第 3 章

多自由度系统的振动

需要 1 个以上的广义坐标描述其运动的振动系统称为多自由度振动系统，1 个 N 自由度振动系统需要 N 个独立的坐标描述其运动，其振动需要 N 个二阶常微分方程构成的微分方程组来描述。两自由度系统是最简单的多自由度系统，需要 2 个独立的广义坐标描述其运动，其振动需要 2 个二阶常微分方程描述。

系统的自由度从 1 到 2，会带来很多新的概念，系统也会具有一些新的性质；系统的自由度从 2 到 $N(N>2)$，虽然系统的自由度数量增加，但分析方法基本是相同的。对于多自由度系统的分析一般可以通过对两自由度振动系统的分析进行说明。

3.1 引　　言

以两自由度系统的振动为例，通过牛顿第二运动定律建立系统的振动微分方程。考虑图 3-1 所示的两自由度振动系统的一般情形，系统的质量分别为 m_1 和 m_2，分别用广义坐标 x_1 和 x_2 描述系统的质量 m_1 和 m_2 的运动，质量 m_1 和 m_2 所受到的激励力分别为 F_1 和 F_2。在图示的广义坐标下，质量 m_1 和 m_2 的受力情况如图 3-2 所示。对质量 m_1 和 m_2 分别应用牛顿第二运动定律，有

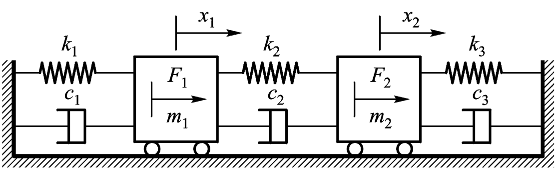


图 3-1　典型的两自由度系统

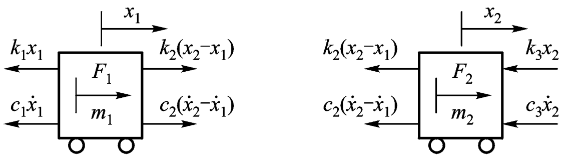


图3-2　两自由度系统的受力分析

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = k_2(x_2-x_1) - k_1x_1 + c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - c_1\dot{x}_1 + F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2-x_1) - k_3x_2 - c_2(\dot{x}_2-\dot{x}_1) - c_3\dot{x}_2 + F_2 \end{cases}$$

整理上式得到

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (c_1+c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = F_1 \\ m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + (c_2+c_3)\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2+k_3)x_2 = F_2 \end{cases} \tag{3-1}$$

上式就是两自由度振动系统的振动微分方程。如果给定初始条件：

$$x_1(0) = x_{10},\quad x_2(0) = x_{20},\quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10},\quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20} \tag{3-2}$$

就可以求解该微分方程得到系统的响应。式(3-1)及式(3-2)通常用矩阵和向量表示为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2+c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3-3}$$

将上式推广到一般情况，假设有 N 个质量 m_1、m_2、…、m_N，分别通过 k_1 和 c_1、k_2 和 c_2、…、k_N 和 c_N 串联，N 个质量受到的力分别为 F_1、F_2、…、F_N，如图3-3所示。根据上面的分析，对于图3-3所示的多自由度系统的振动微分方程，可以使用矩阵的形式表示为：

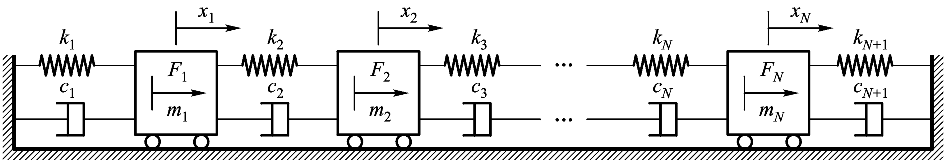


图3-3　典型的多自由度振动系统

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{3-4}$$

其中：$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & & \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & \\ & -c_3 & \ddots & -c_N \\ & & -c_N & c_N+c_{N+1} \end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & \\ & -k_3 & \ddots & -k_N \\ & & -k_N & k_N+k_{N+1} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{bmatrix}$$

给定的初始条件表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & \cdots & x_N(0) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \dot{\boldsymbol{x}}_0 &= \dot{\boldsymbol{x}}(0)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) & \dot{x}_2(0) & \cdots & \dot{x}_N(0) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \tag{3-5}$$

式(3-4)中，$\boldsymbol{M}$ 称为质量矩阵(**mass matrix**)，表示系统对广义坐标的质量，$\boldsymbol{C}$ 称为阻尼矩阵(**damping matrix**)，$\boldsymbol{K}$ 称为刚度矩阵(**stiffness matrix**)，$\boldsymbol{x}(t)$ 是系统的位移向量(**displacement vector**)，$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ 是系统的速度向量(**velocity vector**)，$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$ 是系统的加速度向量(**acceleration vector**)，$\boldsymbol{F}(t)$ 是系统的激励力向量(**force vector**)。式(3-5)中，$\boldsymbol{x}_0$ 为系统的初始位移，$\dot{\boldsymbol{x}}_0$ 为系统的初始速度，二者构成系统的初始条件(**initial conditions**)。显然，上面的各个向量的维数与系统的自由度数相等。式(3-4)表示力的关系，因此称为作用力方程(**force equation**)。

显然，当式(3-4)适用于直线运动的多自由度振动系统时，质量矩阵的元素是质量，阻尼矩阵的元素是阻尼，刚度矩阵的元素是刚度；位移向量的元素是直线位移，激励力向量的元素是力；初始位移向量的元素是直线位移，初始速度向量的元素是直线速度。根据扭转振动系统与直线位移振动系统的一致性，当上式用于系统的扭转振动时，质量矩阵的元素是转动惯量，阻尼矩阵的元素是扭转阻尼，刚度矩阵的元素是扭转刚度；位移向量的元素是角位移，激励力向量的元素是力矩；初始位移向量的元素是角位移，初始速度向量的元素是角速度。

进一步推广，当系统中既有直线运动振动系统的质量，又有扭转振动的转动惯量的时候，系统的振动微分方程要求在形式上满足单位上的一致性。如果式(3-3)和式(3-4)中的第 $i(1\leqslant i\leqslant N)$ 行所对应的是某个质量的振动微分方程，则该行是关于力的方程；如果式(3-3)和式(3-4)中的第 $i(1\leqslant i\leqslant N)$ 所对应的是某个转动惯量的振动微分方程，则该行是关于力矩的方程。所以，描述多自由度振动系统的广义坐标可能有直线位移，也可能有角位移，所以多自由度振动系统的方程组中既可能有关于力的微分方程，也可能有关于力矩的微分方程。

对于多自由度系统的振动,虽然系统中存在质量和转动惯量、阻尼和扭转阻尼、刚度和扭转刚度、力和力矩、直线位移和角位移、直线速度和角速度、直线加速度和角加速度,但是为了叙述方便,在不特别说明的情况下,常常将上述参量分别用质量、阻尼、刚度、力、位移、速度和加速度表示。

对于多自由度振动系统的微分方程组,可以发现,阻尼矩阵和刚度矩阵的非对角线元素往往不为零。这说明与该元素相对应的两个质量元素之间的运动存在相互作用,该相互作用是通过质量、弹簧或者阻尼来实现的,这种现象称为多自由度振动系统元素之间的耦合(**coupling**)。对于多自由度振动系统,必然存在阻尼或者弹簧的耦合。在式(3-3)和式(3-4)中,耦合表现为阻尼矩阵或者刚度矩阵存在非零的非对角线元素。如果一个 $N(N>1)$ 自由度振动系统中不存在任何耦合,该系统实际上就是 N 个单自由度振动系统。在某些情况下,可以通过坐标变换(**coordinate translation**)的方法将多自由度系统的耦合消除,从而将多自由度振动系统问题转换为单自由度系统的振动问题。

3.2 多自由度系统振动微分方程的建立

对于多自由度振动系统,对直线运动的质量应用牛顿第二定律,对于转动运动的转动惯量应用动量矩定理,可以得到系统的振动微分方程,但是这种建立系统振动微分方程的方法工作量大,对于结构复杂的系统的适应性差。影响系数法(**influence coefficient method**)是确定系统的质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵的一种直观和快速的方法,可以在建立质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵的基础上确定系统的振动微分方程。拉格朗日方程(**Lagrange equation**)允许使用统一的方法建立系统的振动微分方程,是一种系统化方法。

3.2.1 影响系数法

系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵可以通过影响系数法确定。

考虑图3-4所示三自由度振动系统,说明通过影响系数法确定刚度矩阵的方法。该方法首先要求分别给各广义坐标下的质量以单位位移。

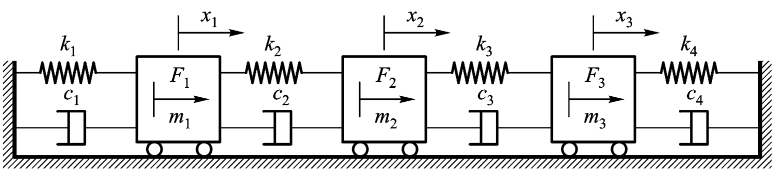


图3-4 典型的三自由度振动系统

首先,给广义坐标 x_1 下的质量 m_1 单位位移 $x_1=1$,其他广义坐标下的质量的位移为零,则各个质量的受力如图 3-5a 所示:

