,\widetilde{b}_k]\times(c_k,\widetilde{d}_k]$，其中

$\widetilde{b}_k>b_k,\widetilde{d}_k>d_k$使

$$\|G(\widetilde{\Delta}_k)x_0\|^2<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

则 $\widetilde{\Delta}_k\supset\Delta_k$. 设 $\widetilde{\Delta}=(\widetilde{a},b]\times(\widetilde{c},d]$,其中 $\widetilde{a}>a,\widetilde{c}>c$,使

$$\|G(\widetilde{\Delta})x_0\|^2>\frac{3}{4}\quad(\text{因为 }\|G(\Delta)x_0\|=1).$$

由 $\Delta=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k$知,

$$[\widetilde{a},b]\times[\widetilde{c},d]\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k,\widetilde{b}_k)\times(c_k,\widetilde{d}_k).$$

由有限覆盖定理知存在 N,使 $\widetilde{\Delta}\subseteq\bigcup_{k=1}^{N}\widetilde{\Delta}_k$. 由次可加性,有

$$G(\widetilde{\Delta})\leqslant\sum_{k=1}^{N}G(\widetilde{\Delta}_k),$$

所以

$$(G(\widetilde{\Delta})x_0,x_0)\leqslant\sum_{k=1}^{N}(G(\widetilde{\Delta}_k)x_0,x_0).$$

但

$$(G(\widetilde{\Delta})x_0,x_0)\geqslant\frac{3}{4},\qquad\sum_{k=1}^{N}(G(\widetilde{\Delta}_k)x_0,x_0)\leqslant\frac{1}{2}.$$

这个矛盾说明 $G(\Delta)=\sum_{k=1}^{\infty}G(\Delta_k)$. 证毕.

引理 2 设 E,F 是$(\mathbf{R},\mathscr{B})$上的两个可交换的谱测度,则存在唯一的$(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathscr{B}\times\mathscr{B})$上的谱测度 G,满足

$$G((a,b]\times(c,d])=E((a,b])F((c,d]).$$

证明 对$(a,b]\times(c,d]\in P_0$,令

$$G((a,b]\times(c,d])=E((a,b])F((c,d]).$$

由引理 1,G 在 P_0上具有可数可加性. 记 $R(P_0)$为由 P_0生成的环. 利用可加性可将 G 延拓到 $R(P_0)$上. 由于 G 在 P_0上有有限可加性,易见这种自然延拓是确定的. 又因为 G 在 P_0上有可数可加性,知 G 在 $R(P_0)$上具有可数可加性.

下面证明 $R(P_0)$上定义的 G 可以(唯一地)延拓成 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 上的谱测度. 事实上,对任意 $x\in H$,$(G(\Delta)x,x)$为 $R(P_0)$上的测度,可以唯一地延拓到 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 上,记为 μ_x. 固定 $M\in\mathscr{B}\times\mathscr{B}$,可以验证 $\mu_x(M)$是 x 的实有界二次形式,即满足

$$\mu_{x+y}+\mu_{x-y}=2(\mu_x+\mu_y)$$

及

$$\mu_{\alpha x}=|\alpha|^{2}\mu_{x}$$

的有界泛函.故存在有界线性算子 T_M,使 $\mu_x(M)=(T_Mx,x)$.易证 T_M是投影算子.从 μ_x有可数可加性,可以证明映射 $M\to T_M$有强收敛意义下的可数可加性,从而 $\{T_M\}_{M\in\mathscr{B}\times\mathscr{B}}$是谱测度,且是 G 的延拓.证毕.

定理 2　设 E,F 是$(\mathbf{R},\mathscr{B})$上的两个可交换的谱测度,则存在$(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathscr{B}\times\mathscr{B})$上的 E,F 的乘积谱测度.

证明　取 $G(M)$为引理 2 中的 T_M,往证对 $A,B\in\mathscr{B}$ 有

$$G(A\times B)=E(A)F(B).$$

注意到 $\mathbf{R}$ 上左开右闭区间全体张成的 σ-环是 $\mathscr{B}$.固定 A_0为一个左开右闭区间,由引理 2,对任何左开右闭区间 B,有

$$G(A_0\times B)=E(A_0)F(B).$$

记

$$\mathscr{B}_1=\{B\in\mathscr{B}\mid G(A_0\times B)=E(A_0)F(B)\}.$$

由于 $G(A_0\times B)$及 $E(A_0)F(B)$都具有可数可加性,故 $\mathscr{B}_1$是包含左开右闭区间张成的环的单调类,从而 $\mathscr{B}_1=\mathscr{B}$.进一步,固定 $B_0\in\mathscr{B}$,则由上面的讨论知对任一左开右闭区间 A 有

$$G(A\times B_0)=E(A)F(B_0).$$

用类似的方法知

$$\mathscr{B}=\{A\in\mathscr{B}\mid G(A\times B_0)=E(A)F(B_0)\},$$

故对任意 $A,B\in\mathscr{B}$,有

$$G(A\times B)=E(A)F(B),$$

即 G 是 E,F 的乘积谱测度.证毕.

