

第 3 章

计算机控制系统分析

对一个动态系统的分析一般包括稳定性与动态特性分析。在连续系统中常常使用时间响应(时间域)、频率特性(频率域)、零极点(复数域)和稳态误差等方法,可以获得系统的动静态性能指标。本章在第 2 章讨论过的系统数学描述方法的基础上,从时域特性和频域特性来分析离散系统的稳定性、稳态特性和动态响应特性的描述方法和计算手段。要注意的是,虽然分析方法有相同之处,但结论有很大不同。同时,离散系统的特性往往与采样周期有关,要注意采样周期对这些性能的影响。

本章提要

本章 3.1 节进行离散系统稳定性分析。首先研究 s 平面与 z 平面之间的映射关系,建立两个复变量 s 与 z 的内在联系。接着讨论离散系统稳定性的充要条件,重点讨论为保证系统稳定性,临界增益的求取方法以及采样周期对系统稳定性的影响。3.2 节讨论离散系统稳态误差,表明离散系统稳态误差的概念和计算方法与连续系统类似,并进一步讨论了离散系统稳态误差与采样周期的关系。3.3 节讨论离散系统的时间响应特性描述方法,重点讨论 z 平面极点类型、位置与系统动态响应形状的关系。3.4 节重点说明频域内稳定裕度的概念和测试的方法。最后 3.5 节以天线计算机控制系统为例,进行了系统稳定性、稳态误差及频域特性分析。

3.1 稳定性分析

任何系统在扰动作用下,都会偏离原来的平衡工作状态。所谓系统稳定是指当扰动作用消失以后,系统能够恢复原平衡状态的性能。若系统能恢复原平衡状态,称系统是稳定的;若系统在扰动作用消失以后,不能恢复平衡状态,称系统是不稳定的。一个线性系统的稳定性是系统的固有特性,它与扰动的形式无关,而只取决于系统本身的结构及参数。

3.1.1 s 平面和 z 平面之间的映射

1. 点的映射

复变量 z 和 s 之间的关系为

$$z = e^{sT} \quad \text{或} \quad s = \frac{1}{T} \ln z \quad (3-1)$$

代入 $s = \sigma \pm j\omega$, 则

$$z = e^{(\sigma \pm j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{\pm j\omega T} = e^{\sigma T} \angle \pm \omega T$$

由于 $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j\sin \omega T$, 是 2π 的周期函数, 所以上式又可写为

$$z = e^{(\sigma \pm j\omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{\pm j\omega T} = e^{\sigma T} \cdot e^{\pm j(\omega T + 2k\pi)} = e^{\sigma T} \angle \pm \omega T + 2k\pi$$

这样, 复变量 z 的模 R 及相角 θ 与复变量 s 的实部和虚部的关系为

$$\begin{cases} R = |z| = e^{\sigma T} \\ \theta = \angle z = \pm \omega T + 2k\pi \end{cases} \quad (3-2)$$

式(3-2)即是 s 平面与 z 平面上一个点的基本对应关系。具体映射关系如图 3-1 所示。

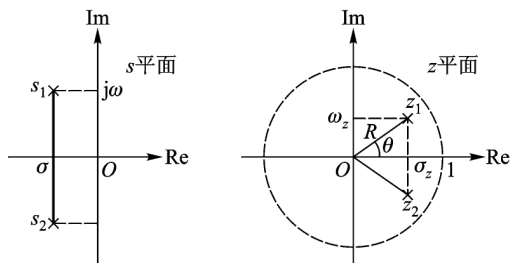


图 3-1 s 平面与 z 平面的映射

图 3-1 表明, 在 s 平面上的点映射到 z 平面上, 可以用模 R 及相角 θ 来表示, 同时也可以表示为复数 z 的实部和虚部: $\sigma_z = R \cos \theta$, $\omega_z = R \sin \theta$ 。从式(3-2)还可知道, s 平面的点映射到 z 平面上, 其模值是唯一的, 而相角不唯一; 换句话说就是 z 平面上的一个点可能对应着 s 平面的多个点, 这些点具有同样的实部, 虚部相差 $2k\pi$ 。

例 3-1 如图 3-2 所示, 在 s 平面上有 3 个点, 分别为 $s_1 = -1$, $s_{2,3} = -1 \pm j10$, 若 $\omega_s = 10$, 试求它们映射在 z 平面上的点。

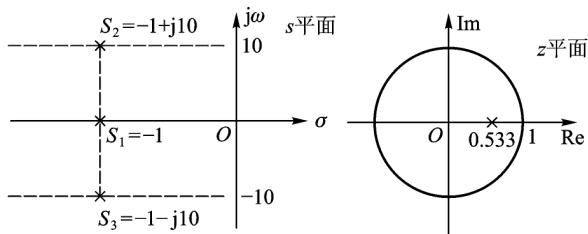


图 3-2 例 3-1 的映射关系

解: 按式(3-1), 得

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{s_1 T} = e^{-1 \times 2\pi / \omega_s} = e^{-1 \times 2\pi / 10} = 0.533 \angle 0 \\ z_2 &= e^{s_2 T} = e^{(-1 + j10) 2\pi / 10} = 0.533 \angle 2\pi \\ z_3 &= e^{s_3 T} = e^{(-1 - j10) 2\pi / 10} = 0.533 \angle -2\pi \end{aligned}$$

由结果可知, s 平面的 3 个点映射到 z 平面上时均位于一点, 说明按 $z = e^{sT}$ 映射时, z 平面上某一个点并不是唯一地对应 s 平面上的 1 个点, 而是对应 s 平面上实部相同虚部相差 ω_s 整数倍的所有点。但 s 平面上的 1 个点, 只对应 z 平面上唯一的一个点。可见, 采样信号在 z 平面表示, 消

除了在 s 平面表示时的周期性。

2. s 平面虚轴的映射

s 平面整个虚轴映射为 z 平面单位圆, s 左半平面任一点映射在 z 平面单位圆内, 右半平面任一点映射在单位圆外, 如表 3-1 所示。

表 3-1 s 平面与 z 平面关系

$s = \sigma + j\omega$			$z = R \angle \theta$		
几何位置	σ	ω	几何位置	$R = e^{\sigma T}$	$\theta = \omega T$
虚轴	$= 0$	任意值	单位圆周	$= 1$	任意值
左半平面	< 0	任意值	单位圆内	< 1	任意值
右半平面	> 0	任意值	单位圆外	> 1	任意值

3. s 平面角频率 ω 与 z 平面相角的关系

s 平面一个点的角频率 ω 与 z 平面对应的相角关系为

$$\theta = \omega T + 2k\pi = (\omega + k \frac{2\pi}{T}) T = (\omega + k\omega_s) T$$

上式表明, s 平面上频率相差采样频率整数倍的所有点, 映射到 z 平面上同一点。也就是当 s 平面的点沿虚轴 $\omega = -\infty$ 变化到 $+\infty$, z 平面的相角也从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时, 每当 ω 变化一个 ω_s 时, z 平面相角 θ 变化 2π , 即转了一周。因此, 若 ω 在 s 平面虚轴上从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$ 时, z 平面上相角将转无穷多圈, 见表 3-2。

表 3-2 角频率 ω 与 z 平面相角关系

ω	$-\infty$...	$-2\omega_s$	$-\omega_s$	$-\omega_s/2$	0	$\omega_s/2$	ω_s	$2\omega_s$...	$+\infty$
θ	$-\infty$...	-4π	-2π	$-\pi$	0	π	2π	4π	...	$+\infty$

4. s 平面上的主带与旁带的映射

从上述角频率 ω 与 z 平面相角关系的分析中可见, 当 ω 从 $-j\omega_s/2 \rightarrow j\omega_s/2$ (σ 可任意取值) 时, 相角从 $-\pi$ 变化为 π , 相角逆时针转过一圈。如 ω 从 $j\omega_s/2 \rightarrow j3\omega_s/2$ 时, 相角逆时针又转过一圈。由此可见, s 平面上被分成了许多平行带子, 其宽度为 ω_s 。其中 $-\omega_s/2 \leq \omega \leq \omega_s/2$ 的带子 (σ 任意变化) 称为主带, 其余部分均称为旁带。由于 z 平面的相角每隔一个 ω_s 转 1 周, 结果主带映射为整个 z 平面, 而其余每一个旁带也都重叠映射在整个 z 平面上, 如图 3-3 和图 3-4 所示。