要使系统保持平衡,施加于三个质量的力 k_{11}、k_{21} 和 k_{31} 分别应为

$$k_{11}=k_1+k_2,\quad k_{21}=-k_2\quad ,k_{31}=0$$

同样,给广义坐标 x_2 下的质量 m_2 单位位移 $x_2=1$,其他广义坐标下的质量位移为零,则施加于各广义坐标下的质量的力如图 3-5b 所示,则得到

$$k_{12}=-k_2,\quad k_{22}=k_2+k_3,\quad k_{32}=-k_3$$

同样,给广义坐标 x_3 下的质量 m_3 单位位移 $x_3=1$,其他广义坐标下的质量位移为零,则施加于各广义坐标下的质量的力如图 3-5c 所示,则得到

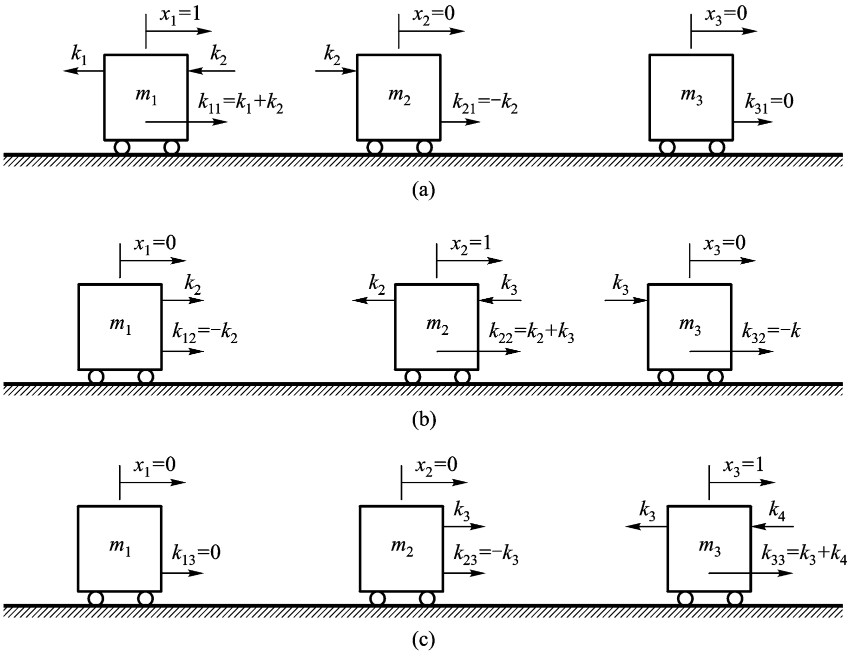


图 3-5　单位位移下的质量的受力分析

$$k_{13}=0,\quad k_{23}=-k_3,\quad k_{33}=k_3+k_4$$

上述确定的各个力用矩阵表示,有

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 \end{bmatrix}$$

推广上述方法到一般。对于任意的 N 自由度的振动系统,其各个质量的位移用坐标向量 x 表示为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的形式为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} \end{bmatrix}$$

令第 j 个广义坐标下的质量产生沿坐标方向的单位位移，其他质量的位移为 0，令 k_{ij} 表示由于第 j 个广义坐标下的质量 m_j 产生沿坐标方向的单位位移而在第 i 个广义坐标下的质量 m_i 上产生的弹簧作用力，则此时振动微分方程中表示弹簧作用力的部分 $\boldsymbol{Kx}$ 为

$$\boldsymbol{Kx}=\begin{bmatrix} k_{1j} & k_{2j} & \cdots & k_{Nj} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3-6}$$

根据作用力与反作用力的关系，要使系统在该单位位移下维持静止，需要对系统施加的力应为 $\begin{bmatrix} k_{1j} & k_{2j} & \cdots & k_{Nj} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

考虑到刚度可以定义为单位变形所需的作用力，系统的刚度矩阵的元素 k_{ij} 的物理意义可理解为：如果使第 j 个广义坐标下的质量 m_j 产生单位位移，并要使系统保持不动，就需要给第 i 个广义坐标下的质量 m_i 施加的作用力为 k_{ij}，称 k_{ij} 为刚度影响系数（**stiffness influence coefficient**）。根据刚度影响系数的物理意义，可以通过刚度影响系数直接写出刚度矩阵的各列向量。根据刚度矩阵元素的定义，对于 $i\neq j$，由作用力和反作用力大小相等的关系，可得 $k_{ij}=k_{ji}$，所以刚度矩阵一般是对称阵。根据图 3-5 确定的矩阵实际上就是图 3-4 所示振动系统的刚度矩阵。

可以用影响系数法确定振动系统的质量矩阵。图 3-4 所示的振动系统的质量矩阵可以通过图 3-6 说明。分别给各广义坐标下的质量以单位加速度。

首先，给广义坐标 x_1 下的质量 m_1 单位加速度 $\ddot{x}_1=1$，其他广义坐标下质量的加速度为零，如图 3-6a 所示，根据牛顿第二运动定律，要使系统保持单位加速度，施加于三个质量 m_1、m_2 和 m_3 上的力分别应为：$m_{11}=m_1$，$m_{21}=0$，$m_{31}=0$。

同样，给广义坐标 x_2 下的质量 m_2 单位加速度 $\ddot{x}_2=1$，其他广义坐标下的质量的加速度为零，如图 3-6b，同样得到：$m_{12}=0$，$m_{22}=m_2$，$m_{32}=0$。

同样，给广义坐标 x_3 下的质量的单位加速度 $\ddot{x}_3=1$，其他广义坐标下质量的加速度为零，如图 3-6c，同样得到：$m_{13}=0$，$m_{23}=0$，$m_{33}=m_3$。

上述确定的各个力用矩阵表示，有

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

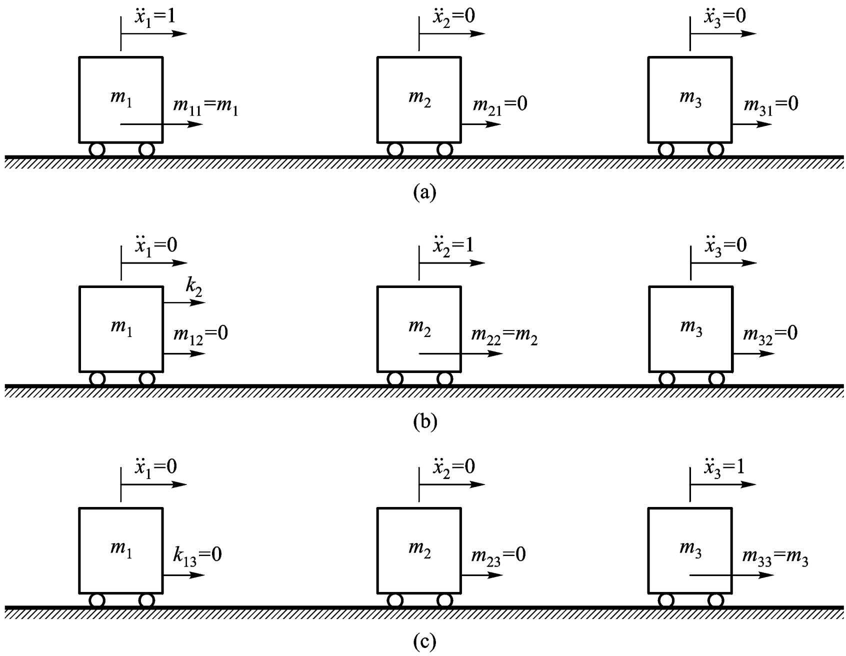


图 3-6　单位加速度下的质量的受力分析

推广上述方法到一般情况。对于 N 自由度的振动系统，系统中各广义坐标下质量的加速度用坐标向量 $\ddot{\boldsymbol{x}}$ 表示为：$\ddot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 & \ddot{x}_2 & \cdots & \ddot{x}_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

振动系统的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的形式为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \cdots & m_{NN} \end{bmatrix}$$

令其第 j 个广义坐标下质量 m_j 单位加速度，其他广义坐标下质量的加速度为零，令 m_{ij} 表示由于第 j 个广义坐标下质量 m_j 产生单位加速度而在第 i 个广义坐标下质量 m_i 上产生的惯性力，则此时振动微分方程中表示惯性力的部分 $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}$ 为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix} m_{1j} & m_{2j} & \cdots & m_{Nj} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3-7}$$

所以，根据牛顿第二运动定律，要使系统维持该加速度，需要对系统施加的力应为$\begin{bmatrix} m_{1j} & m_{2j} & \cdots & m_{Nj} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

考虑到质量可以定义为使其产生单位加速度所需要的力，系统的质量矩阵的

元素 m_{ij} 的物理意义可以理解为:如果使第 j 个广义坐标下质量 m_j 产生单位加速度,且要质量 m_i 保持这个加速度,则需要沿第 i 个广义坐标下的质量 m_i 的坐标方向需要施加的作用力为 m_{ij},称为质量影响系数(**mass influence coefficient**)。根据质量影响系数的物理意义,可以确定质量矩阵的各列向量。实际上,由于一个质量的加速度一般不会在其他质量产生任何作用力,质量矩阵一般为对角阵。

如果系统的阻尼是粘性阻尼,也可以通过相似的方法确定系统的阻尼矩阵。粘性阻尼系数定义为产生单位速度所需的力。因此系统的阻尼矩阵元素 c_{ij} 的物理意义可以理解为:如果第 j 个下的质量具有单位速度,要使质量 m_i 保持这个速度,则需要沿第 i 个广义坐标下的质量 m_i 的坐标方向施加的作用力 c_{ij},称 c_{ij} 为阻尼影响系数。根据阻尼影响系数的物理意义,可以确定阻尼矩阵的列向量,进而确定阻尼矩阵。对于粘性阻尼系统。根据上述方法,对于图 3-4 所示的振动系统,可以确定系统的阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 \end{bmatrix}$$

需要说明:应用影响系数法确定阻尼矩阵的前提是系统的阻尼为粘性阻尼。

上述分析说明,在建立广义坐标的基础上,通过影响系数法可确定系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵,再给定系统受到的激励力向量,则可以直接写出如式(3-4)的系统振动微分方程。

例 **3.1** 用影响系数法求图 3-7 所示系统的质量矩阵和刚度矩阵。分别用 x 和 θ 作为质量 m 和转动惯量 I 的广义坐标。

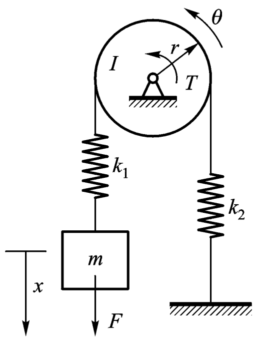


图 3-7 例 3.1 图

解:求质量矩阵。令广义坐标 x 下的质量 m 单位加速度 $\ddot{x}=1$,广义坐标 θ 下的转动惯量 I 零角加速度 $\ddot{\theta}=0$,如图 3-8a 所示,要使系统维持该加速度,则需要给质量 m 施加的力的大小为 m,需要给转动惯量 I 施加的力矩为 0,所以质量矩阵的第一列为 $[m \quad 0]^{\mathrm{T}}$。