6.2　正规算子的谱分解定理

对于$(\mathbf{R}\times\mathbf{R},\mathscr{B}\times\mathscr{B})$上的谱测度 G,由 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 的对应关系,可作$(\mathbf{C},\mathscr{B})$上的谱测度,记为 $\widetilde{G}$.

定义 1　设 H 是 Hilbert 空间,$T\in B(H)$是正规算子,E,F 分别是 $\mathrm{Re}\,T,\mathrm{Im}\,T$ 的谱测度,G 是 E,F 的乘积谱测度,由 G 而得的$(\mathbf{C},\mathscr{B})$上的谱测度 $\widetilde{G}$ 称为 T 的**谱测度**.

定理 3　设 H 是 Hilbert 空间,$T\in B(H)$是正规算子,$\widetilde{G}$ 为 T 的谱测度,则在算子范数收敛意义下,有

$$T=\int_{\mathbf{C}}z\mathrm{d}\widetilde{G}(z).$$

证明　由本节开头的做法,对任给的 $\varepsilon>0$,存在$[-\|T\|-1,\|T\|]\times$

$[-\|T\|-1,\|T\|]$的一分割$\{\Delta_k\}_{k=1}^n$,使 $\eta=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta_k$的直径$\}<\varepsilon$,且

$$\left\|T-\sum_{k=1}^n\lambda_k\widetilde{G}(\Delta_k)\right\|<\varepsilon,$$

其中 $\lambda_k\in\Delta_k$.又由于

$$\begin{aligned}&\left\|\int z\mathrm{d}\widetilde{G}(z)-\sum_{k=1}^n\lambda_k\widetilde{G}(\Delta_k)\right\|\\=&\left\|\int z\mathrm{d}\widetilde{G}(z)-\int\sum_{k=1}^n\lambda_k\chi_{\Delta_k}(z)\mathrm{d}\widetilde{G}(z)\right\|\\=&\left\|\int\left(z-\sum_{k=1}^n\lambda_k\chi_{\Delta_k}(z)\right)\mathrm{d}\widetilde{G}(z)\right\|\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

故有

$$\left\|\int z\mathrm{d}\widetilde{G}(z)-T\right\|\leqslant 2\varepsilon.$$

由 ε 的任意性知,$T=\int z\mathrm{d}\widetilde{G}(z)$.证毕.

正规算子的谱与谱测度之间有如下的关系.

定理 4 设 Hilbert 空间 H 上的 T 是正规算子,$\widetilde{G}$ 是 T 的谱测度,$\lambda_0\in\mathbf{C}$,则

(i) $\lambda_0\in\rho(T)$的充要条件是存在 $\varepsilon>0$,使 $\widetilde{G}(O(\lambda_0,\varepsilon))=0$;

(ii) λ_0是 T 的特征值的充要条件是 $\widetilde{G}(\{\lambda_0\})\neq 0$,此时 $\widetilde{G}(\{\lambda_0\})H$ 就是 T 的相应于 λ_0的特征子空间.

证明 先证(i).若对任意 $\varepsilon>0$,$\widetilde{G}(O(\lambda_0,\varepsilon))\neq 0$,则存在 x_0,使 $\|x_0\|=1$且 $\widetilde{G}(O(\lambda_0,\varepsilon))x_0=x_0$.所以

$$\begin{aligned}&\|(T-\lambda_0 I)x_0\|^2\\=&\left\|\int(z-\lambda_0)\mathrm{d}\widetilde{G}(z)x_0\right\|^2=\int|z-z_0|^2\mathrm{d}(\widetilde{G}(z)x_0,x_0)\\=&\int_{O(\lambda_0,\varepsilon)}|z-z_0|^2\mathrm{d}(\widetilde{G}(z)x_0,x_0)\leqslant\varepsilon^2\|x_0\|^2=\varepsilon^2.\end{aligned}$$

由此,若取 $\varepsilon_n=\dfrac{1}{n}$,则存在 x_n,$\|x_n\|=1$ 使

$$\|(T-\lambda_0 I)x_n\|\leqslant\frac{1}{n}\to 0.$$

从而 $\lambda_0\notin\rho(T)$.必要性得证.

下证充分性.若存在 $\varepsilon>0$,使 $\widetilde{G}(O(\lambda_0,\varepsilon))=0$.则

$$\lambda_0 I-T=\int_{\mathbf{C}-O(\lambda_0,\varepsilon)}(\lambda_0-z)\mathrm{d}\widetilde{G}(z).$$

因为$(\lambda_0-z)^{-1}$在$\mathbf{C}-O(\lambda_0,\varepsilon)$上是有界连续函数,所以$S=\int_{\mathbf{C}-O(\lambda_0,\varepsilon)}(\lambda_0-z)^{-1}\mathrm{d}\widetilde{G}(z)$是有界线性算子.然而$(\lambda_0 I-T)S=S(\lambda_0 I-T)=\int \mathrm{d}\widetilde{G}(z)=I$.所以$\lambda_0\in\rho(T)$.