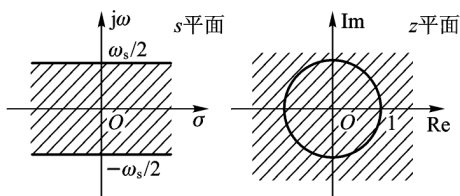


图 3-3 主带映射

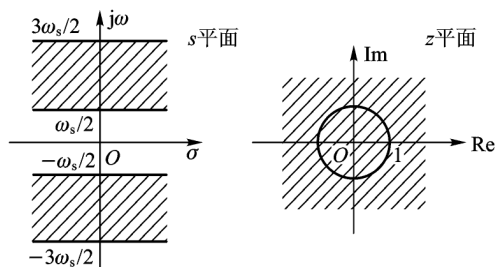


图 3-4 旁带映射

当 s 平面的点沿主带左半平面的周边走 1 圈时,其映射关系可用图 3-5 表示。 s 平面的点沿旁带左半平面的周边走 1 圈时,其映射关系也可用图 3-5 表示。

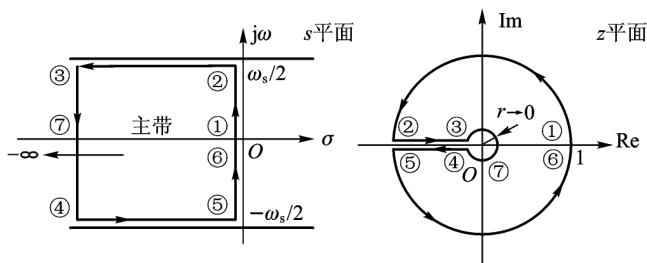


图 3-5 s 平面主带左半平面的映射

当 s 平面的点沿主带右半平面的周边走 1 圈时,其映射关系可用图 3-6 表示。类似地, s 平面的点沿旁带右半平面的周边走 1 圈时,其映射关系也可用图 3-6 表示。

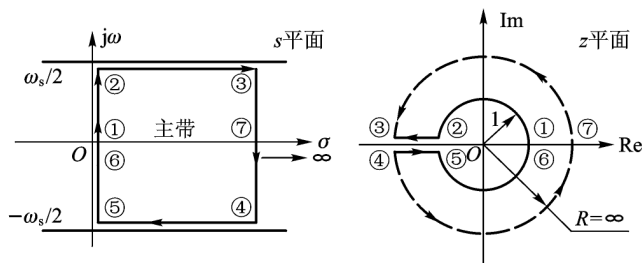


图 3-6 s 平面主带右半平面的映射

5. s 平面上等值线在 z 平面的映射

(1) 实轴平行线(即等频率线)的映射

依据式(3-2) $\theta = \omega T + 2k\pi$, s 平面上 $\omega = \omega_A$ 的等频率线映射到 z 平面是从原点出发的 z 平面上辐角为 $T\omega_A$ 的射线,如图 3-7 所示。因为 $\pm\omega_s T/2 = \pm\pi$,所以 s 平面上 $\omega = \pm n\omega_s/2$, ($n = 1, 3, 5, \dots$) 的等频率线,映射为 z 平面上的负实轴。 s 平面上 $\omega = \pm n\omega_s$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 的等频率线,映射为 z 平面上的正实轴。

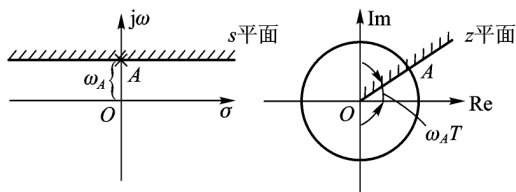


图 3-7 等频率线的映射

(2) 虚轴平行线(即等衰减率线)的映射

s 平面上 $\sigma = \sigma_A$ 的虚轴平行线, 映射到 z 平面是以原点为圆心, 半径 $R = e^{\sigma_A T}$ 的同心圆, 如图 3-8 所示。

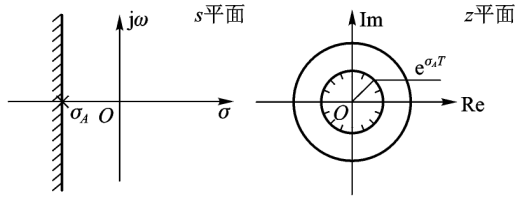


图 3-8 等衰减率线的映射

(3) 等阻尼比轨迹的映射

设 s 平面上有一对共轭复极点, 它是二阶振荡系统特征方程 $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 的根

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \quad (3-3)$$

式中, ξ 为阻尼比; ω_n 为无阻尼自然振荡频率; ω_d 为阻尼自然频率。图 3-9(a) 表示了特征根与 σ 、 ξ 、 ω_n 和阻尼振荡频率 ω_d 之间的几何关系。从图中可见

$$\cos \beta = \xi \quad (3-4)$$

式(3-4)表示, s 平面等阻尼比 ξ 的轨迹是从原点出发的射线。在该射线上, 特征根的实部可用其虚部 ω 来表示, 即

$$s = \sigma + j\omega = -\omega \cot \beta + j\omega$$

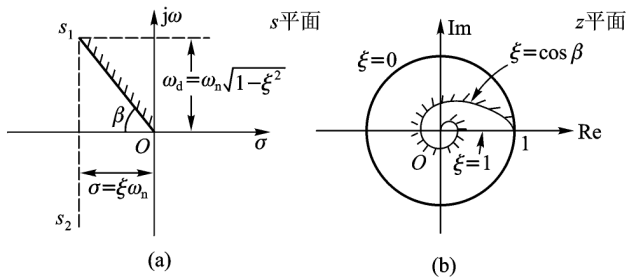


图 3-9 阻尼比线及其映射

将上式映射至 z 平面得

$$|z| = e^{\sigma T} = e^{-\omega T \cot \beta}$$

$$\angle z = \theta = \omega T$$

由以上两式可见, β (即阻尼比 ξ) 为常值的轨迹, 映射至 z 平面, 其模随 ω 增加按指数衰减, 其相角随 ω 线性增长, 构成一条对数螺旋线, 如图 3-9(b) 所示。图中对数螺旋线是对应 $0 \leq \omega \leq \omega_n/2$ 的映射。若 $-\omega_n/2 \leq \omega \leq 0$, z 平面的对数螺旋线是上述曲线相对水平轴的镜像。

当 $\beta = 90^\circ$, 即 $\xi = 0$, 这是 s 平面正虚轴, 按照前面讨论的映射结果, 螺旋线演化为单位圆上

半周。

当 $\beta=0$, 即 $\xi=1$, 这是 s 平面负实轴, 它映射为 z 平面单位圆内正实轴。

当 s 值位于 s 平面的右半平面 (即负阻尼) 时, 在 z 平面所映射的对数螺旋线伸展到单位圆之外。

(4) 等自然频率轨迹的映射

在 s 平面, 自然频率相同的轨迹是圆心位于原点的同心圆, 其半径为无阻尼自然频率 ω_n 。显然它与等阻尼比轨迹是正交的, 如图 3-10(a) 所示。在 z 平面, 等自然频率轨迹与等阻尼比轨迹也是正交的。具体轨迹的数学描述如下:

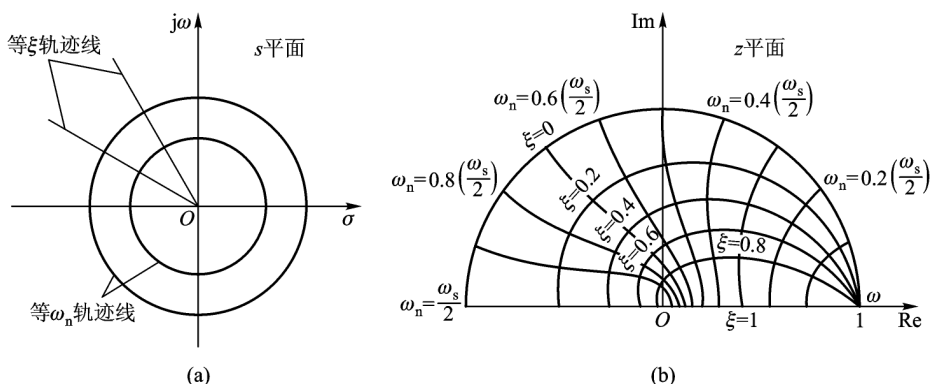


图 3-10 等自然频率轨迹映射

在 s 平面, 由于 s 的实部虚部满足 $\sigma^2 + \omega^2 = \omega_n^2$, 所以

$$s = \sigma \pm j\omega = \omega_n e^{j\varphi} = \omega_n \sin \varphi \pm j\omega_n \cos \varphi, \varphi = \operatorname{arccot}(\sigma/\omega)$$