同理,令广义坐标 θ 下的转动惯量 I 单位角加速度 $\ddot{\theta}=1$,广义坐标 x 下的质量 m 零加速度 $\ddot{x}=0$,如图 3-8b 所示。要使系统维持这种加速度,则需要给质量 m 施加的力为 0,需要给转动惯量 I 施加的力矩大小为 I,所以质量矩阵的第二列为 $[0 \quad I]^{\mathrm{T}}$。所以质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

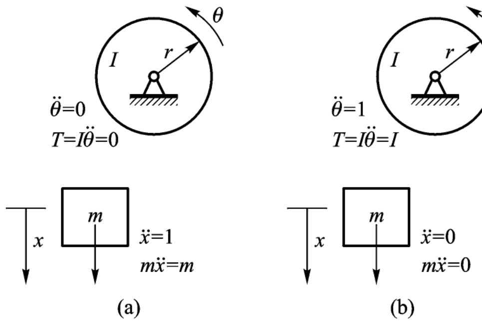


图 3-8　单位加速度下系统的受力分析

求刚度矩阵。给广义坐标 x 下的质量 m 单位位移 $x=1$，广义坐标 θ 下的转动惯量 I 零角位移 $\theta=0$，如图 3-9a 所示，要使系统维持这种位移，则需要给质量 m 施加的力为 k，需要给转动惯量 I 施加的力矩为 $-k_1 r$，所以刚度矩阵的第一列为 $[k_1 \quad -k_1 r]^{\mathrm{T}}$。

令广义坐标 θ 下的转动惯量 I 单位角位移 $\theta=1$，广义坐标 x 下的质量 m 零位移 $x=0$，如图 3-9b 所示，要使系统维持该位移，则需要给质量 m 施加的力为 $-k_1 r$，需要给转动惯量 I 施加的力矩大小为 $(k_1+k_2)r^2$，所以刚度矩阵的第二列为 $[-k_1 r \quad (k_1+k_2)r^2]^{\mathrm{T}}$。所以刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 r \\ -k_1 r & (k_1+k_2)r^2 \end{bmatrix}$$

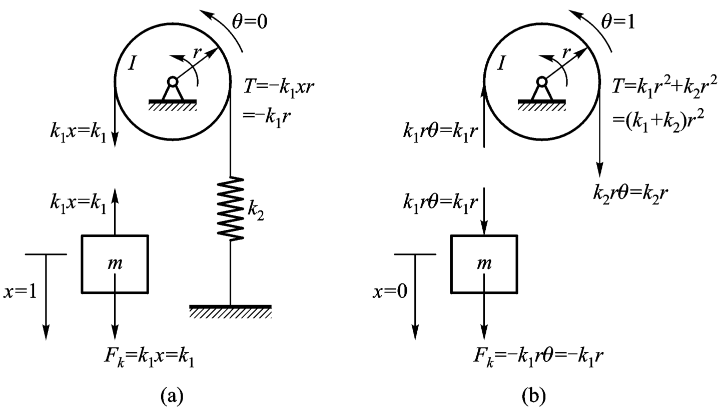


图 3-9　单位位移下质量的受力分析

确定了系统的质量矩阵和刚度矩阵,再给定初始条件和激励力向量,则可以直接写出系统的无阻尼振动微分方程。

3.2.2 拉格朗日方程

拉格朗日方程适用于具有完整约束(**holonomic constraint**)的系统。所谓完整约束指的是约束方程中不含确定系统位置的坐标的微商,或含有坐标的微商但可直接积分成为不含坐标微商的约束。例如一被限制在半径为 R 的球面上运动的质点,约束方程为

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$

该约束就是完整约束。

用 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 表示一个具有完整约束系统的 N 自由度系统的广义坐标,广义坐标下的质量分别为 m_1、m_2、$\cdots$、m_N,则系统的动能 $T(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)$ 为

$$T(\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{x}_i^2=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{3-8}$$

其中,$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{M}$ 为系统的质量矩阵。

系统的势能表示为 $U(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为

$$U(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}k_{ij}x_ix_j=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x} \tag{3-9}$$

其中,$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{K}$ 为系统的刚度矩阵。

拉格朗日函数(**Lagrange function**)$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\cdots,\dot{x}_n)$ 定义为

$$L=T-U \tag{3-10}$$

针对具有粘性阻尼的振动系统,定义系统的能量耗散函数为

$$D=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{3-11}$$

其中,$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \cdots & \dot{x}_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{C}$ 为系统的阻尼矩阵,则系统的拉格朗日方程为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}+\frac{\partial D}{\partial x_i}=F_i \tag{3-12}$$

其中,F_i 为系统的施加于广义坐标 x_i 的广义激励力。式(3-12)实际上就是多自由度振动系统的振动微分方程,即

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{3-13}$$

其中,$\boldsymbol{F}(t)$ 为系统的激励力向量,$\boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}F_1(t) & F_2(t) & \cdots & F_N(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

显然,如果采用相同的广义坐标,用拉格朗日方程建立的振动微分方程与运

用牛顿第二运动定律建立的振动微分方程是完全相同的。运用拉格朗日方程建立系统的振动微分方程时,对由质量和转动惯量组成的多自由度振动系统允许使用统一的形式写出拉格朗日函数,再由拉格朗日方程得到系统的振动微分方程。

对于自由振动的系统,激励力为零,拉格朗日方程的形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}+\frac{\partial D}{\partial x_i}=0 \tag{3-14}$$

对于无阻尼自由振动的系统,能量耗散函数为 0,拉格朗日方程的形式为:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0 \tag{3-15}$$

例 **3.2** 对于图 3-1 所示的二自由度振动系统,采用拉格朗日方程建立系统的自由振动微分方程。

解:取 x_1 和 x_2 作为广义坐标。

系统在任意时刻的动能为 $T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$

系统在任意时刻的势能为 $U=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2-k_2x_1x_2+\frac{1}{2}k_3x_2^2$

拉格朗日函数为

$$L=T-U=\left(\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2\right)-\left(\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_1^2+\frac{1}{2}k_2x_2^2-k_2x_1x_2+\frac{1}{2}k_3x_2^2\right)$$

粘性阻尼的能量耗散函数为 $D=\frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}c_2\dot{x}_1^2-c_2\dot{x}_1\dot{x}_2+\frac{1}{2}c_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}c_3\dot{x}_2^2$

对 x_1 应用拉格朗日方程有 $m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1$

对 x_2 应用拉格朗日方程有 $m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2=F_2$

则系统的振动微分方程为

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1+(c_1+c_2)\dot{x}_1-c_2\dot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=F_1 \\ m_2\ddot{x}_2-c_2\dot{x}_1+(c_2+c_3)\dot{x}_2-k_2x_1+(k_2+k_3)x_2=F_2 \end{cases}$$

例 **3.3** 用拉格朗日方程建立图 3-7 所示系统的振动微分方程。

解:分别取 x 和 θ 作为质量 m 和转动惯量 I 的广义坐标。

系统在任意时刻的动能为 $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$

系统在任意时刻的势能为 $U=\frac{1}{2}k_1(x-r\theta)^2+\frac{1}{2}k_2(r\theta)^2$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}k_1(x-r\theta)^2-\frac{1}{2}k_2(r\theta)^2$$

对 x 应用拉格朗日方程有 $m\ddot{x}+k_1x-k_2r\theta=F$

对 θ 应用拉格朗日方程有 $I\ddot{\theta}-k_1rx+(k_1+k_2)r^2\theta=M$

则系统的振动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x}+k_1x-k_1r\theta=F \\ I\ddot{\theta}-k_1rx+(k_1+k_2)r^2\theta=M \end{cases}$$

即质量矩阵为：$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$，刚度矩阵为：$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} k_1 & -k_1r \\ -k_1r & (k_1+k_2)r^2 \end{bmatrix}$，广义力为：$\boldsymbol{F}=[F \quad M]^{\mathrm{T}}$。

总结应用拉格朗日方程建立系统的振动微分方程的步骤：

（1）确定系统的自由度 N 以及 N 个独立的广义坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_N$；

（2）基于广义坐标计算系统的动能函数 T 和势能函数 U 和能量耗散函数 D，写出系统的拉格朗日函数 L；

（3）确定各个广义坐标下的激励力，针对各个广义坐标应用拉格朗日方程，得到关于各个广义坐标的振动微分方程。

如果应用对象是无阻尼振动系统，则在应用上述步骤时，不必考虑能量耗散函数；如果应用对象是自由振动系统，则不必考虑系统的激励力。

3.3 多自由度系统的无阻尼自由振动

3.3.1 固有振动

固有振动是系统以简谐振动形式表现的振动，是由系统的质量和刚度参数决定的系统振动形态。研究固有振动是确定振动系统的固有特性的方法。

令式(3-4)中 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}$，得到 N 自由度系统的无阻尼自由振动微分方程：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{O} \tag{3-16}$$

多自由度系统进行固有振动时，各个坐标的振动是同步的简谐振动，即

$$x_i=A_i\sin(\omega t+\varphi) \quad (i=1,2,3,\cdots,N) \tag{3-17}$$

用向量表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\varphi) \tag{3-18}$$

其中,$\boldsymbol{A}=[A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_N]^{\mathrm{T}}$。