再证(ii).对任意$\lambda_0\in\mathbf{C}$及$x_0\in H$,有

$$\|(T-\lambda_0 I)x_0\|^2=\int|z-\lambda_0|^2\mathrm{d}(\widetilde{G}(z)x_0,x_0).$$

所以$(T-\lambda_0 I)x_0=0$的充要条件是$(\widetilde{G}(\{\lambda_0\})x_0,x_0)=(x_0,x_0)$,即$\widetilde{G}(\{\lambda_0\})x_0=x_0$.故$\lambda_0$为$T$的特征值之充要条件是存在$x_0\neq 0$使$\widetilde{G}(\{\lambda_0\})x_0=x_0$,即

$$\widetilde{G}(\{\lambda_0\})\neq 0.$$

于是,

$$\{x_0\mid Tx_0=\lambda x_0\}=\{x_0\mid \widetilde{G}(\{\lambda_0\})x_0=x_0\}=\widetilde{G}(\{\lambda_0\})H,$$

即T的相应于λ_0的特征子空间是$\widetilde{G}(\{\lambda_0\})H$.证毕.

定理 5 设H是 Hilbert 空间,$T\in B(H)$是正规算子,$\widetilde{G}$是T的谱测度,则$\widetilde{G}$集中在$\sigma(T)$上.具体地说:

(i) $\widetilde{G}(\sigma(T))=I$;

(ii) 对$\sigma(T)$的任何真闭子集F,$\widetilde{G}(F)\neq I$.

证明 (i)由定理4,$\lambda_0\in\rho(T)$的充要条件是存在$\varepsilon>0$,使$\widetilde{G}(O(\lambda_0,\varepsilon))=0$.由于开集$\rho(T)$可以写成所有这种$O(\lambda_0,\varepsilon)$之并,从中可以选出可数多个,其并为$\rho(T)$,所以$\widetilde{G}(\rho(T))=0$,即$\widetilde{G}(\sigma(T))=I$.

为证(ii),反设存在$\sigma(T)$的真闭子集F,使$\widetilde{G}(F)=I$,设$\lambda_0\in\sigma(T)$,但$\lambda_0\notin F$,由此存在$\varepsilon>0$,使

$$O(\lambda_0,\varepsilon)\cap F=\varnothing.$$

因为$\widetilde{G}(F)=I$,所以$\widetilde{G}(O(\lambda_0,\varepsilon))=0$.这导致$\lambda_0\in\rho(T)$,与假设矛盾.证毕.

推论 设T是 Hilbert 空间H上的正规算子,则

(i) 如果$\sigma(T)\subseteq\mathbf{R}$,则$T$是自伴算子;

(ii) 如果$\sigma(T)\subseteq$单位圆周,则T是酉算子;

(iii) 如果$\sigma(T)\subseteq\{\lambda\in\mathbf{R}\mid\lambda\geqslant 0\}$,则$T$是正算子.

应该注意的是,如果去掉“正规”条件,推论的结论可能不成立.

定理 6(谱测度的唯一性) 若G_1是$(\mathbf{C},\mathscr{B})$上的谱测度,且$T=\int_{\mathbf{C}}z\mathrm{d}G_1(z)$

是有界算子,则 T 是正规算子且 $G_1(A)=\widetilde{G}(A),A\in\mathscr{B}$,其中 $\widetilde{G}$ 是按前述方法作出的 T 之谱测度.

证明　易知 T 是正规算子且 G_1集中在 $\sigma(T)$上.又 $\operatorname{Re} T=\int(\operatorname{Re} z)\mathrm{d}G_1(z)$,令 E,F 分别为 $\operatorname{Re} T$ 与 $\operatorname{Im} T$ 的谱测度,相应的谱系为 E_t,F_t.令

$$E_t'=G_1((-\infty,t]\times(-\infty,+\infty)).$$

容易证明 E_t'是谱系,且 $\operatorname{Re} T=\int t\mathrm{d}E_t'$.由自伴算子的谱系的唯一性,知 $E_t'=E_t$.

类似可作

$$F_t'=G_1((-\infty,+\infty)\times(-\infty,t]),$$

并可证明 $F_t'=F_t$.

由上述做法知 G_1是 E',F'的乘积谱测度,$\widetilde{G}$ 是 E,F 的乘积谱测度,故 $G_1=G$.证毕.

* §7　函数空间上的算子

函数空间中的算子分两大类,一类是微分与积分算子,其研究的侧重点是算子对应的方程解的存在性、唯一性、稳定性等,这些方程大多与某个特定的物理现象有关,常常需要针对不同的方程采取不同的方法与技巧.另一类是具有比较好的结构的函数空间上的算子,由于空间结构比较清楚,这些空间上算子的结构也就相对清楚一点,特别是将空间的度量与解析函数相结合可以得到各种不同结构的解析函数空间,这使得人们可以将丰富的解析函数论工具运用到算子的研究,从而可以得到关于算子的更精细的结论.人们常研究的是三类算子:Toeplitz 算子、Hankel 算子及复合算子.