在 z 平面

$$z = e^{sT} = e^{T\omega_n \cos \varphi} e^{\pm jT\omega_n \sin \varphi}$$

所以

$$R = e^{T\omega_n \cos \varphi}, \angle z = T\omega_n \sin \varphi$$

依据该式, ω 变化时, φ 角变化, 因此, z 平面映射点的模值 R 及相角也变化, 从而形成一条轨迹, 该轨迹线与 z 平面上的等阻尼比曲线正交, 如图 3-10(b) 所示。

3.1.2 离散系统的稳定条件

连续系统稳定与否取决于闭环系统的特征根在 s 平面上的位置。若特征根全在 s 左半平面, 则系统稳定, 只要有一个根在 s 平面的右半平面, 则系统不稳定。如果有特征根在虚轴上, 称为临界稳定, 其响应虽然不会发散, 但也不会依据需要收敛, 因此, 系统也是不稳定的。离散系统稳定的概念与连续系统相同。

根据 s 平面和 z 平面的映射关系, 离散系统稳定的充要条件必然是, 系统的特征根全部位于 z 平面的单位圆中, 只要有一个根在单位圆外或圆上, 系统就不稳定。

以上充要条件还可以从数学上作一简单推导。

离散系统的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n} \quad (3-5)$$

若系统输入为 δ 函数(代表瞬时扰动), $R(z) = 1$, 系统输出为

$$C(z) = G(z)R(z) = \frac{\sum_{i=1}^m b_i z^{m-1}}{\sum_{i=1}^n a_i z^{n-1}} \quad (3-6)$$

假如该脉冲传递函数有 n 个相异的极点 p_i , 对式(3-6)作部分分式分解, 有

$$C(z) = \frac{A_1 z}{z-p_1} + \frac{A_2 z}{z-p_2} + \cdots + \frac{A_n z}{z-p_n} \quad (3-7)$$

反变换后得

$$c(k) = A_1 p_1^k + A_2 p_2^k + \cdots + A_n p_n^k = \sum_{i=1}^n A_i p_i^k \quad (3-8)$$

根据系统稳定性定义, 如果系统的 δ 函数响应 $c(k)$, 在 $k \rightarrow \infty$ 时衰减为零, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A_i p_i^k = 0 \quad (3-9)$$

则离散系统是稳定的。为此, 要求式(3-8)每一个分量都要衰减为零, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_i p_i^k = 0 \quad (3-10)$$

由于 $A_i \neq 0$, 为此要求每一特征根的模值应小于 1, 即位于单位圆中

$$|p_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-11)$$

上述结论对 $G(z)$ 中有重根时也成立。

3.1.3 离散系统稳定性检测

1. 直接求取特征方程根

为了检验系统的稳定性, 最直接的办法就是求出它的全部特征根。目前, 求取特征根有许多可用的计算机软件, 其中 MATLAB 软件中求取多项式及矩阵特征根的命令都可使用。

例 3-2 已知系统特征方程为

$$\Delta(z) = z^4 - 1.2z^3 + 0.07z^2 + 0.3z - 0.08 = 0$$

试判断该系统的稳定性。

解: 利用 MATLAB 软件中相关指令, 很容易求得特征根, 直接判断系统的稳定性。

```
c = [1 -1.2 0.07 0.3 -0.08]; % 设置特征多项式系数数组
```

```
r = roots(c) % 求多项式的特征值
```

运行结果为:

```
r = -0.5000
```

```
0.8000
```

```
0.5000
```

```
0.4000
```

可知 4 个特征根模值均小于 1, 位于单位圆中, 系统稳定。

例 3-3 已知系统状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.3 & -0.4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

试判断该系统的稳定性。

解:该系统的稳定性取决于下述特征方程的特征根

$$(zI-F) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.3 & -0.4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

利用 MATLAB 软件中相关指令,很容易求得它的特征根:

$$F = [-1.3000 \quad -0.4000$$

$$1.0000 \quad 0] \quad \% \text{定义状态转移矩阵}$$

$$\text{eig}(F) \quad \% \text{求矩阵的特征根}$$

运行结果为:

$$\text{ans} =$$

$$-0.8000$$

$$-0.5000$$

可知 2 个特征根模值均小于 1,位于单位圆中,系统稳定。

直接求取特征方程根的方法不仅判断了系统稳定性,而且还可知特征根的具体特性,如进一步得出特征值的实部虚部、阻尼比和自然振荡频率等参数,有利于系统分析和设计。但缺点是难以分析系统参数的影响。

和连续系统一样,判断离散系统稳定性有时不必求出特征根的具体数值,而只要了解特征根的位置就可以了。在连续域,是利用特征方程的系数来判定特征根实部的符号,而在离散域,则应利用特征方程的系数来判定特征根模值的大小。所以,连续系统稳定性代数判据不能用于离散系统中。

2. 朱利代数稳定判据

连续系统的稳定性可用劳斯判据判断,离散系统的稳定性则可用朱利判据来判断。

朱利判据是一个判断特征根的模值是否小于 1 的判据。设离散系统的特征方程为

$$\Delta(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (3-12)$$

与构造劳斯表的方法类似,利用特征多项式的各项系数,依据一定的关系构成朱利表。

若定义 $a_0 = a_0^n, a_1 = a_1^n, \cdots, a_n = a_n^n$, 构成如下:

$$\begin{array}{ccc} a_0^n & a_1^n \cdots a_{n-1}^n & a_n^n \\ -) & a_n^n & a_{n-1}^n \cdots a_1^n & a_0^n & \times \alpha_n = \frac{a_n}{a_0} \\ \hline a_0^{n-1} & a_1^{n-1} \cdots a_{n-1}^{n-1} & & & \\ a_{n-1}^{n-1} & a_{n-2}^{n-1} \cdots a_0^{n-1} & & & \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0^{n-1}} \\ \hline \vdots & & & & \\ a_0^0 & & & & \end{array}$$

注意,其中偶数行各元素为奇数行各元素的倒排,奇数排各元素为

$$a_i^{k-1} = a_i^k - \alpha_i a_{k-i}^k; \alpha_k = a_k / a_0; \text{或 } a_i^{k-1} = \frac{a_i^k a_0 - a_k a_{k-i}^k}{a_0^k}$$

式中纵向变化序列号为 $k=n, n-1, \dots, 1$; 横向变化序列号为 $i=0, 1, \dots, k-1$ 。

朱利判据:如果 $a_0 > 0$, 当且仅当全部 $a_k, k=n-1, \dots, 1, 0$ 都是正数时, 方程式(3-12)的根全部位于单位圆内。如果没有一个 $a_0 = 0$, 那么 a_0^k 为负数的个数就等于位于单位圆外根的个数。

朱利判据利用 MATLAB 程序很容易实现。下面给出朱利判据的 MATLAB 计算程序并以一个四阶系统为例说明。读者可以利用这个程序, 检验系统的稳定性。

```
% 朱利判据
```

```
clear
```

```
% r=[0.1 0.5 0.8 0.3]; % 给定全部稳定的特征值,结果参数应当全部大于0
```

```
r=[1.1 1.5 0.8 0.3]; % 给定单位圆外的特征值,结果中应当有与不稳定特
```

征值数目相同的负参数

```
%% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %% %%
```

```
a=poly(r); % 生成特征多项式系数数组
```

```
n=length(a); % 求数组维数
```

```
b=a;c(1)=a(1);
```

```
for i=1:n-1
```

```
    p=b(1:n-i+1); % 取 n-1 维不为 0 数组
```

```
    if abs(p(1))<10^(-10) break
```

```
    else an=p(n-i+1)/p(1); % 计算朱利判据第一行系数
```

```
end
```

```
pp=fliplr(p); % 翻转数组
```

```
b=p-pp*an; % 计算第二行及与第一行之差
```

```
c(i+1)=b(1); % 取第一个数
```

```
end
```

```
c % 给出朱利判据系数
```