将式(3-18)代入式(3-16),并消去系数 $\sin(\omega t+\varphi)$,得到

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O} \tag{3-19}$$

上式是一个关于向量 $\boldsymbol{A}$ 的齐次线性方程组,根据齐次线性方程组解的理论,若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 满足上式,必须使其系数行列式等于零,即

$$|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0 \tag{3-20}$$

上式是一个关于 ω^2 的 N 次方程,称为振动系统的特征方程(**character equation**),ω^2 称为方程的特征值(**eigenvalue**)。该方程的 N 个解就是 N 自由度系统的 N 个特征值,特征值的算术平方根就是振动系统的固有频率,一个 N 自由度振动系统有 N 个固有频率。令方程的特征值按照升序排列如下:

$$0<\omega_1^2\leqslant\omega_2^2\leqslant\cdots\leqslant\omega_N^2$$

则第 i 个特征根 ω_i^2 算术平方根就是系统的第 i 阶固有频率。

满足式(3-19)的向量 $\boldsymbol{A}$ 称为特征向量。对应于方程(3-19)单根的特征值 ω_i^2,特征向量为$\boldsymbol{A}_i$,则有

$$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{O} \tag{3-21}$$

如果特征值 ω_i^2 是方程(3-19)的单根,则矩阵 $\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M}$ 的秩为 $N-1$,所以存在满足式(3-21)的非零特征向量$\boldsymbol{A}_i^b=[A_1^b \quad A_2^b \quad \cdots \quad A_N^b]^{\mathrm{T}}$。令

$$\boldsymbol{A}_i=\frac{\boldsymbol{A}_i^b}{A_N^b}=\frac{1}{A_N^b}[A_1^b \quad A_2^b \quad \cdots \quad A_N^b]=[A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad 1]$$

这种通过规定某个具体元素的值而确定其他各个元素的值的过程称为向量的归一化。如果$\boldsymbol{A}_i$ 是方程(3-21)的解,任给非零常数 a_i,有 $a\boldsymbol{A}_i$ 是方程(3-21)的解。显然,对于一个 N 自由度振动系统,存在 N 个固有频率,所以可以确定 N 个特征向量。由第 i 阶固有频率 ω_i,相应的特征向量 $a\boldsymbol{A}_i$,给定 φ_i,代入式(3-18)得到满足式(3-17)的振动系统的解:

$$x_i=aA_i\sin(\omega_i t+\varphi_i) \tag{3-22}$$

上式即为振动系统在第 i 阶固有频率 ω_i 的振动形态,称为系统的第 i 阶主振动(**principal vibration**),说明系统各个质量都以固有频率 ω_i 振动,且相位滞后相同,振幅满足

$$\frac{x_1}{A_1}=\frac{x_2}{A_2}=\cdots=\frac{x_N}{A_N} \tag{3-23}$$

即第 i 阶主振动下各个质量的振幅与$\boldsymbol{A}_i$ 中各个元素成比例,所以向量$\boldsymbol{A}_i$ 描述了在第 i 阶主振动时各个质量的振动形态,称$\boldsymbol{A}_i$ 为第 i 阶主振型(**normal mode**),又常称为模态(**modal**)。这说明,在以第 i 阶固有频率 ω_i 振动时,虽然

各个质量振动的实际幅值是不确定的,但是各个质量的振动的幅值与$\boldsymbol{A}_i$中各个元素成比例。振动系统的固有频率取决于质量矩阵和刚度矩阵,主振型也是由质量矩阵和刚度矩阵决定的,是系统固有的振动性质。

多自由度振动系统的主振型具有正交性。由式(3-21),对于任一固有频率ω_i及相应的主振型$\boldsymbol{A}_i$,有$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{O}$,即:

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_i=\omega_i^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_i \tag{3-24}$$

同理,对固有频率ω_j及相应的主振型$\boldsymbol{A}_j$,有

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_j=\omega_j^2\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_j \tag{3-25}$$

对式(3-24)转置,且同时右乘于$\boldsymbol{A}_j$,并注意到$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{K}$都是对称矩阵,有

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_j=\omega_i^2\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_j \tag{3-26}$$

对式(3-25)左乘于$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}$,有

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_j=\omega_j^2\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_j \tag{3-27}$$

将式(3-26)与式(3-27)相减得到

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O} \tag{3-28}$$

如果$\omega_i\neq\omega_j$,表示$\boldsymbol{A}_i$和$\boldsymbol{A}_j$是对应不同频率的主振型,则必有

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O} \tag{3-29}$$

上式代入式(3-26)或者式(3-27)中,得到

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_j=\boldsymbol{O} \tag{3-30}$$

式(3-29)和式(3-30)说明,对于不同固有频率的主振型关于质量矩阵和刚度矩阵正交,这就是多自由度振动系统的主振型的正交性。

如果$\omega_i=\omega_j$,即对于同一频率的主振型,定义

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_i=M_i^{\mathrm{p}} \tag{3-31}$$

$$\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_i=K_i^{\mathrm{p}} \tag{3-32}$$

则M_i^{p}称为系统的第i阶主质量,K_i^{p}称为系统的第i阶主刚度。不难证明,主质量、主刚度与系统的固有频率之间满足如下关系:

$$K_i^{\mathrm{p}}=\omega_i^2M_i^{\mathrm{p}} \tag{3-33}$$

定义振型矩阵:$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_N\end{bmatrix}$,根据主振型的正交性,结合式(3-31)和式(3-32),分别可以得到

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}} \tag{3-34}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}} \tag{3-35}$$

其中:$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}M_1^{\mathrm{p}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & M_2^{\mathrm{p}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & M_N^{\mathrm{p}}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix}K_1^{\mathrm{p}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & K_2^{\mathrm{p}} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & K_N^{\mathrm{p}}\end{bmatrix}$。

这里称$\boldsymbol{M}^{\mathrm{P}}$为主质量矩阵，称$\boldsymbol{K}^{\mathrm{P}}$为主刚度矩阵，它们都是对角阵。根据式(3-33)，主质量矩阵和主刚度矩阵满足如下关系：

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{P}}=\Lambda\boldsymbol{M}^{\mathrm{P}} \tag{3-36}$$

其中：$\Lambda=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2\end{bmatrix}$，显然，$\Lambda$为对角阵，其对角元素是各阶固有频率的平方。$\Lambda$常被称为谱矩阵，它反映了振动系统的固有频率。

例 **3.4** 考虑两自由度系统的无阻尼自由振动。系统如图3-10所示，$m_1=m_2=m$，$k_1=k_3=k$，$k_2=4k$。求系统的固有频率和主振型。

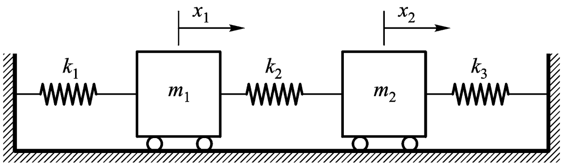


图3-10 两自由度无阻尼自由振动系统模型

解：系统为两自由度振动系统，具有两个固有频率和两个相应的主振型。

系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5k & -4k\\ -4k & 5k\end{bmatrix}$$

系统的特征方程为$|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=\begin{vmatrix}5k-m\omega^2 & -4k\\ -4k & 5k-m\omega^2\end{vmatrix}=0$

解此方程得到系统的固有频率 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\omega_2=3\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

由 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，求解得到系统的第一阶主振型为$\boldsymbol{A}_1=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$

由 $\omega_2=3\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，求解得到系统的第二阶主振型为$\boldsymbol{A}_2=[-1\quad 1]^{\mathrm{T}}$

系统的两阶振型如图3-11所示。

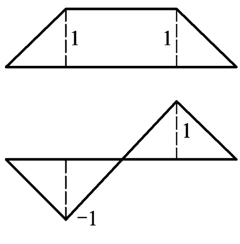


图3-11 主振型示意

当系统的固有频率全部不相等时，相应的固有振动和主振型也是全部不同的。实际的振动系统的特征方程可能具有两个或者以上相同的固有频率，

即特征方程有重根。假设 ω^2 是 N 自由度振动系统特征方程的 $r(r<N)$ 重根，即

$$\omega_1^2=\omega_2^2=\cdots=\omega_r^2=\omega^2 \tag{3-37}$$

则对应于这个 r 重根，存在 r 个相互正交的主振型。将 ω^2 代入式(3-19)中，有

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{0}$$

由于 ω^2 方程的 r 重根，则矩阵 $\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}$ 的秩为 $N-r$，根据齐次线性方程组解的理论，存在并可以求得满足上面方程的 r 个线性无关的解 $\overline{\boldsymbol{A}}_1,\overline{\boldsymbol{A}}_2,\cdots,\overline{\boldsymbol{A}}_r$。可以通过下面的施密特正交化方法得到关于质量矩阵正交的基础解 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$：

(1) 取 $\boldsymbol{A}_1=\overline{\boldsymbol{A}}_1$

(2) 当 $2\leqslant k\leqslant r$，$\boldsymbol{A}_k=\sum\limits_{i=1}^{k-1}\dfrac{-\overline{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}_k}{\overline{\boldsymbol{A}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{A}}_i}\overline{\boldsymbol{A}}_i+\overline{\boldsymbol{A}}_k \quad (2\leqslant k\leqslant r)$

可以证明，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 不仅关于质量矩阵正交，而且关于刚度矩阵正交。但是，一般情况下，$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 关于阻尼矩阵不是正交的。

再通过对 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$ 进行归一化处理，得到 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_r$，这就是关于 r 重根的相互正交的主振型。不仅 r 重根相应的 r 个主振型正交，而且与其他固有频率相应的主振型也是相互正交的。这样，就得到振动系统的 N 个相互正交的主振型。

如果一个振动系统的某个振动形态不会导致系统的弹簧产生变形，这时系统的振动实际上不是简谐振动，而是刚体运动，这实际上就是固有频率为零的情形。考虑振动系统的特征方程 $|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0$。假设 $\omega^2=0$ 是系统的特征根，即有：$|\boldsymbol{K}|=0$。这说明刚度矩阵奇异，即刚度矩阵是半正定的，则存在非零向量 $\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix}A_1 & A_2 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，满足

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{0} \tag{3-38}$$

显然式(3-38)说明 $\boldsymbol{A}_0$ 是在 $\omega^2=0$ 时系统的振型。此时，易得到

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{0} \tag{3-39}$$

这说明系统在零频率下振动时候，系统的势能为零，即弹簧无变形，系统做刚体运动。令 $f(t)$ 为描述系统做刚体运动的规律，则系统的振动形态为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}_0 f(t)$$