7.1　Toeplitz 算子

Toeplitz 算子的原型是 Toeplitz 矩阵,即如下形式的特殊矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix},a_i\in\mathbf{C}(\text{或 }\mathbf{R}),i=0,\pm1,\cdots,\pm n.$$

这类矩阵来自控制论中的系统传输矩阵,迄今仍是计算学界研究的对象.在无限维可分 Hilbert 空间中,有一个 Toeplitz 矩阵的推广,即下面的无限矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & \cdots \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \cdots \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{-n} & a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \cdots & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}, a_i\in \mathbf{C}(\text{或 } \mathbf{R}).$$

这类矩阵的特点是对角线及所有次对角线上的元素均为常值.

有限维 Toeplitz 矩阵的一个重要问题是特征值的计算,它对应的是系统极点的分布.对无限维的 Toeplitz 算子而言,其核心问题也是谱问题与结构问题,然而这些问题异常复杂,作为一般算子的特例,许多一般算子的问题在 Toeplitz 算子(矩阵)情形都可以提出相对应的问题,这些问题常常是非平凡的甚至是十分困难的.例如,我们也可以对 Toeplitz 算子提出不变子空间问题,遗憾的是,这个问题至今仍然悬而未决.

在 20 世纪 60 年代,布朗(Brown)与哈尔莫斯(Halmos)将 Toeplitz 矩阵与函数论联系起来之前,有关 Toeplitz 矩阵的研究进展甚微,其根本原因在于人们没有一个行之有效的工具. Brown 与 Halmos 将 Toeplitz 矩阵的表值与函数的 Fourier 系数巧妙地联系起来,从而将 Toeplitz 矩阵与函数空间上的算子相对应,使得人们可以借助强大的函数论工具来研究这类矩阵,这就是 Toeplitz 算子的由来.虽然 Toeplitz 算子源于控制论,但随着这一理论的发展与深入,人们在泛函分析与经典的函数论之间架设了一座桥梁,这类算子在数学上的意义已经远远超越了它的实际应用价值,它不仅为泛函分析提供了丰富多彩的例子库,也为一些经典函数论的研究带来了新的思路与新的视角.

定义 1 假设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$,$P$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交投影,定义 $H^2(\mathbb{T})$ 上的算子 T_φ 为

$$T_\varphi f=P(\varphi f),\ f\in H^2(\mathbb{T}),$$

T_φ 称为**具有符号 φ 的 Toeplitz 算子**,φ 称为 T_φ 的**符号**.

从定义 1 似乎看不出 Toeplitz 算子与 Toeplitz 矩阵之间有什么内在关系,但只要考察一下这个算子在 $H^2(\mathbb{T})$ 中标准正交基 $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{\infty}$ 下的表示就清楚了.

定义 2 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子,$\{e_n\}_{n\in\Lambda}$ 是 H 的正交基,则 T **在正交基** $\{e_n\}_{n\in\Lambda}$ **下的矩阵**指的是如下矩阵

$$T=\{(Te_n,e_m)\}_{n,m\in\Lambda},$$

其中 (Te_n,e_m) 表示位于 (m,n) 处的表值.

定理 1 假设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$ 的 Fourier 级数为

$$\varphi\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n e^{in\theta},$$

则以 φ 为符号的 Toeplitz 算子 T_φ 在 $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{\infty}$ 下的矩阵表示为

$$T_\varphi=\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

定理 1 的证明不是件难事,直接计算就行了.

Toeplitz 矩阵是否必为 Toeplitz 算子呢? 答案是肯定的,但由于其证明比较复杂,故略去详细讨论.

定理 2　如果 $H^2(\mathbb{T})$ 上的有界线性算子在标准正交基 $\{e^{in\theta}\}_{n=0}^{\infty}$ 下的矩阵是 Toeplitz 矩阵,则它一定是 Toeplitz 算子.

Toeplitz 算子作为一个重要的算子类已经形成一套丰富的理论,并且该理论又被推广到 Bergman 空间、高维复空间中的各种区域上的函数空间中,其中待解决的问题很多.

7.2　Hankel 算子

与 Toeplitz 算子密切相关的另一类算子是 Hankel 算子. 从 Toeplitz 算子的定义可以看出,有两个概念至关重要,一个是从 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交投影 P,另一个是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 中的函数 φ,如果暂不考虑投影 P,仅用 φ 与 $H^2(\mathbb{T})$ 中的函数相乘,得到的是 $L^2(\mathbb{T})$ 中的元素,即对任意 $f\in H^2(\mathbb{T})$, $\varphi f\in L^2(\mathbb{T})$. 正如平面内的向量可以分解成两个坐标轴方向的分量一样, Toeplitz 算子作用到 f 等于 φf 在 $H^2(\mathbb{T})$"方向"的分量,另一个方向是什么呢? 当然是 $H^2(\mathbb{T})$ 在 $L^2(\mathbb{T})$ 的正交补,因此 φf 的另一个分量在 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交补中. 这个正交补到底是个什么样的空间? 我们只要从 $L^2(\mathbb{T})$ 中函数的 Fourier 展开式看看就清楚了.