例如上例给定四个特征值为 1.1、1.5、0.8、0.3, 有两个特征值在单位圆外, 系统不稳定。运行程序后, 给出的系数系列结果为:

```
c =
```

```
1.0000 0.8432 -0.2815 0.0147 -0.0005
```

该系数系列中第一个系数是 1, 这是由于朱利判据的系数系列是首一的, 有两个小于 0 的参数, 表明系统有两个不稳定特征值, 与给定的数据和结果一致。

上面的程序为了验证方法给出了特征值, 实际运行该程序时输入量应当是特征多项式系数,

$$\Delta(z) = z^2 - (1.818 - 0.2002k)z + (0.818 - 0.182k) = 0$$

根据二阶系统稳定条件,有

$$(1) \Delta(0) = |0.818 - 0.182k| < 1, \text{ 根据此要求, 有}$$

$$\textcircled{1} \quad 0.818 - 0.182k < 1$$

所以, $k > -1$, 因为放大系数不为负数, 故要求 $k > 0$ 。

$$\textcircled{2} \quad 0.818 - 0.182k > -1$$

$$k < 1.818/0.182 = 9.98$$

$$(2) \Delta(1) = 1 - (1.818 - 0.2002k) + (0.818 - 0.182k) > 0, \text{ 要求 } k > 0。$$

$$(3) \Delta(-1) = 1 + (1.818 - 0.2002k) + (0.818 - 0.182k) > 0, \text{ 要求 } k < 9.51。$$

为保证系统稳定, 要求

$$0 < k < 9.51$$

3.1.4 采样周期与系统稳定性

与连续系统不同, 在采样系统里, 采样周期是系统的一个重要参数, 它的大小影响特征方程的系数, 从而对闭环系统的稳定性有明显的影响。

例 3-5 已知连续系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{k}{0.1s+1}$, 试讨论离散化时采样周期 T 对闭环系统稳定性的影响。

解: 众所周知, 对于连续系统来说, 选择 $k > 0$ 就可使系统稳定。

采样系统的开环传递函数为

$$G(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{k}{s(0.1s+1)} \right] = \frac{k(1-e^{-10T})}{z-e^{-10T}}$$

系统的特征方程为

$$\Delta(z) = z + k(1-e^{-10T}) - e^{-10T} = 0$$

为使系统稳定, 要求特征根位于单位圆内, 即

$$|(1-e^{-10T})k - e^{-10T}| < 1$$

亦即

$$-1 < [(1-e^{-10T})k - e^{-10T}] < 1$$

根据 $[(1-e^{-10T})k - e^{-10T}] < 1$, 可得 $k < (1+e^{-10T})/(1-e^{-10T})$; 根据 $[(1-e^{-10T})k - e^{-10T}] > -1$, 可得 $k > -1$ 。

取 $T=1$, 则 $-1 < k < 1$; 取 $T=0.1$, 则 $-1 < k < 2.165$; 取 $T=0.01$, 则 $-1 < k < 20$ 。

可见, 当采样周期减小时, 使系统稳定的 k 值范围将增大, 反之则减小。

当 k 取值一定时, 过大的采样周期 T 将使系统变得不稳定。如 $k=2$ 时, 系统的特征方程为

$$\Delta(z) = z + 2(1-e^{-10T}) - e^{-10T} = z + 2 - 3e^{-10T} = 0$$

为使系统稳定, 要求

$$|2 - 3e^{-10T}| < 1$$

即

$$-1 < (2 - 3e^{-10T}) < 1$$

由 $(2-3e^{-10T}) < 1$, 得 $T < 0.109836$; 由 $(2-3e^{-10T}) > -1$, 得 $T > 0$ (这是必然的)。

可见, 当 $k=2$ 时, 采样周期 T 必须小于 0.10986 , 系统才能稳定。

从本例题可得出如下结论:

① 离散系统的稳定性比连续系统差。如对开环传递函数为 $G(s) = \frac{k}{0.1s+1}$ 的连续系统来说, 该系统在 $k>0$ 下均是稳定的, 而离散后, k 必须限制在一定范围内才能稳定。

② 采样周期 T 也是影响稳定性的重要参数, 一般来说, T 减小, 稳定性增强。

3.2 稳态误差分析

系统的稳态误差描述了系统的静态特性, 在研究控制系统的跟踪特性时是一个重要的指标, 依据稳态误差分析的结果, 可以改善控制器的结构, 从而得到更好的稳态特性。和连续系统一样, 离散系统的稳态误差一方面与系统本身的结构和参数有关, 另一方面与外作用特性有关。连续系统的稳态误差可用拉普拉斯变换中的终值定理求得, 并用误差系数表示, 离散系统也采用类似的方法进行分析和计算。

3.2.1 离散系统稳态误差的定义

连续系统的误差信号定义为单位反馈系统指令输入与系统输出信号的差值, 即

$$e(t) = r(t) - c(t)$$

稳态误差定义为上述误差的终值, 即

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$$

类似地, 离散系统的误差信号是指采样时刻的输入与输出信号的差值

$$e^*(t) = r^*(t) - c^*(t)$$

稳态误差也定义为

$$e_{ss}^* = \lim_{t \rightarrow \infty} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) \quad (3-13)$$

若系统为非单位反馈系统, 如图 3-12 所示, 则稳态误差定义为综合点处的误差

$$e^*(t) = r^*(t) - b^*(t)$$

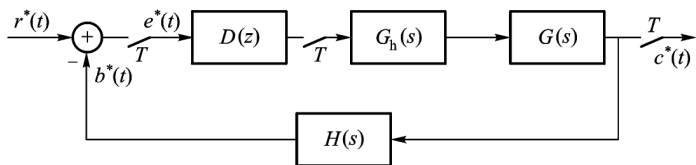


图 3-12 非单位反馈系统稳态误差定义

本节主要讨论单位负反馈系统的稳态误差。

3.2.2 离散系统稳态误差的计算

在连续系统中,常按系统的开环传递函数中所含积分环节的个数 ν 来分类,当 $\nu=0,1,2,\dots$ 时,分别称为 0 型、I 型、II 型、…系统。按照 s 域和 z 域的映射关系,积分环节 s 域极点 $s=0$,映射至 z 域,极点为 $z=e^{sT}=1$ 。因此,离散系统若已写成脉冲传递函数形式,则按其开环脉冲传递函数在 $z=1$ 处的极点数 ν 来分类,同样, $\nu=0,1,2,\dots$ 时,称为 0 型、I 型、II 型、…系统。

1. 指令信号 $r(k)$ 作用下的稳态误差计算

首先研究只有指令信号 $r(k)$ 作用下的单位反馈系统,如图 3-13 所示。应当说明,当所有环节均用脉冲传递函数描述时,系统结构图中不必再画出采样开关,因为根据定义,脉冲传递函数两端必定都是采样信号。由该图可求得闭环系统的误差传递函数

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+D(z)G(z)} \quad (3-14)$$

所以

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = \frac{1}{1+D(z)G(z)}R(z)$$

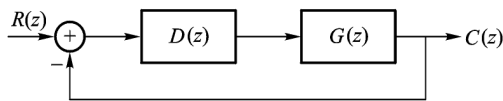


图 3-13 离散系统结构图

根据 z 变换的终值定理,离散系统采样时刻的稳态误差为

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+D(z)G(z)} R(z) \quad (3-15)$$

可见, e_{ss}^* 与输入信号 $R(z)$ 及系统结构 $D(z)G(z)$ 的特性均有关。

以下讨论常用的三种典型输入信号作用下的稳态误差。

(1) 单位阶跃函数 $r(t) = 1(t)$

单位阶跃函数的 z 变换为 $R(z) = 1/(1-z^{-1})$ 。将其代入式(3-15),得

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+D(z)G(z)} \cdot \frac{1}{(1-z^{-1})} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+D(z)G(z)} \\ &= \frac{1}{1+\lim_{z \rightarrow 1} D(z)G(z)} = \frac{1}{1+K_p} \end{aligned} \quad (3-16)$$