将上式代入式(3-16)，并左乘 $\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_0\ddot{f}(t)+\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_0 f(t)=\boldsymbol{0} \tag{3-40}$$

注意到 $|\boldsymbol{K}|=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}_0\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_0\neq\boldsymbol{0}$，则必有 $\ddot{f}(t)=\boldsymbol{0}$，所以

$$f(t)=at+b \tag{3-41}$$

其中，a，b 为常数。

这意味着如果系统存在零固有频率，则系统中还存在为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}_0(at+b)$ 的刚体运动。向量 A_0 为系统在零固有频率时的振型，称为刚体运动振型。

实践中，旋转机械中的轴系、通过弹性装置连接的列车等可以沿某一方向自由运动的多自由度振动系统都存在零固有频率和相应的主振型。这类振动系统的刚度矩阵也都是半正定的。

例 **3.5**　考虑图 3–12 所示三自由度列车模型。其中，$m_1=m_2=m_3=m$，$k_1=k_2=k$。列出系统的自由振动微分方程并求系统的固有频率和主振型。

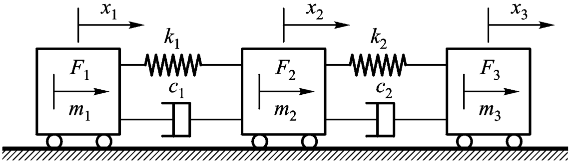


图 3–12　有刚体运动的三自由度振动系统模型

解：可以应用多种方法得到系统的振动微分方程。现应用拉格朗日方程建立系统的振动微分方程。

给定广义坐标 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。系统在任意时刻的动能为

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$$

系统在任意时刻的势能为

$$U=\frac{1}{2}k_1(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}k_2(x_3-x_2)^2=\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2+\frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2$$

系统的拉格朗日函数为

$$L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_3^2-\frac{1}{2}k(x_1-x_2)^2-\frac{1}{2}k(x_3-x_2)^2$$

对广义坐标 x_1 应用拉格朗日方程有

$$m\ddot{x}_1^2+kx_1-kx_2=0$$

对广义坐标 x_2 应用拉格朗日方程有

$$m\ddot{x}_2^2-kx_1+2kx_2-kx_3=0$$

对广义坐标 x_3 应用拉格朗日方程有

$$m\ddot{x}_3^2-kx_2+kx_3=0$$

则系统的振动微分方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

其中：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} k & -k & \\ -k & 2k & -k \\ & -k & k \end{bmatrix}$$

根据线性代数知识,可以发现刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 奇异,说明系统存在刚体运动,即固有频率为零的运动。

令 $|\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}|=0$,求解该方程得到系统的固有频率为

$$\omega_1^2=0,\omega_2^2=\frac{k}{m},\omega_3^2=\frac{k}{3m}$$

根据$(\boldsymbol{K}-\omega_i^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{0}$,求各个固有频率下的主振型。

$$\omega_1^2=0\text{ 时},A_1=[1\quad 1\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_2^2=\frac{k}{3m}\text{时},A_2=[1\quad -2\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

$$\omega_3^2=\frac{k}{m}\text{时},A_3=[-1\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$$

系统的振型矩阵为

$$\boldsymbol{A}=[A_1\quad A_2\quad A_3]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则系统的主质量矩阵和主刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3m & & \\ & 6m & \\ & & 2m \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2k & \\ & & 2k \end{bmatrix}$$

显然质量矩阵是正定的,而刚度矩阵是半正定的。刚度矩阵半正定说明系统的振动中存在刚体运动。

容易验证:$\boldsymbol{K}^{\mathrm{P}}=\Lambda\boldsymbol{M}^{\mathrm{P}}$。

其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \omega_3^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & \dfrac{k}{3m} & \\ & & \dfrac{k}{m}\end{bmatrix}$$

3.3.2　耦合与解耦

回顾例 3.1 发现,如果转动惯量 I 位移不为零,质量 m 的位移会在转动惯量 I 上产生作用力矩;同样如果质量 m 的位移不为零,转动惯量 I 的位移会在质量 m 上产生作用力。这种系统中振动元素的相互作用现象实际上就是耦合。在系统的振动微分方程中,耦合表现为系统的质量矩阵、刚度矩阵或者阻尼矩阵的非对角元素不为零。如果刚度矩阵存在非零的非对角线元素,则称系统存在刚度耦合;如果质量矩阵存在非零的非对角线元素,则称系统存在惯性耦合。

耦合表明一个广义坐标下的运动对另一个广义坐标下的运动的影响。以二自由度系统的刚度耦合为例说明。假设 $\boldsymbol{K}$ 和$\boldsymbol{K}'$分别为存在刚度耦合的刚度矩阵和无耦合的刚度矩阵,即

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix},\boldsymbol{K}'=\begin{bmatrix}k'_{11} & 0\\ 0 & k'_{22}\end{bmatrix}$$

如果仅在第一个广义坐标上产生位移,即 $x=\begin{bmatrix}x_1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,则有

$$\boldsymbol{Kx}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11}x_1\\ k_{21}x_1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}k'_{11} & 0\\ 0 & k'_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k'_{11}x_1\\ 0\end{bmatrix}$$

这说明,不存在刚度耦合时刚度矩阵为对角阵,一个坐标上产生的位移只是在该坐标上产生弹性力,而不会在其他坐标上产生弹性力;而当存在刚度耦合时,刚度矩阵不再是对角阵,一个坐标产生的位移不仅在该坐标上产生弹性力,而且会在其他坐标上产生弹性力。同理,振动系统中存在惯性耦合时,一个坐标上的加速度不仅在该坐标上的质量产生惯性力,而且还会在其他坐标上的质量产生惯性力;当不存在惯性耦合时,一个坐标上的加速度仅对该坐标上的质量产生惯性力,不会对其他坐标上的质量产生惯性力。

如果振动系统中不存在任何耦合,即 N 自由度振动系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵都是对角阵,则 N 自由度振动系统实际上就化为 N 个独立的单自由度振动。那么对单自由度振动的分析方法就可以用来分析多自由度振动系统,这对于分析多自由度系统是非常有意义的。

对于无阻尼振动,在确定系统的主振型的前提下,可以将存在耦合的振动通过线性变换转换为不存在耦合的情况,这一过程称为解耦。

假设$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N$ 是存在惯性耦合的刚度耦合的 N 自由度无阻尼振动系统的第 1 到第 N 阶主振型。由于$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N$ 相互正交,它们构成了 N 维向量空间的一组正交基。那么对于振动系统的广义坐标 $\boldsymbol{x}$,一定存在向量 $y=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,可以由 N 个主振型构成的正交基表示为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} y_1\boldsymbol{A}_1 & y_2\boldsymbol{A}_2 & \cdots & y_N\boldsymbol{A}_N \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \tag{3-42}$$

将上式代入系统的无阻尼自由振动微分方程(3-16),并左乘$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,可得到

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{3-43}$$

上面的振动方程中,质量矩阵和刚度矩阵都是对角阵,没有耦合,实现了解耦。因此,通过式(3-42)所示,可以实现无阻尼振动的解耦,把多自由度系统的振动化成单自由度系统的振动表示形式。注意在解耦的过程中,激励力的形式由 $\boldsymbol{F}$ 变成$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$。

同时需要说明的是,上面的解耦过程适用于无阻尼系统。对于阻尼系统,上述的解耦过程一般是不能消除阻尼耦合的,因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}$ 不一定是对角阵。

解耦将表示系统运动的坐标由广义坐标 $\boldsymbol{x}$ 变成坐标 $\boldsymbol{y}$。广义坐标 $\boldsymbol{x}$ 为建立系统的微分方程时定义的坐标,有明确的物理意义,称为物理坐标(**physical coordinate**);而坐标 $\boldsymbol{y}$ 与系统的主质量矩阵、主刚度矩阵对应,称为主坐标(**principal coordinate**)。虽然主坐标不直观,但是它反映每个主振型对系统振动的实际作用量,能方便对系统的分析。实现由广义坐标到主坐标变换的式(3-42)称为坐标变换(**coordinate transform**)。

例 3.6 对例 3.4 所示的振动系统解耦,并写出解耦后主坐标下的振动微分方程。

解:系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 5k & -4k \\ -4k & 5k \end{bmatrix}$$

与系统的固有频率 $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 和 $\omega_2=3\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 相应的主振型分别为:$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$,则振型矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

引入坐标变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

主质量矩阵$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$

主刚度矩阵$\boldsymbol{K}^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}5k&-4k\\-4k&5k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k&0\\0&18k\end{bmatrix}$

变换后的系统的自由振动微分方程为

$$\begin{bmatrix}2m&0\\0&2m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k&0\\0&18k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

可见,解耦后系统的实际运动表现为两个单自由度系统的振动。

总结前述各例中的振动系统微分方程的质量矩阵和刚度矩阵,可发现:质量矩阵一般为对角阵,说明系统不存在惯性耦合;而刚度矩阵一般为非对角阵,说明系统存在刚度耦合。出现系统不存在惯性耦合而常常存在刚度耦合的原因:在选择主坐标时,一般把主坐标定在各个质量上,使得质量矩阵为对角阵。解耦后,刚度矩阵通过线性变换转化为对角阵,而解耦后的质量矩阵依然是对角阵,这是因为进行的线性变换为正交变换。

3.3.3　自由振动

可以通过直接解微分方程组得到振动系统在自由振动状态下的解。由常系数微分方程组解的理论,多自由度系统自由振动微分方程组的解是各个固有频率下的固有振动的叠加,即

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{N}a_i\boldsymbol{A}_i\sin(\omega_i t+\varphi_i)\tag{3-44}$$

上式中 a_i 和 φ_i 是待定常数,各 N 个。如果给定系统的 N 个初始速度和初始加速度作为初始条件,则可以得到由 $2N$ 个方程组成的关于 a_i 和 φ_i 的方程组,求解该方程组就可以确定 a_i 和 φ_i 的值。这就得到了多自由度振动系统在给定的初始条件下的自由振动的实际形态。