假设 $f\in L^2(\mathbb{T})$ 有 Fourier 展开式

$$f=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\theta},$$

右端的级数按 $L^2(\mathbb{T})$ 中的范数收敛,即

$$\left\| f-\sum_{n=-k}^{l} a_n e^{in\theta}\right\|_2 \to 0\,(k,l\to\infty).$$

显然 f 在 $H^2(\mathbb{T})$ 中的"分量"为

$$Pf=\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta},$$

不难看出, f 在 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交补中的"分量"为

$$f-Pf=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n e^{in\theta}.$$

如果记 I 为 $L^2(\mathbb{T})$ 上的恒等算子，则 $I-P$ 即为 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交补的投影，且

$$(I-P)f=\sum_{n=-\infty}^{-1}a_n e^{in\theta}.$$

由此可以定义 $H^2(\mathbb{T})$ 到 $H^2(\mathbb{T})$ 在 $L^2(\mathbb{T})$ 中正交补的算子.

定义 3 设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$，$P$ 是 $L^2(\mathbb{T})$ 到 $H^2(\mathbb{T})$ 的正交投影，算子

$$H_\varphi f=(I-P)(\varphi f),f\in H^2(\mathbb{T})$$

称为**具有符号 φ 的 Hankel 算子**，φ 称为 H_φ 的**符号**.

由 Toeplitz 算子的定义很容易验证 $T_\varphi=0$ 当且仅当 $\varphi=0$，然而非零的符号却可能诱导一个零 Hankel 算子，例如若 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})=\{f\in L^\infty(\mathbb{T})\mid f$ 有 Fourier 展开式 $f\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{in\theta}\}$，则 $H_\varphi=0$. 由此可得

定理 3 设 $\varphi,\psi\in L^\infty(\mathbb{T})$，则 $H_\varphi=H_\psi$ 当且仅当 $\varphi-\psi\in H^\infty(\mathbb{T})$.

与 Toeplitz 算子不同的是，在 Hardy 空间上，存在很多紧 Hankel 算子甚至有限秩 Hankel 算子，例如，若 $p(z)=\sum_{n=0}^{k}a_n z^n$ 是多项式，$\widetilde{p}(z)=\sum_{n=0}^{k}a_n\bar{z}^n$，则 $H_{\widetilde{p}}$ 是有限秩算子(能否算出 $H_{\widetilde{p}}$ 的秩是多少?). 正由于此，Hankel 算子的一个重要问题是：对什么样的符号 φ，H_φ 是有限秩算子或紧算子? 著名的 Kronecker 定理告诉我们

定理 4 设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{T})$，则 H_φ 是有限秩算子当且仅当 φ 是 $\bar{z}$ 的多项式与 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中函数之和.

紧 Hankel 算子也有特征刻画，这就是著名的 Hartman 定理.

定理 5 Hankel 算子 H_φ 是紧算子当且仅当存在 $\varphi_1\in H^\infty(\mathbb{T})$，$\varphi_2\in C(\mathbb{T})$，使得 $\varphi=\varphi_1+\varphi_2$，其中 $C(\mathbb{T})$ 指 $\mathbb{T}$ 上的连续函数全体.

记

$$H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})=\{\varphi_1+\varphi_2\mid\varphi_1\in H^\infty(\mathbb{T}),\varphi_2\in C(\mathbb{T})\},$$

这是个很有趣的函数空间，我们知道，两个 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中的函数乘积还在 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中，两个 $C(\mathbb{T})$ 中的函数乘积也在 $C(\mathbb{T})$ 中，直觉上两个 $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 中的函数乘积似乎不在 $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 中，因为乘积中会出现 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中函数与 $C(\mathbb{T})$ 中函数的乘积，看起来 $H^\infty(\mathbb{T})$ 中的函数与 $C(\mathbb{T})$ 中的函数相乘未必在 $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 中，神奇的是，$H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 中两个函数的乘积仍然在 $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 中，不仅如此，$H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 还是 $L^\infty(\mathbb{T})$ 的闭子空间，换句话说，$H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 是一个代数. 证明 $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$ 是一个代数其实不难，只要注意到

$C(\mathbb{T})$中的函数可以用多项式逼近,而对于多项式 $p(z)=\sum_{n=0}^{k} a_n z^n+\sum_{l=1}^{m} b_l \bar{z}^l$ 及 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned}\varphi+p(z)&=\left(\varphi+\sum_{n=0}^{k}a_nz^n\right)+\sum_{l=1}^{m}b_l\bar{z}^l\\&=\left[\left(\varphi+\sum_{n=0}^{k}a_nz^n\right)z^m+\sum_{l=1}^{m}b_lz^{m-l}\right]\bar{z}^m\\&=\widetilde{\varphi}(z)\cdot\bar{z}^m,\end{aligned}$$

其中$\widetilde{\varphi}(z)=\left(\varphi+\sum_{n=0}^{k}a_nz^n\right)z^m+\sum_{l=1}^{m}b_lz^{m-l}\in H^\infty(\mathbb{T})$,这说明$\varphi+p(z)$可以表示成 $H^\infty(\mathbb{T})$中函数与$\bar{z}^m$的乘积,反之,$H^\infty(\mathbb{T})$中函数与$\bar{z}^m$的乘积,也可以写成 $H^\infty(\mathbb{T})$中函数与多项式的和,由此可见

$$H^\infty(\mathbb{T})+P[\mathbb{T}]=\{\varphi+p\mid\varphi\in H^\infty(\mathbb{T}),p\text{ 是多项式}\}$$

是代数,通过极限过程可以证明 $H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$是代数.