式中, $K_p = \lim_{z \rightarrow 1} D(z)G(z)$ 称为稳态位置误差系数,它是针对输入信号为阶跃函数定义的。显然, K_p 增大,稳态误差减小。

对 0 型系统,开环传递函数 $D(z)G(z)$ 在 $z=1$ 处无极点,或者说系统中不含积分环节, K_p 为有限值,所以稳态误差 e_{ss}^* 亦为有限值。

对 I 型系统,开环传递函数 $D(z)G(z)$ 在 $z=1$ 处有 1 个极点,或者说系统含有一个积分环节, $K_p = \infty$, 所以稳态误差为零。

类似地,对于高于 I 型的系统,在 $z=1$ 处有多个极点, $K_p = \infty$, 稳态误差为零。

总之,若输入为阶跃信号时,对单位负反馈系统,系统无稳态误差的条件是系统正向通道中至少含有 1 个积分环节。

(2) 单位斜坡信号 $r(t) = t$

此时,输入信号的 z 变换为 $R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$,代入式(3-15),得

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+D(z)G(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(z-1) + (z-1)D(z)G(z)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z)} = 1/K_v \end{aligned} \quad (3-17)$$

式中, $K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z)$ 称为稳态速度误差系数,它是针对输入信号为斜坡函数定义的。

(3) 单位加速度信号 $r(t) = \frac{1}{2}t^2$

此时,输入信号的 z 变换为

$$R(z) = \frac{T^2(z+1)z}{2(z-1)^3}$$

代入式(3-15),得

$$\begin{aligned} e_{ss}^* &= \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{1}{1+D(z)G(z)} \frac{T^2(z+1)z}{2(z-1)^3} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 D(z)G(z)} = 1/K_a \end{aligned} \quad (3-18)$$

式中, $K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 D(z)G(z)$ 称为稳态加速度误差系数。它是针对输入信号为加速度函数定义的。

从上述讨论中可见,连续与离散系统的误差系数的计算公式非常相似,但离散系统的 K_v 及 K_a 还与采样周期 T 有关。此外还应注意,如果不能写出闭环脉冲传递函数,则输入信号不能从系统的动态特性分离出来,从而上述静态误差系数不能被定义。在三种典型信号作用下的稳态误差计算公式如表 3-3 所示。

表 3-3 离散系统的稳态误差

e_{ss}^*	$r(t) = 1(t)$	$r(t) = t$	$r(t) = \frac{1}{2}t^2$
0 型系统	$1/(1+K_p)$	∞	∞
I 型系统	0	$1/K_v$	∞
II 型系统	0	0	$1/K_a$

关于稳态误差,应注意以下几个概念:

① 系统的稳态误差只能在系统稳定的前提下求得,如果系统不稳定,也就无所谓稳态误差。因此,在求取系统稳态误差时,应首先确定系统是稳定的。

② 稳态误差为无限大并不等于系统不稳定,它只表明该系统不能跟踪所输入的信号,或者说,跟踪该信号时将产生无限大的跟踪误差。

③ 上面讨论的稳态误差只是由系统的构造(如放大系数和积分环节等)及外界输入作用所决定的原理误差,并非是由系统元部件精度所引起的。也就是说,即使系统原理上无静差,但实际系统仍可能由于元部件精度不高而造成稳态误差。对计算机控制系统,由于A/D及D/A转换器字长有限,在字长较短时,A/D和D/A的量化误差过大,将会给系统带来附加的稳态误差。

2. 干扰作用下的离散系统稳态误差

系统中的干扰是一种非有用信号,由它引起的输出完全是系统的误差。图2-29中,当指令信号 $r(t)=0$ 时,误差完全由干扰 $n(t)$ 引起,此时

$$e(t) = -c_n(t)$$

$$C_N(z) = \frac{NG_1(z)}{1+D(z)G(z)} \quad (3-19)$$

根据终值定理,便可求出系统在干扰作用下采样时刻的稳态误差,即

$$e_{ssN}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) E(z) = -\lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) C_N(z) \quad (3-20)$$

例3-6 已知天线计算机控制系统结构图如图2-41所示。若令 $D(z) = K_d = 20$,试分析 $\theta_r(t) = 1(t)$ 和 $\theta_r(t) = t$ 两种情况下系统的稳态误差。若假设由阵风引起的等效干扰电压 $u_n(t) = 1$,试求干扰引起的稳态误差。

解:在计算稳态误差前应首先判断系统稳定性。当 $D(z) = K_d = 20$ 时,依2.6节所得被控对象传递函数,利用3.1节所述稳定判据,可知闭环系统稳定。

为求稳态误差,首先计算误差系数,利用表3-3中所给公式,可得

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} D(z)G(z) = \infty$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)D(z)G(z) = \frac{1}{0.02} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot 20 \times \frac{0.00374(z+0.936)}{(z-1)(z-0.818)} \approx 40$$

所以,当 $\theta_r(t) = 1(t)$ 时,稳态误差 $e_{ss}^* = 0$;当 $\theta_r(t) = t$, $e^* = 1/K_v = 1/40 = 0.025$ 。实际上,通过系统结构图可知,在 $D(z) = K_d = 20$ 时,该系统为I型系统,所以 $\theta_r(t) = 1$ 时, $e_{ss}^* = 0$;当 $\theta_r(t) = t$ 时系统的速度误差系数 K_v 就等于系统的开环放大系数 $K = K_d \cdot K_\omega / i = 40$,得 $e_{ss}^* = 0.025$ 。

干扰的稳态误差利用终值定理进行计算

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \theta_n(z)$$

在 $D(z) = K_d = 20$ 时

$$\theta_n(z) = \frac{U_n G_1(z)}{1+D(z)G(z)} = \frac{0.00374(z+0.936)}{(z-1)(z-0.818) + 20 \times 0.00374(z+0.936)} \cdot \frac{z}{(z-1)}$$

所以

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{0.00374(z+1)}{(z-1)(z-0.818) + 20 \times 0.00374(z+0.936)} \cdot \frac{z}{(z-1)} = -1/20 = -0.05$$

3.2.3 采样周期对稳态误差的影响

离散系统中采样周期 T 是系统的一个重要参数,故其大小对系统的动态特性及稳定性都有很大的影响。从离散系统的误差系数计算公式看,在 K_p 和 K_a 中都包含有 T 。那么,采样周期 T 对闭环系统的稳态误差是否有影响?结论是:对于具有零阶保持器的离散系统,稳态误差的计算结果与 T 无关,它只与系统的类型、放大系数及输入信号的形式有关。

为说明上述结论,现在分析图 3-14 所示的连续系统和相应的离散系统。为简便起见,图 3-14 中控制器设为 $D(s) = 1$ 和 $D(z) = 1$ 。连续部分的传递函数一般式为

$$G_0(s) = \frac{K(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)\cdots(1+\tau_ms)}{s^v(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_ns)} \quad (3-21)$$

式中, K 为系统的开环放大系数,系统的类型等于积分环节 v 的数目。

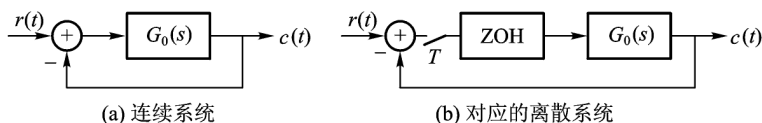


图 3-14 连续系统及其对应的离散系统

图 3-14(a) 所示连续系统的稳态误差系数如表 3-4 所示。

表 3-4 系统类型与误差系数

系统类型(v)	K_p	K_v	K_a
0	K	0	0
I	∞	K	0
II	∞	∞	K

图 3-14(b) 所示采样系统的开环脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathcal{Z} \left[\frac{1-e^{-sT}}{s} G_0(s) \right] = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K(1+\tau_1s)(1+\tau_2s)\cdots(1+\tau_ms)}{s^{v+1}(1+T_1s)(1+T_2s)\cdots(1+T_ns)} \right] \\ &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s} + \frac{K_1}{s} + \cdots + \frac{K_2}{s} + \text{分母无积分环节的各因式} \right] \end{aligned} \quad (3-22)$$

注意:括号内进行部分分式分解时,积分环节最高幂次项的系数必为原连续系统的开环放大系数 K 。对括号内各因式进行 z 变换时,只有分母中有 s 因子的项在 z 变换后,分母中才有 $(z-1)$ 的因子。