对于多自由度系统的自由振动问题,有以下两点需要说明:

(1) 分析多自由度振动系统的自由振动时,首先根据系统的质量矩阵和刚度矩阵确定系统的固有频率;相应的系统在各个频率下的固有振型,它是系统在该频率下的主振动。

(2) 多自由度系统的自由振动形态是各个主振动的线性叠加,只是各个主振型的幅值大小和相位需要确定,若给定各个主坐标下的质量的初始位移和初始速度,就可以确定多自由度系统的自由振动形态。

例 **3.7**　考虑两自由度系统的无阻尼自由振动。系统如图 3-10 所示,$m_1=m_2=m$,$k_1=k_3=k$,$k_2=4k$,系统的初始条件为:$\boldsymbol{x}(0)=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$,$\dot{\boldsymbol{x}}(0)=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$。求系统的固有振动和自由振动。

解:在例 3.4 中,已经求得系统的固有频率:$\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$,$\omega_2=3\sqrt{\dfrac{k}{m}}$。

两个固有频率下的系统的主振型分别为：$\boldsymbol{A}_1=[1\quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}_2=[-1\quad 1]^{\mathrm{T}}$。

由式(3-43)，系统在初始条件下的自由振动形式为

$$\boldsymbol{x}(t)=a_1\boldsymbol{A}_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+a_2\boldsymbol{A}_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=a_1\boldsymbol{A}_1\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+a_2\boldsymbol{A}_2\omega_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

将初始条件带入得到

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=a_1\sin\varphi_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+a_2\sin\varphi_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=a_1\omega_1\cos\varphi_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+a_2\omega_2\cos\varphi_2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

求解上述方程，得到：$a_1=1$，$\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$，$a_2=0$，$\varphi_2=0$

所以在给定的初始条件下系统的自由振动为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}_1\sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)$$

对于无阻尼的多自由度系统在初始条件下的自由振动问题，可以通过解耦的方法把多自由度系统对初始条件的响应问题转化成主坐标下单自由度系统对初始条件的响应问题，求解得到各个单自由度系统对初始条件的响应。需要注意的是主坐标下的初始条件可以由式(3-42)根据物理坐标下的初始条件得到。如果要求得到物理坐标下系统对初始条件的响应，则依据式(3-42)就可以得到。当然采用解耦得到的振动系统的解与通过直接求解振动微分方程得到的系统的解是完全一致的。

例 **3.8** 用振型叠加方法求解例3.3。

解：已求得系统的振型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$

系统解耦后的振动微分方程为 $\begin{bmatrix}2m & 0\\0 & 2m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{y}_1\\\ddot{y}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k & 0\\0 & 18k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

在主坐标下的初始条件为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

则系统转化为两个单自由度振动：

$$2m\ddot{y}_1+2ky_1=0$$

$$y_1(0)=1,\quad \dot{y}_1(0)=0$$

$$2m\ddot{y}_2+18ky_2=0$$

$$y_1(0)=0,\quad \dot{y}_1(0)=0$$

这两个单自由度振动系统在初始条件下的响应分别为

$$y_1(t)=\sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y_2(t)=0$$

所以,在给定的初始条件下系统的自由振动为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t)=[\boldsymbol{A}_1\quad \boldsymbol{A}_2]\begin{bmatrix}\sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\sin\left(\omega_1 t+\frac{\pi}{2}\right)$$

3.4 多自由度系统的无阻尼强迫振动

3.4.1 简谐力激励下系统的响应

简谐力是在频域上最简单的力输入形式,通过简谐力输入下系统的响应可以发现系统的很多性质。首先考虑系统受到简谐力输入时系统的稳态响应,设系统受到的简谐力输入向量为

$$\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}\sin\ \omega t \tag{3-45}$$

其中:$\boldsymbol{F}=[F_1\quad F_2\quad \cdots\quad F_N]^{\mathrm{T}}$ 表示激励力幅值的列向量。简谐力输入下系统的振动微分方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}\sin\ \omega t \tag{3-46}$$

在简谐力激励下,系统的位移响应为同频率的简谐位移输出,假设

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}\sin\ \omega t$$

代入式(3-46),并整理,得到

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F} \tag{3-47}$$

记 $\boldsymbol{H}(\omega)=[\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}]^{-1}$,称 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 为响应函数矩阵。则系统在简谐力输入下的稳态响应为

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}]^{-1}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{H}(\omega)\boldsymbol{F} \tag{3-48}$$

以上通过直接求解幅值向量确定系统对简谐激励的稳态响应的方法称为直接解法。

当然,还可以通过解耦的方法获得物理坐标下的响应,然后再实施坐标变换获得广义坐标下系统对简谐激励的稳态响应。在计算得到系统振型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的基础上,定义变换:

$$x(t)=Ay(t)$$

记 $P=A^{\mathrm{T}}F$,则通过变换可以对系统解耦得到

$$M^{\mathrm{p}}\ddot{y}(t)+K^{\mathrm{p}}y(t)=P\sin\omega t \tag{3-49}$$

上式的解为

$$y(t)=B\sin\omega t=\begin{bmatrix}B_1 & B_2 & \cdots & B_N\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\sin\omega t \tag{3-50}$$

其中,$B_i=\dfrac{P_i}{K_i^{\mathrm{p}}-\omega^2 M_i^{\mathrm{p}}}=\dfrac{P_i}{K_i^{\mathrm{p}}}\dfrac{1}{1-\lambda_i^2}$,而 $\lambda_i=\dfrac{\omega}{\omega_i}$表示系统第 i 阶固有频率 ω_{r} 之比。

注意到$P_i=A_i^{\mathrm{T}}P$,则系统在广义坐标下的稳态响应为

$$\begin{aligned}x(t)&=Ay(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i y_i(t)=\sum_{i=1}^{N}A_i\frac{P_i}{K_i^{\mathrm{p}}}\frac{1}{1-\lambda_i^2}\sin\omega t\\&=\sum_{i=1}^{N}A_i\frac{A_i^{\mathrm{T}}P}{K_i^{\mathrm{p}}(1-\lambda_i^2)}\sin\omega t=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i A_i^{\mathrm{T}}}{K_i^{\mathrm{p}}(1-\lambda_i^2)}P\sin\omega t\end{aligned} \tag{3-51}$$

式(3-51)表明,当 $\omega\approx\omega_{\mathrm{r}}$,即 $\lambda_r\approx1$ 时,系统的第 r 阶主振动的幅值就表现得非常大,而其他频率的主振动的幅值则比较小,这时,系统的主要振动形态是由第 r 阶主振型决定的,称系统处于第 r 阶共振。此时,式(3-51)中的非 r 阶主振动可以忽略,系统的响应近似为:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i A_i^{\mathrm{T}}}{K_i^{\mathrm{p}}(1-\lambda_i^2)}P\sin\omega_i t\approx\frac{A_r A_r^{\mathrm{T}}}{K_r^{\mathrm{p}}(1-\lambda_r^2)}P\sin\omega_{\mathrm{r}}t \tag{3-52}$$

需要说明,直接求解和解耦法得到的系统对简谐激励的响应实际上是完全一致的,只是形式上不同。

3.4.2　动力吸振器

对于单自由度振动系统,如果受到正弦力激励,那么在激励频率的振动是不能消除的。而如果对单自由度系统再串联一个单自由度振动系统构成二自由度振动系统,如图3-13所示,则可以通过设计质量 m_2 和刚度 k_2 的参数来抑制质量 m_1 的振动。质量 m_2 和刚度 k_2 称为动力吸振器(dynamic vibration absorber),而 m_1 与 k_1 称为主振动系统,动力吸振器抑制主振动系统的振动。通过分析图3-13所示的系统受激励 $F=\begin{bmatrix}F\sin\omega t & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 时系统的响应。

系统的质量矩阵和刚度矩阵分别为

$$M=\begin{bmatrix}m_1 & \\ & m_2\end{bmatrix},K=\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}$$

系统的振动微分方程为

$$\begin{bmatrix}m_1 & \\ & m_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F\sin\omega t\\ 0\end{bmatrix} \tag{3-53}$$

系统的稳态响应的振幅为

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F}{\Delta(\omega)} \begin{bmatrix} k_2-\omega^2 m_2 \\ k_2 \end{bmatrix} \tag{3-54}$$

其中，$\Delta(\omega)$是振动系统的特征多项式

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{vmatrix} = \omega^4 m_1 m_2 - \omega^2(k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2) + k_1 k_2 \tag{3-55}$$

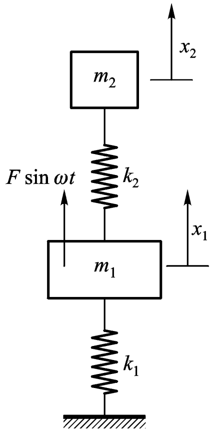


图 3-13　动力吸振结构原理示意

显然，上式当 $\omega^2=\dfrac{k_2}{m_2}$ 时，主振动系统的振动为 $x_1(t)=0$，也就是主振动系统静止；而此时吸振器的振动为 $x_2(t)=-\dfrac{F\sin\ \omega t}{k_2}$，这说明作用在主振动系统上的激励力正好被来自吸振器弹簧的弹性恢复力平衡，主振动系统不再振动，这种现象就是反共振。系统处于反共振状态时，作用在 m_1 上的激励力仅仅在 m_2 上产生响应，所以称质量 m_2 和刚度 k_2 称为动力吸振器，又因为该系统没有阻尼，它实际上是无阻尼动力吸振器。无阻尼动力吸振器参数的选取原则一般是保证吸振器的固有频率与主振动系统的固有频率相等，即

$$\sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega_0 \tag{3-56}$$

式(3-56)说明反共振时$\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{k_2}{k_1}$。记质量比 $\mu=\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{k_2}{k_1}$，频率比 $\lambda=\dfrac{\omega}{\omega_0}$，则式(3-55)可以改写为

$$\Delta(\omega) = k_1 k_2[\lambda^4-(2+\mu)\lambda^2+1] \tag{3-57}$$

令 $\Delta(\omega)=0$，则

$$\lambda_{1,2}^2 = 1+\frac{\mu}{2} \mp \sqrt{\mu+\frac{\mu^2}{4}} \tag{3-58}$$

其中：$\lambda_{1,2}$表示振动系统的固有频率 $\omega_{1,2}$ 与 ω_0 的比值。质量比 $\mu=0.2$ 时，由式得到 $\lambda_1=1.25$，$\lambda_2=0.85$，说明反共振的频率位于吸振器的固有频率两侧。