值得指出的是,$H^\infty(\mathbb{T})+C(\mathbb{T})$是代数这一结论在复空间 $\mathbf{C}^n$ 中单位球面情形仍然成立,然而其证明却十分复杂,它最早为 W.Rudin 所证明,可见单变量到多变量并非简单的推广.

Hankel 算子的定义有几种,另一种常见的定义是

定义 4 设 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})$,$J$ 是 $L^2(\mathbb{T})$到自身的算子:

$$Jf(z)=f(\bar{z}),$$

算子

$$\widetilde{H}_\varphi f=PJ(\varphi f),f\in H^2(\mathbb{T})$$

称为 $H^2(\mathbb{T})$上的 **Hankel 算子**,φ 称为$\widetilde{H}_\varphi$的**符号**.

与H_φ不同的是,$\widetilde{H}_\varphi$是 H^2 到自身的算子,$\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})$也不意味着$\widetilde{H}_\varphi=0$,事实上,若 φ 是常数,则$\widetilde{H}_\varphi\neq0$,然而,如果 $\varphi\in H^\infty(\mathbb{T})$的 Fourier 展开式中不含常数项,则可以证明$\widetilde{H}_\varphi=0$,因此有下面的

定理 6 设 $\varphi,\psi\in L^\infty(\mathbb{T})$,则$\widetilde{H}_\varphi=\widetilde{H}_\psi$当且仅当 $\varphi-\psi\in zH^\infty(\mathbb{T})$.

定理 6 是说,$\widetilde{H}_\varphi$与$\widetilde{H}_\psi$相等当且仅当 φ 与 ψ 相差一个不含常数项的 H^∞ 中的函数.

把定理 4、定理 5 中的H_φ换成$\widetilde{H}_\varphi$,结论仍然成立.

Toeplitz 算子与 Hankel 算子之间有着内在的关系,事实上,由它们的定义不

难验证

$$T_{\varphi}T_{\psi}-T_{\varphi\psi}=-H_{\bar{\varphi}}^{*}H_{\psi}.$$

7.3 复合算子

函数的复合是一种基本运算,其直观解释是一个区域经过了某种变换后,区域上的函数会发生怎样的变化,从算子的角度研究复合运算开始于上个世纪 60 年代,人们的兴趣主要是关于复合算子的代数性质、谱性质等.我们既可以考察 L^2(或 L^p)空间上的复合算子,也可以考察 H^2(或 H^p)空间上的复合算子,所不同的是,由于 H^2空间中的函数有着丰富的结构,有关的理论工具很强大,因此解析函数空间上算子的结构更为精细,可以运用的手段更多.

定义 5 设 φ 是复平面内开单位圆盘 D 到自身的解析映射,对任意 $f\in H^2(D)$,定义算子 C_{φ}为

$$C_{\varphi}f(z)=f(\varphi(z)).$$

称 C_{φ}为 $H^2(D)$上的**复合算子**,φ 称为 C_{φ}的**符号**.

细心的读者或许会发现,这里涉及的 Hardy 空间与 Toeplitz 算子的定义中所涉及的 Hardy 空间不同,我们知道,$H^2(\mathbb{T})$与 $H^2(D)$是等距同构的,φ 作为 D 到 D 的解析映射,其径向极限自然是存在的,即

$$\varphi^{*}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})=\lim_{r\to1^{-}}\varphi(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$$

几乎处处存在,那么,可不可以利用 φ^{*} 定义 $H^2(\mathbb{T})$到 $H^2(\mathbb{T})$的复合算子? 如此定义的复合算子与定义 5 本质上是否相同? 换句话说$(C_{\varphi}f)^{*}$与 $f^{*}\circ\varphi^{*}$ 是否相等? 其中 $f\in H^2(D)$, $f^{*}\in H^2(\mathbb{T})$是 f 的径向极限.幸运的是,在复平面内的单位圆盘上,上述两种定义是等价的,即

$$(C_{\varphi}f)^{*}=(f\circ\varphi)^{*}=f^{*}\circ\varphi^{*}.$$

有意思的是,在高维复空间 $\mathbf{C}^n$的单位球 $B_n=\{z\in\mathbf{C}^n \mid |z|<1\}$中,类似的结论不再成立,事实上高维复空间中的复合算子比复平面内的复合算子要复杂很多,其中有许多本质不同的现象.

一个显而易见的事实是,两个复合算子的乘积仍是复合算子,事实上由

$$\begin{aligned}(C_{\varphi}C_{\psi}f)(z)&=(C_{\varphi}(f\circ\psi))(z)=(f\circ\psi\circ\varphi)(z)\\&=(C_{\psi\circ\varphi}f)(z)\end{aligned}$$

立知

$$C_{\varphi}C_{\psi}=C_{\psi\circ\varphi}.$$

复合算子范数的计算以及代数性质是比较复杂的问题,人们没有一个行之有效的方法来计算复合算子的范数,只能给出一个粗略的估计.