当系统为 0 型($v=0$)时,离散系统的开环传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s} + \text{分母无积分环节的项} \right] \\ &= (1-z^{-1}) \left[\frac{Kz}{z-1} + \text{分母无}(z-1)\text{因子的项} \right] \end{aligned} \quad (3-23)$$

由此求得离散系统的误差系数为

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{Kz}{z-1} = K$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G(z) = 0$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0$$

可见,对于0型系统,稳态误差系数计算结果与连续系统完全相同,并不取决于采样周期 T 。

当系统为I型($v=1$),离散系统的开环传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{K}{s} + \frac{K_1}{s} + \text{分母无积分环节的各项} \right] \\ &= (1-z^{-1}) \left[\frac{KTz}{(z-1)^2} + \frac{K_1z}{(z-1)} + \text{分母无}(z-1)\text{因子的各项} \right] \end{aligned} \quad (3-24)$$

此时

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) = \infty$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) G(z) = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (1-z^{-1}) \frac{KTz}{(z-1)^2} = K$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^2 G(z) = 0$$

可见,I型系统的稳态误差系数仍与连续系统相同,与 T 无关。对II型系统也可得出类似结论。

所以可得结论,尽管离散系统的稳态误差系数 K_v 和 K_a 的公式中包含 T ,但在实际计算过程中, K_v 和 K_a 的 T 与脉冲传递函数中的 T 相抵消,因此稳态误差与采样周期 T 无关。

3.3 时域特性分析

在计算机控制系统里,控制器 $D(z)$ 是在计算机中实现的,是在离散域表示的。而由于被控对象一般是连续的,因而输出响应也是连续的。所以,描述离散系统的时域特性也与连续系统类似,常用下述几个方面的性能表示:

- ① 稳定性
- ② 稳态特性(稳态误差)
- ③ 动态特性

前两个特性已分别在3.1节和3.2节介绍,本节着重讨论动态特性。

3.3.1 离散系统动态特性指标的提法及限制条件

动态特性主要是用系统在单位阶跃输入信号作用下的响应特性来描述,如图3-15所示,它反映了控制系统的瞬态过程。主要性能指标用超调量 $\sigma\%$ 、上升时间 t_r 、峰值时间 t_p 和调节时间 t_s 表示,其定义与连续系统一致,如图3-15所示。

必须指出,尽管上述动态特性的提法与连续系统相同,但在 z 域进行分析时,所得到的只是

各采样时刻的值。对计算机控制系统而言,被控对象常常是连续变化的,因此,在采样间隔内系统的状态并不能被表示出来,它们尚不能精确地描述和表达计算机控制系统的真实特性。如图 3-16 所示,实际系统输出是连续变化的,它的最大峰值输出为 C_m ,但在 z 域计算时,得到的峰值为 C_m^* ,一般情况下, $C_m^* < C_m$ 。若采样周期 T 较小,响应的采样值可能更接近连续响应。如采样周期 T 较大,两者差别可能较大。多数情况下,只要采样周期 T 选取合适,把两个采样值连接起来就可以近似代表采样间隔之间的连续输出值。

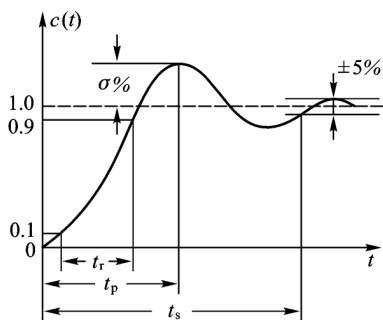


图 3-15 连续系统阶跃响应特性

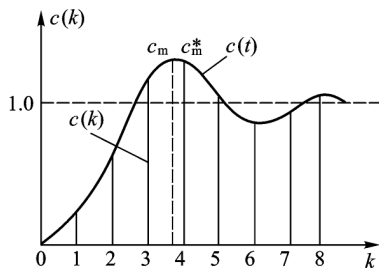


图 3-16 离散系统阶跃响应-连续系统响应的采样

为精确描述采样间隔之间的信息,还可以采用扩展 z 变换法进行理论计算(该方法本书中不予讨论)。工程中多采用数字仿真方法进行计算,只要仿真步长充分小,得到的响应特性与连续系统响应极为接近。

3.3.2 离散系统极点、零点位置与时间响应的关系

在连续系统里,如果知道传递函数的极点位置,便可估计出与它对应的瞬态响应形状,这对分析系统性能和设计控制律很有帮助。在离散系统中,若已知脉冲传递函数的极点,同样也可估计出它对应的瞬态响应。

1. 极点位于实轴

如已知脉冲传递函数为

$$G(z) = c_i \frac{1}{z - p_i} \quad (3-25)$$

它的 z 反变换即为它的脉冲响应

$$c(k) = c_i p_i^{k-1} \quad (k \geq 1) \quad (3-26)$$

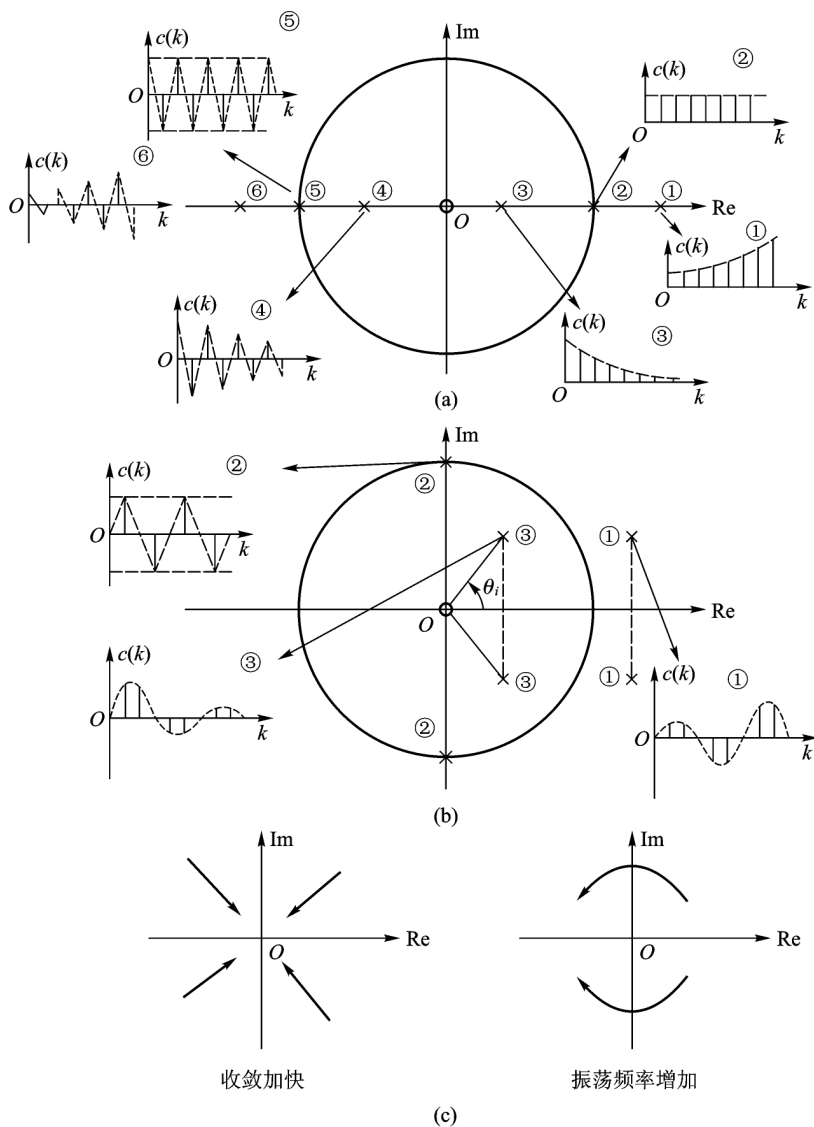
式中, p_i 为传递函数的实极点,其位置①~⑥如图 3-17(a)所示。

① 若 $p_i > 1$, 脉冲响应单调发散。

② 若 $p_i = 1$, 脉冲响应为常值序列。

③ 若 $0 < p_i < 1$, 即极点位于单位圆内正实轴上, 脉冲响应单调衰减。

④ 若 $-1 < p_i < 0$, 即极点位于单位圆内负实轴上, 在式(3-26)中, 当 k 为偶数时, p_i^k 为正值; 当 k 为奇数时, p_i^k 为负值。因此该响应为收敛的正、负交替脉冲, 或称振荡收敛。振荡周期为 $2T$, 振荡频率 $\omega_d = \omega_s/2$ 。