频率为零时系统的静变形为 $A_0=\dfrac{F}{k_1}$，则振幅比为

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{1-\lambda^2}{\lambda^4-(2+\mu)\lambda^2+1}$$

$$\frac{A_2}{A_0}=\frac{1}{\lambda^4-(2+\mu)\lambda^2+1}$$

图 3-14 表示了质量比 $\mu=0.2$ 时,不同频率比 λ 下振幅比$\frac{A_1}{A_0}$和振幅比$\frac{A_2}{A_0}$的值。显然,由图可以看到当 $\lambda=1$,即 $\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$时,系统出现反共振。注意到 $\lambda_1<1<\lambda_2$,说明在反共振点两侧存在两个共振峰,使动力吸振器的工作范围较窄。λ_1 与 λ_2 应该距 $\lambda=1$ 越远越好,且 λ_1 与 λ_2 相距越远越好,这样就能允许激励力的频率在 ω_0 附近有一定范围的变化。由式(3-58)说明,当 m_2 和 k_2 越大,μ 越大,则 λ_1 与 λ_2 相距越远,但是这就意味着动力吸振器变得笨重。

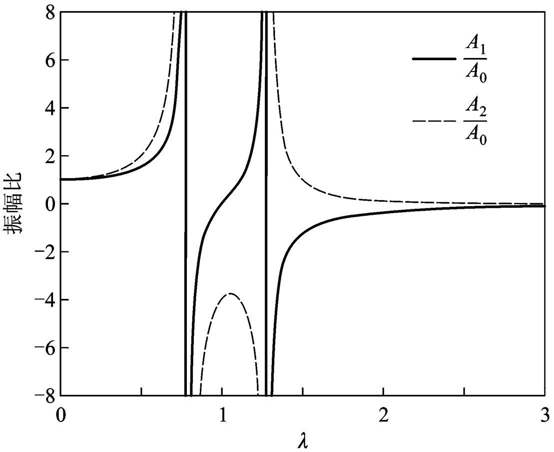


图 3-14 不同频率比下的动力吸振系统幅频响应特性

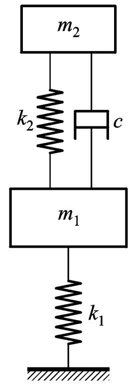


图 3-15 阻尼吸振器系统原理

为了能够使得激励频率在 $\lambda=1$ 附近有一定的变化,工程中的动力吸振器一般为有阻尼的,即在主振动系统质量和吸振器系统之间增加阻尼元件构成有阻尼动力吸振器,如图 3-15 所示。有阻尼动力吸振器不能保证在反共振点 $\lambda=1$ 处主振动系统的振幅为零,但是能够使得在反共振点两侧的两个共振峰大大减小。

3.4.3 任意激励下系统的响应

无阻尼系统对任意激励的响应包括两部分:系统对初始条件的自由振动响应和零初始条件下系统对激励的响应,分别称为瞬态响应(**transient response**)和稳态响应(**steady-state response**)。系统的响应是瞬态响应和稳态响应的叠加。

瞬态响应是由激励为零的情况下的系统的自由振动的解,是由自由振动微分方程和初始条件决定的,该问题在前面的章节中已经论述。要解决无阻尼系统对任意激励的响应主要是研究零初始条件下系统对激励的稳态响应。

可以通过坐标变化的方法,对系统进行解耦,在此基础上获得系统在各个主质量和主刚度下的对任意激励的稳态响应,然后再实施反变换,获得系统各个广义坐标下对任意激励的响应。

假设多自由度无阻尼系统在任意激励 $\boldsymbol{F}(t)$ 下的振动微分方程为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{3-59}$$

初始条件为 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$, $\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\boldsymbol{x}}_0$。

对无阻尼振动系统进行解耦后,得到系统在主坐标下的振动方程为

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{P}}\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{P} \tag{3-60}$$

其中:$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_N \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ 为主坐标下的激励力向量。根据式(3-42)确定的广义坐标 $\boldsymbol{x}(t)$ 与主坐标 $\boldsymbol{y}(t)$ 的关系,在主坐标下系统的初始条件为

$$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}_0,\ \dot{\boldsymbol{y}}(0)=\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}_0 \tag{3-61}$$

无阻尼系统对任意激励的响应就变成了由式(3-60)确定的在主坐标下的 N 个单自由度振动系统对激励 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ 的响应问题,而 N 个单自由度振动系统的初始条件由式(3-61)确定。

显然,根据单自由度系统对任意激励的相应的求解方法,可以获得系统在第 i 个主坐标下的瞬态响应(特解)$y_i^*(t)$ 和稳态响应(通解)$\bar{y}_i(t)$。系统在第 i 个主坐标下的响应为

$$y_i(t)=y_i^*(t)+\bar{y}(t) \tag{3-62}$$

写成向量表示所有主坐标下的响应为

$$\boldsymbol{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_N(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3-63}$$

由式(3-42),在广义坐标下系统的响应与振型矩阵的关系为

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) \tag{3-64}$$

上述方法首先通过获得系统对各个主振型的响应,再通过线性变换方法获得系统在广义坐标下的响应,实际上广义坐标下的响应是主坐标下的响应的叠加,所以上述方法称为振型叠加法(**mode superposition scheme**)。

3.5 有阻尼系统对任意激励的响应

对于多自由度振动系统,振型矩阵定义了物理坐标与主坐标的变换关系

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(t) \tag{3-65}$$

则在主坐标下,式(3-4)所表示的有阻尼振动系统转化为

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}\ddot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\dot{\boldsymbol{y}}(t)+\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{P}(t) \tag{3-66}$$

其中:$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}$,$\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}}$ 和 $\boldsymbol{P}(t)$ 的定义同前,而主坐标下的阻尼矩阵为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} \tag{3-67}$$

一般情况下,式(3-67)所示的变换一般不能将阻尼矩阵化为对角阵,所以不能将系统化成多个单自由度振动系统,因此不能应用振型叠加法分析有阻尼振动系统。当然,可以直接求解广义坐标下的系统振动微分方程得到系统在广义坐标下的解,但是这个计算过程较复杂。为了方便和简化对有阻尼的多自由度系统的分析,工程上将阻尼矩阵进行下列简化处理:

(1) 假设阻尼矩阵与质量矩阵和阻尼矩阵具有线性关系,即

$$\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{M}+\beta\boldsymbol{K} \tag{3-68}$$

则主质量矩阵为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\alpha\boldsymbol{M}+\beta\boldsymbol{K})\boldsymbol{A}=\alpha\,\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}+\beta\,\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}} \tag{3-69}$$

显然,此时阻尼矩阵为对角阵,则多自由度系统的振动问题转化为多个有阻尼的单自由度振动系统。显然,主坐标下系统的阻尼是质量矩阵和刚度矩阵的函数:

$$\zeta_r=\frac{C_r^{\mathrm{p}}}{2\omega_i M_r^{\mathrm{p}}}=\frac{\alpha \mathrm{M}_r^{\mathrm{p}}+\beta K^{\mathrm{p}}}{2\omega_i M_r^{\mathrm{p}}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_i}+\beta\omega_i\right) \tag{3-70}$$

(2) 忽略阻尼矩阵中的非对角线元素,即将通过式(3-67)计算得到的阻尼矩阵直接写成

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}=\begin{bmatrix} C_1^{\mathrm{p}} & & & \\ & C_2^{\mathrm{p}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_N^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \tag{3-71}$$

其中:C_r^{p} 为第 r 阶振型阻尼。则式(3-66)所示的振动系统在主坐标下不存在耦合。系统的振动问题转化为 N 个有阻尼单自由度系统的振动。这时,第 r 阶主振动为

$$\boldsymbol{M}_r^{\mathrm{p}}\ddot{y}(t)+\boldsymbol{C}_r^{\mathrm{p}}\dot{y}(t)+\boldsymbol{K}_r^{\mathrm{p}}y(t)=\boldsymbol{P}_r(t) \tag{3-72}$$

令$\dfrac{C_r^{\mathrm{p}}}{M_r^{\mathrm{p}}}=2\zeta_r\omega_i$,则式(3-72)可以化为

$$\ddot{y}_r(t)+2\zeta_r\omega_r\dot{y}_r(t)+\omega_r^2 y_r(t)=\frac{P_r(t)}{M_r^{\mathrm{p}}} \tag{3-73}$$

其中:ζ_r 称为第 r 阶振型阻尼比。

(3) 由实验确定振型阻尼比。系统在某一主振型下振动时,各个主质量的振动幅值不同,但规律是一样的,所以主质量在主振动下的阻尼比就是该主振型

下的阻尼比,也就是振型阻尼比。所以,可以分别测定系统在各阶主振型下的振型阻尼比。需要注意的是,该方法主要适用于系统的各阶阻尼比小于 0.2 的情况。

通过以上处理方法可以获得主坐标下的阻尼比,则通过式(3-65)确定的广义坐标到主坐标的坐标变换,系统在主坐标下的振动微分方程可以化成 N 个有阻尼单自由度振动微分方程:

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{p}}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}^{\mathrm{p}}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}^{\mathrm{p}}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{P}(t) \tag{3-74}$$

主坐标下的初始条件也是由式(3-65)确定,即如果广义坐标下系统的初始条件为 $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$, $\dot{\boldsymbol{x}}(0)=\dot{\boldsymbol{x}}_0$,则在主坐标下的初始条件为

$$\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}_0,\ \dot{\boldsymbol{y}}(0)=\boldsymbol{A}^{-1}\dot{\boldsymbol{y}}_0$$

通过以上变换将有阻尼的多自由度振动问题转化为多个单自由度振动,然后求解单自由度振动系统的解,再通过由式(3-65)给定的线性变换可以得到系统在物理坐标系下的响应。

思考题与习题

3.1 总结本章,与单自由度系统的振动比较,多自由度系统的振动分析中引入了哪些新的概念?这些概念是不是都与系统的自由度大于 1 有关?