定理 7 设 φ 是 D 到自身的解析映射,则 C_{φ}是 $H^2(D)$上的有界算子,且

$$\| C_\varphi \| \leqslant \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

由于 $C_\varphi 1 \equiv 1$,可见 $\| C_\varphi \| \geqslant 1$,因此,若 $\varphi(0)=0$,则有 $\| C_\varphi \| = 1$.

对 $z \in D$,令 $K_z(w)=\dfrac{1}{1-\bar{z}w}$,这个函数在 $H^2(D)$ 中充当了十分重要的角色,如第一章 §6 所说,它通常称之为 $H^2(D)$ 的**再生核函数**,该名称缘于此函数具有如下性质:

$$(f,K_z)=f(z),\ f\in H^2(D),$$

这里 (f,K_z) 指的是 f 与 K_z 的内积,即

$$(f,K_z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f^*(e^{i\theta})\cdot \overline{K_z(e^{i\theta})}\,d\theta$$

(能否看出这个等式像什么? 是否似曾相识?).复合算子的共轭作用在再生核上还是个再生核,即有下面的

定理 8　设 φ 是 D 到自身的解析映射,则对任意 $z \in D$,有

$$C_\varphi^* K_z = K_{\varphi(z)},$$

其中 C_φ^* 是 C_φ 的共轭算子.

对复合算子的范数还有一个双边估计,即

定理 9　设 φ 是 D 到自身的解析映射,则

$$\frac{1}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}} \leqslant \| C_\varphi \| \leqslant \frac{2}{\sqrt{1-|\varphi(0)|^2}}.$$

前面的定理 7 告诉我们,若 $\varphi(0)=0$,则 $\| C_\varphi \| = 1$,上述定理则说明,若 $\| C_\varphi \| = 1$,则必有 $\varphi(0)=0$,换言之,$\| C_\varphi \| = 1$ 当且仅当 $\varphi(0)=0$.

善于思考的读者可能会发现这样的问题,除了复合算子的共轭能把再生核变成再生核,还有没有其他的算子能做到这一点? 下面的定理完满回答了这个问题.

定理 10　$H^2(D)$ 上的算子 A 是复合算子当且仅当 A^* 将再生核映为再生核.

与 Toeplitz 算子不同的是,Hardy 空间上存在很多的紧复合算子,事实上,只要 φ 将 D 映到 D 的某个紧子集,则 C_φ 就是个紧算子(读者试着证明).有关紧复合算子的更一般结论可以参考专门的著作(如 J. H. Shapiro[12]),既然存在紧复合算子,能否计算出紧复合算子的谱呢? 有一个很有意思的结论,即

定理 11　设 φ 是 D 到自身的解析映射,C_φ 是 H^2 上的紧算子,则存在 $a \in D$,使得 $\varphi(a)=a$,且

$$\sigma(C_\varphi)=\{0\}\cup\{1\}\cup\bigcup_{k=1}^{\infty}\{(\varphi'(a))^k\}.$$

Toeplitz 算子、Hankel 算子及复合算子作为三个函数空间上的重要算子类各

自形成了一套丰富的理论,而且迄今为止,这三类算子仍是人们广泛研究的课题,这里作点粗浅的介绍供有兴趣者参考.

习 题 三

1. 设 M,N 是 Hilbert 空间 H 的两个闭子空间,且 $M\subseteq N$,证明:$N^{\perp}\subseteq M^{\perp}$.

2. 设$\{M_i\mid i\in I\}$是 H 的闭子空间族,证明:$\cap\{M_i^{\perp}\mid i\in I\}=[\vee\{M_i\mid i\in I\}]^{\perp}$,$[\cap\{M_i\mid i\in I\}]^{\perp}=\vee\{M_i^{\perp}\mid i\in I\}$.

3. 设 M,N 是 Hilbert 空间的子空间,$M\perp N$,$L=M+N$,证明:L 是闭子空间的充要条件是 M 与 N 都是闭子空间.

4. 设 f 是 Hilbert 空间 H 的闭子空间 M 上的有界线性泛函,则 f 在 H 上有唯一的延拓 F,使 $\|F\|=\|f\|_M$.

5. 设 A 是 l^2 上的有界线性算子,当 $x=\{x_\mu\}\in l^2$时,记 $A_x=\{y_\nu\}$,

$$y_\mu=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}x_\nu,\quad \mu=1,2,\cdots.$$

设 $A^*x=\{y_\nu^*\}$,$y_\mu^*=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}a_{\mu\nu}^*x_\nu$,$\mu=1,2,\cdots$,证明:$a_{\mu\nu}^*=\overline{a_{\nu\mu}}$.

6. 假设 S 是单侧位移算子,计算 SS^* 与 S^*S,进一步计算 S^nS^{*n}与 $S^{*n}S^n$.

7. 若 A 与 B 是自伴算子,证明 AB 是自伴算子的充要条件是 $AB=BA$.