图 3-17 z 平面极点分布与脉冲响应

⑤ 若 $p_i = -1$, 脉冲响应为正、负交替的等幅脉冲。同样, 振荡周期为 $2T$, 振荡频率 $\omega_d = \omega_s/2$ 。

⑥ 若 $p_i < -1$, 脉冲响应为正、负交替发散的脉冲, 振荡周期为 $2T$, 振荡频率 $\omega_d = \omega_s/2$ 。

⑦ 若 $p_i = 0$, 相于脉冲传递函数为 $G(z) = c_i z^0$, 对应的时间响应为发生在 $k=1$ 时的脉冲, 表明时间响应的最短, 在一个采样周期内即结束。因此, 若脉冲传递函数有在原点处的极点, 其调节时间最短, 在离散系统中, 最短的过程时间为一个采样周期。

对 $p_i = 0$ 的响应, 进一步查看该系统的阶跃响应将更为直观。此时系统响应的 z 变换为

$$C(z) = \frac{1}{z-p_i} \frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} \quad (p_i = 0)$$

z 反变换, 可得

$$C(z) = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

所以 $c(k) = 1 \quad (k \geq 1)$

表明经过一个采样周期即达到了稳态。

例 3-7 已知数字滤波器如下

$$D(z) = \frac{0.126z^3}{(z+1)(z-0.55)(z-0.6)(z-0.65)}$$

试估计它在单位阶跃输入下的时间响应及稳态值。

解: 数字滤波器的输出响应为

$$\begin{aligned} C(z) &= D(z)R(z) = \frac{0.126z^3}{(z+1)(z-0.55)(z-0.6)(z-0.65)} \cdot \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z}{z-1} + \frac{0.0154z}{z+1} - \frac{3.306z}{z-0.55} + \frac{10.206z}{z-0.6} - \frac{3.306z}{z-0.65} \end{aligned}$$

z 反变换, 得

$$c(k) = 1 + 0.0154(-1)^k - 3.306(0.55)^k + 10.206(0.6)^k - 3.306(0.65)^k$$

分析上式, 第 1 项为稳态值 1, 第 2 项为振幅为 0.0154 的等幅振荡脉冲, 最后 3 项的极点 p_i 均在单位圆内的正实轴上, 因而该 3 项的响应均为单调收敛, 很快衰减。所以该滤波器的阶跃响应为: 从零逐渐上升, 在动态过程结束后, 在稳态值 1 处附加一个幅值为 0.0154 的等幅振荡。

2. 极点为复根

如果脉冲传递函数的极点为一对共轭复根, 如图 3-17(b) 所示, 那么

$$G(z) = \frac{c_i}{z-p_i} + \frac{c_{i+1}}{z-p_{i+1}} \quad (3-27)$$

由于传递函数系数为实数, 所以 c_i, c_{i+1} 必为共轭

$$c_i, c_{i+1} = |c_i| e^{\pm j\varphi_i} \quad (3-28)$$

共轭复根也可写为

$$p_i, p_{i+1} = r_i e^{\pm j\theta_i} \quad (3-29)$$

式(3-27)对应的瞬态响应为

$$\begin{aligned} c(k) &= \mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{c_i z}{z-p_i} z^{-1} + \frac{c_{i+1} z}{z-p_{i+1}} z^{-1} \right] = c_i p_i^{k-1} + c_{i+1} p_{i+1}^{k-1} \\ &= |c_i| e^{-j\varphi_i} r_i^{k-1} e^{j\theta_i(k-1)} + |c_{i+1}| e^{j\varphi_i} r_i^{k-1} e^{-j\theta_i(k-1)} \\ &= |c_i| r_i^{k-1} (e^{j[(k-1)\theta_i - \varphi_i]} + e^{-j[(k-1)\theta_i - \varphi_i]}) \\ &= 2|c_i| r_i^{k-1} \cos[(k-1)\theta_i - \varphi_i] \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (3-30)$$

所以, 共轭复根对应的脉冲响应是以余弦规律振荡的, 其中 φ_i 是与初始值有关的初始相角, 振荡频率 $\omega_i = \theta_i/T$ 与共轭复根的辐角 θ_i 有关, 辐角越大, 振荡频率越高。当 $\theta_i = \pi$ 时, 即一对共轭复根变成为负实轴上的一对极点, 此时振荡频率最大, 等于 $\omega_i = \pi/T = \omega_s/2$ 。脉冲响应的模与 $|p_i|^k$ 成正比, 可见:

- ① $|p_i| > 1$, 振荡发散; $|p_i|$ 越大, 发散越快。
- ② $|p_i| = 1$, 振荡是等幅的。

③ $|p_i| < 1$, 振荡是收敛的, $|p_i|$ 越小, 收敛越快。

极点位置与脉冲响应的变化趋势如图 3-17(c) 所示。极点越靠近原点, 收敛越快。如果极点在 z 平面的原点上, 即 $p_i = 0$, 脉冲响应的的时间最短。在离散系统里, 最短的时间间隔为一个采样周期, 所以, 如果一个极点 p_i 位于 z 平面的原点, 它对应的脉冲响应为延迟一拍 (T) 复现。极点的辐角越大, 振荡频率越高。若辐角为零 (即在正实轴上), 则单调变化; 辐角最大为 $\theta_i = \pi$, 则振荡频率最高 $\omega_i = \omega_s/2$ 。

例 3-8 在图 3-18(a) 所示 z 平面上, 有 4 对共轭复数极点, 试分析它们的脉冲响应。

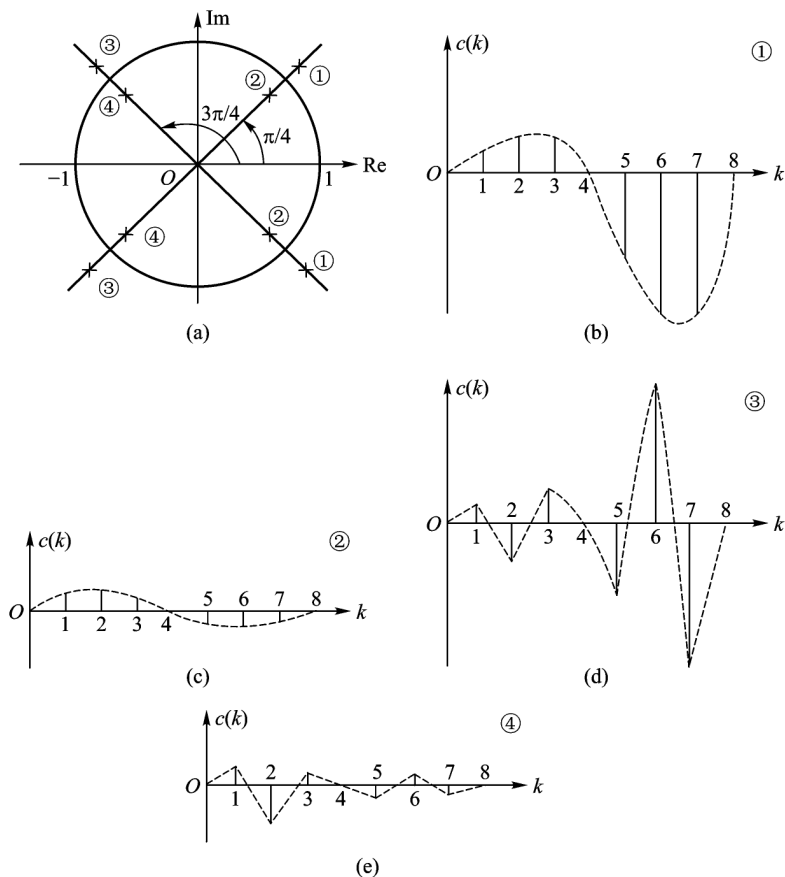


图 3-18 例 3-8 复数极点及其脉冲响应

解: ①、②两对复数极点, 因为其辐角为 $\pm\pi/4$, 所以振荡频率相同, 且为 $\omega_d = \theta_i/T = \pi/4T$, 振荡周期为 $T_d = 2\pi/\omega_d = 8T$ 。因为点①的幅值 $|p_i| > 1$, 故振荡是发散的, 脉冲响应如图 3-18(b) 所示。②点的幅值 $|p_i| < 1$, 振荡收敛。脉冲响应如图 3-18(c) 所示。