3.2 通过影响系数法说明为什么质量矩阵、刚度矩阵和黏性阻尼矩阵一般是对称阵。

3.3 假设系统存在一个刚体自由度。请问如何确定与刚体自由度对应的主振型?这个主振型是不是与其他主振型正交?

3.4 假设系统存在一个刚体自由度。请问这时系统的质量矩阵是不是正定的?刚度矩阵是不是正定的?结合矩阵正定的数学意义说明。

3.5 验证例 3.4 中振动系统的主振型的正交性。

3.6 多自由度系统的自由振动响应、稳态响应和多自由度系统对激励的响应有什么关系?

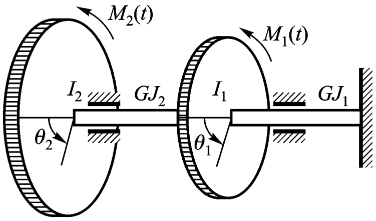
3.7 对动力吸振器,为什么工程中一定是有阻尼的?有阻尼的动力吸振器是不是能完全将振动消除?

3.8 对于有阻尼振动系统中的阻尼,常常进行多种近似或者简化处理,这种简化处理的目的是什么?近似或者简化对系统的解有什么影响?

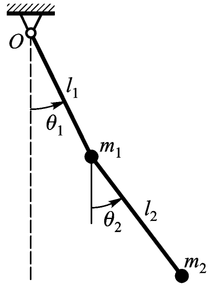
3.9 如题 3.9 图所示,两个转动惯量分别为 I_1 和 I_2 的圆盘安装在扭转刚度分别为 GJ_1 和 GJ_2 的不计质量的圆杆上,受到的作用力分别为 $M_1(t)$ 和 $M_2(t)$。取逆时针方向的转角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标。试求出圆盘转动的微分方程。

3.10 考虑如题 3.10 图所示的双摆系统在平衡位置附近做微振动,摆锤的质量分别为 m_1 和 m_2,摆臂的长度分别为 l_1 和 l_2。取逆时针方向的转角 θ_1 和 θ_2 为广义坐标。试求出系

统的振动微分方程。



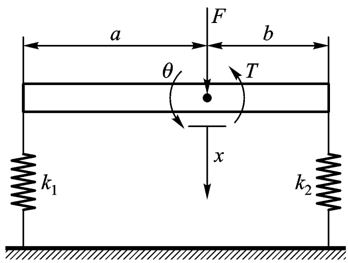
题 3.9 图



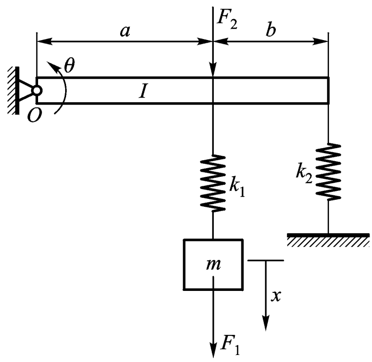
题 3.10 图

3.11　根据牛顿第二运动定律建立如题 3.11 图所示的横梁的自由振动微分方程。横梁的前后两端通过刚度为 k_1 和 k_2 的弹簧与基础相连,横梁的质心到前后端的距离分别为 a、b,质量为 m,绕质心的转动惯量为 I,取质心在垂直方向的位移 x 和质心的转动 θ 作为广义坐标。

3.12　根据牛顿第二运动定律建立如题 3.12 图所示的系统的振动微分方程。系统受到的作用力和系统的结构参数如图 3.12 题所示。取 θ 和 x 作为广义坐标。



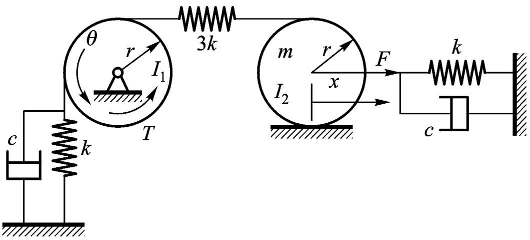
题 3.11 图



题 3.12 图

3.13　题 3.13 图所示振动系统,两个圆盘的质量均为 m,绕圆心的转动惯量分别为 I_1 和 I_2,半径均为 r,圆盘与地面之间没有相对滑动。圆盘通过刚度为 k 的弹簧和阻尼系数为 c 的阻尼与基础连接,两个圆盘之间通过一个刚度为 $3k$ 的弹簧连接。用牛顿力学法建立系统的振动微分方程,用 θ 和 x 作为广义坐标。

3.14　用影响系数法建立题 3.9 图所示系统的质量矩阵和刚度矩阵,并写出系统的振动微分方程。



题 3.13 图

3.15 用影响系数法建立题 3.11 图所示系统的质量矩阵和刚度矩阵,并写出系统的振动微分方程。

3.16 用拉格朗日方程建立题 3.10 图所示系统的振动微分方程。

3.17 用拉格朗日方程建立题 3.12 图所示系统的振动微分方程。

3.18 用拉格朗日方程建立题 3.13 图所示系统的振动微分方程。

3.19 假设系统的质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 如下,求系统的固有频率和主阵型,并求主质量矩阵和主刚度矩阵。

(1) $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}40 & -30\\ -30 & 80\end{bmatrix}$

(2) $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}6 & -5\\ -5 & 10\end{bmatrix}\times 10^5$

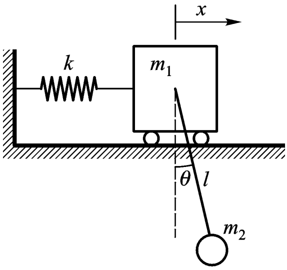
(3) $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\times 10^2$

3.20 对题 3.9 图所示系统,初始条件为$\theta_0=\begin{bmatrix}\theta_1(0)\\ \theta_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$, $\dot{\theta}_0=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1(0)\\ \dot{\theta}_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$,求系统的自由振动响应。

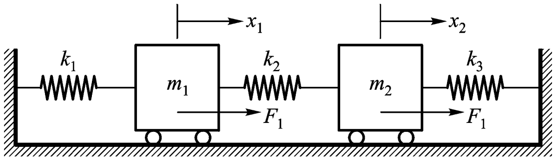
3.21 对题 3.9 图所示系统,系统受到的激励为:$\boldsymbol{M}(t)=\begin{bmatrix}M_1(t)\\ M_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_1\sin\omega t\\ 0\end{bmatrix}$,初始条件为 0,求系统的响应。

3.22 如题 3.22 图所示小车和摆组成的振动系统,小车和摆的质量分别为 m_1 和 m_2,弹簧的刚度系数为 k,摆长为 l。用小车在水平方向的位移 x 和摆角 θ 为广义坐标,建立系统的振动微分方程,求系统的固有频率,并求在初始条件为零的条件下,摆受到一个 x 方向的单位冲量后系统的运动规律。

3.23 系统如题 3.23 图所示,已知 $m_1=m_2=m$,$k_1=k_3=k$,$k_2=4k$,在质量 m_1 上作用的激励力为 $F_1=F\sin\omega t$,在质量 m_2 上作用的激励力为 $F_2=0$,求系统的稳态响应。

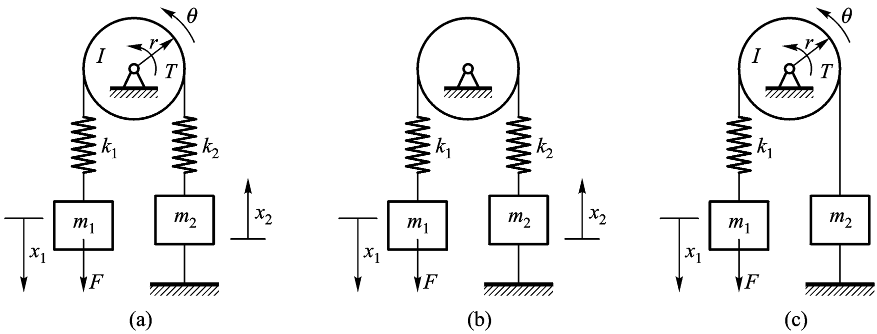


题3.22图



题3.23图

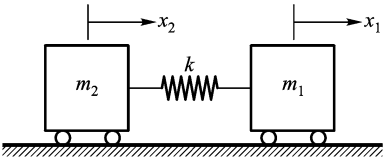
3.24 如题3.24图a所示的振动系统，质量m_1和m_2的广义坐标分别为x_1和x_2，半径为r的圆盘的转动惯量为I，广义坐标为θ，列出当m_2下面与基础连接的绳子突然断掉后系统的振动微分方程。又如题3.24图b所示，忽略圆盘的转动惯量，再求当m_2下面与基础连接的绳子突然断掉后系统的振动微分方程，并求系统的响应。又如题3.24图c所示，圆盘和质量m_2刚性连接，再求当m_2下面与基础连接的绳子突然断掉后系统的振动微分方程。



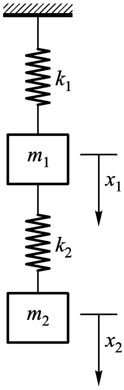
题3.24图

3.25 汽车与拖车可以简化成如题3.25图所示的振动模型。汽车的质量$m_1=3m$，拖车的质量$m_2=2m$，汽车与拖车之间通过刚度为k的弹簧连接，列出系统的振动微分方程，并求固有频率和主振型。如果在系统静止的情况下，拖车受到冲量$I=mv$的冲击，求系统的稳态响应。

3.26 考虑题3.26图所示无阻尼动力吸振器系统的模型。已知吸振器的质量$m_2=m$，刚度$k_2=k$。机械系统的质量$m_1=4m$，刚度$k_1=4k$，求系统的固有频率和主振型。该系统能抑制机械系统哪个频率的振动？



题 3.25 图



题 3.26 图