8. 设 H 是复内积空间,$T\in B(H)$,若对任意 $x\in H$,$(Tx,x)=0$,证明 $T=0$.在实内积空间中,该结论是否正确?

9. 设 A 与 B 是 Hilbert 空间 H 到 H 的线性映射,且对任意 $x,y\in H$,有$(Ax,y)=(x,By)$,证明:$A\in B(H)$且 $B=A^*$.

10. 设 H 为 Hilbert 空间,$T\in B(H)$,若对一切 $x\in H$,有 $\mathrm{Re}(Tx,x)=0$,证明 $T=T^*$.

11. 设 P 是 Hilbert 空间 H 到闭子空间 M 上的投影算子,证明:$Px=x$ 的充要条件是$x\in M$;$Px=0$ 的充要条件是 $x\perp M$.

12. 设 P 是非零的投影算子,证明:$\|P\|=1$.

13. 对 $P\in B(H)$,若 $P^2=P$,称 P 为**幂等算子**.假设 P 为幂等算子,证明下列命题等价:

(i) P 是投影算子;

(ii) $\|P\|=1$;

(iii) P 是正规算子.

14. 设$\{e_k\}$$(k=1,2,\cdots)$是 Hilbert 空间 H 中的直交系,M 是由$\{e_k\}$张成的线性子空间,证明:$\overline{M}$ 上的投影算子 P 可表为

$$Px=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k\ (x\in H).$$

15. 设 P_1,P_2为可交换的投影算子,则 $P=P_1+P_2-P_1P_2$也是投影算子,且 $P\geqslant P_1$,$P\geqslant P_2$.

当任一投影算子 Q 满足 $Q\geqslant P_1$，$Q\geqslant P_2$时，则必满足 $Q\geqslant P$.

16. 设$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$是投影算子列，P 是投影算子，证明：$P_n\xrightarrow{弱}P$ 的充要条件是 $P_n\xrightarrow{强}P$.

17. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$是幂级数，收敛半径为 R，$0<R\leqslant\infty$.若 $A\in B(H)$且 $\|A\|<R$，证明：存在 $\in B(H)$，使得对任意的 $x,y\in H$，

$$(Tx,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(A^n x,y)$$

（若$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$，则算子 T 通常记为$f(A)$）.

18. 设 A 与 T 如 17 题，证明：$\left\|T-\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k A^k\right\|\to0(n\to\infty)$.若 $BA=AB$，证明：$BT=TB$.

19. 若 A 是自伴算子，证明 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A}$是酉算子.

20. 设 φ 是内积空间上的双线性泛函，如果

$$\sup_{\|x\|=1}|\varphi(x,x)|<\infty,$$

则 φ 是否有界？

21. 若 T 是紧自伴算子，证明：存在一实数列$\{\mu_n\}$和 $N(T)^{\perp}$的一正规直交基$\{e_n\}$，使得对任意 h，有

$$Th=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(h,e_n)e_n.$$

22. 设 T 是紧自伴算子，$\{e_n\}$和$\{\mu_n\}$如 21 题，h 是 H 中的给定向量，证明：存在一向量$f\in H$ 使 $Tf=h$ 的充要条件是 $h\perp N(T)$且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n^{-1}|(h,e_n)|^2<\infty$.

23. 设 $T\in B(H)$，证明：T 是等距算子的充要条件是 $\|Tx\|=\|x\|$.

24. 若 H 是有限维的，证明：H 上的每一个等距算子都是酉算子.

25. 设$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{R}}$是 H 中的谱系，对每个实数 t，作 H 中的算子

$$U(t)=\int\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\lambda}\,\mathrm{d}E_\lambda.$$

证明：$U(t)$是 H 中的酉算子，且$\{U(t),-\infty<t<+\infty\}$是 H 中的单参数群，即 $U(t_1+t_2)=U(t_1)U(t_2)$，$-\infty<t_1<t_2<+\infty$.

26. 设 T 是正规算子，证明：T 是单射的充要条件是 T 的值域在 H 中稠密.

27. 设 μ 是 $D=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|<1\}$上的面积测度，定义 $A:L^2(\mu)\to L^2(\mu)$为

$$(Af)(z)=zf(z),\ |z|<1,f\in L^2(\mu).$$

找出 A 的一个非平凡的约化子空间和一个非约化的不变子空间.

28. 证明本章 § 4 例 3.

29. 证明本章 § 4 例 4.

30. 设 $T\in B(H)$，证明 T 是正规算子的充要条件是存在酉算子 U 和正算子 P，使 $T=UP$ 及 $UP=PU$.

31. 设 $T\in B(H)$是正规算子，$T=T_1+\mathrm{i}T_2$，T_1与 T_2为 T 的实部与虚部，证明：

（i） $\|T\|^2=\|T^*T\|=\|T_1^2+T_2^2\|$；

（ii） 当 n 是正整数时，$\|T^n\|=\|T\|^n$；

（iii） 当 $\lambda\in\rho(T)$时，$\|(\lambda I-T)^{-1}\|=\dfrac{1}{\min\limits_{z\in\sigma(T)}|\lambda-z|}$.