③、④两对复数极点, 因其辐角为 $\pm 3\pi/4$, 所以振荡频率 $\omega_d = \theta_i/T = 3\pi/4T$, 振荡周期 $T_d = 8T/3$, 即在 $8T$ 内振荡 3 次。同理, ③是发散的, ④是收敛的。脉冲响应分别如图 3-18(d)、(e) 所示。

还应说明, 系统的脉冲响应除与极点有关外, 与零点的关系也很密切。与连续系统类似, 传递函数的极点决定动态响应的模态组成, 而零点将综合影响不同模态在整体响应中的幅值的大

小,但分析起来较为复杂,本书不予讨论。

3.3.3 采样系统动态响应的计算

若已知离散系统的脉冲传递函数 $\phi(z)$ 和输入信号 $R(z)$ 时,系统响应 $c^*(t)$ 可以采用 z 反变换各种方法,如部分分式展开法、长除法进行计算求取,并可计算求取动态响应的性能指标。

另一种方便的方法是将脉冲传递函数转换为差分方程,利用计算机实现循环迭代求解。

对于采样系统,如希望更准确地了解输出响应 $c(t)$ 在采样间隔之间的变化状况,可以利用计算机实现“离散部分”与“连续部分”的混合仿真计算。也就是在响应计算时,系统中离散部分(如控制器)按设计选用的采样周期 T 进行仿真计算;而连续部分的仿真计算采用更小的计算步长(连续系统仿真的步长),这样,系统连续部分的响应将以更小的时间间隔输出。另一种方法是使用扩展 z 变换方法进行计算,本书对此不予讨论。

3.4 频域特性分析

与连续系统类似,离散系统频率特性特别是系统开环频率特性仍是分析系统稳定性、稳态和动态特性的重要手段和工具,并且主要的分析方法也非常类似。

3.4.1 频域中系统稳定性分析

奈奎斯特稳定判据是检验连续系统稳定性的有效方法,它利用系统开环频率特性直接判断闭环系统的稳定性。奈奎斯特稳定判据可以直接用于离散系统,唯一需要注意的是,在 z 平面的不稳定域是单位圆外部。与连续系统奈奎斯特稳定判据类似,可总结归纳如下离散系统奈奎斯特稳定判据。

若离散系统特征方程为

$$1+kD(z)G(z)=0 \quad (3-31)$$

- ① 确定 $kD(z)G(z)$ 的不稳定的极点数 p (不包括开环中位于 $z=1$ 处的极点数)。
- ② 以 $z=e^{j\omega T}$ 代入,在 $0 \leq \omega T \leq 2\pi$ 范围内,画开环频率特性 $kD(e^{j\omega T})G(e^{j\omega T})$ 。
- ③ 计算该曲线顺时针方向包围 $z=-1$ 的数目 n 。
- ④ 计算 $q=p-n$;当且仅当 $q=0$ 时,闭环系统稳定。

下面以具体实例说明之。

例 3-9 设某单位反馈离散系统开环传递函数为

$$G(z)=\frac{k(z+1)}{(z-1)(z-0.242)} \quad (3-32)$$

采样周期 $T=0.1$ s,试绘制它的幅相特性曲线,并分析闭环系统的稳定性。

解:(1) 该开环系统稳定,所以 $p=0$;

(2) 将 $z=e^{j\omega T}$ 代入式(3-32),得

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega T}) &= \frac{k(e^{j\omega T}+1)}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}-0.242)} \\ &= \frac{k[\cos(\omega T)+1+j\sin(\omega T)]}{[\cos(\omega T)-1+j\sin(\omega T)][\cos(\omega T)-0.242+j\sin(\omega T)]} \end{aligned} \quad (3-33)$$

依该式进行计算,可分别求得它的虚部及实部,从而得到它的幅相特性曲线,如图3-19所示。

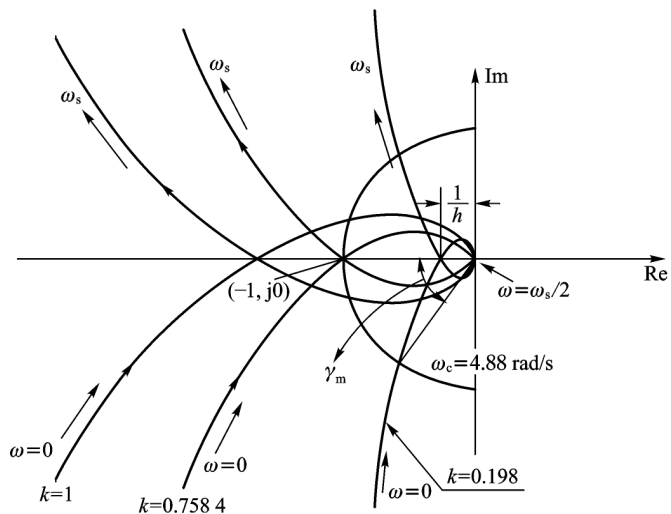


图3-19 例3-9的幅相特性曲线

图3-19分别绘出了 $k=0.198$ 、 0.7584 、 1 时的3条曲线。由图可见, ω 从 $0 \rightarrow \omega_s/2$ 与 ω 从 $\omega_s/2 \rightarrow \omega_s$ 的曲线是镜面对称的。另外,当 ω 从 $\omega_s \rightarrow 3\omega_s/2$ 及 ω 从 $3\omega_s/2 \rightarrow 2\omega_s$ 时,曲线又重复1次,这再一次说明了离散频率特性的特点。

(3) 当 $k=0.198$ 时,频率特性不包围 $z=-1$ 点, $n=0$,所以 $q=0$,故此时闭环系统稳定;当 $k=1$ 时,频率特性包围 $z=-1$ 点一次, $n=1$,所以 $q=-1$,此时闭环系统不稳定;当 $k=0.7584$,频率特性穿越 $z=-1$ 点,此时闭环系统为临界稳定。

以下 MATLAB 程序可以自动完成例3-9的离散奈奎斯特曲线计算与绘图。

```
% digital nyquist diagram
```

```
clear all
```

```
zG=[-1];pG=[1 0.242];k=[0.198,0.7584,1];Ts=0.1; % 定义多项式与增益k,采
```

样周期

```
for i=1:3
```

```
    [numG,denG]=zp2tf(zG,pG,k(i)); % 转换为传递函数
```

```
    dnyquist(numG,denG,Ts); % 绘制离散 nyquist 曲线
```

```
    hold on; axis([-3,0.5,-2,+2]); % 保持图形
```

```
end
```

```
hold on;
```

```
xlabel('Re')
```

```
ylabel('Im')
```

```

text(-2,-1,('(-1,j0)'));
% draw unit circle, 绘单位圆
x=-1:0.01:0;
n=length(x);
for i=1:n
    y1(i)=sqrt(1-x(i)^2);y2(i)=-y1(i);
end
plot(x,y1,'k',x,y2,'k')

```

3.4.2 相对稳定性的检验

在连续系统中,为了检验系统在达到不稳定之前,允许提高多少增益和允许增加多少额外的相位滞后,通常引入幅值裕度(h)和相角裕度(γ_m)的相对稳定性的概念。这些概念仍可直接用于离散时间系统,其定义与连续系统相同。利用相对稳定性两个指标,可以间接判断和检测闭环系统的动态特性,如系统快速性及振荡性等。

例如,在 $k=0.198$ 时,从图 3-19 中可以算得幅值裕度 $h=3.85$,相角裕度 $\gamma_m=53^\circ$,系统的截止频率 $\omega_c=4.88 \text{ rad/s}$ 。

利用离散系统 Bode 图求取稳定裕度更方便。

对于式(3-32)所示系统,可利用 MATLAB 软件中的下述指令求取:

```

T=0.1;
zG=[0.198 0.198]; pG=[1 -1.242
0.242];
hd=tf(zG,pG,T);margin(hd)
grid

```

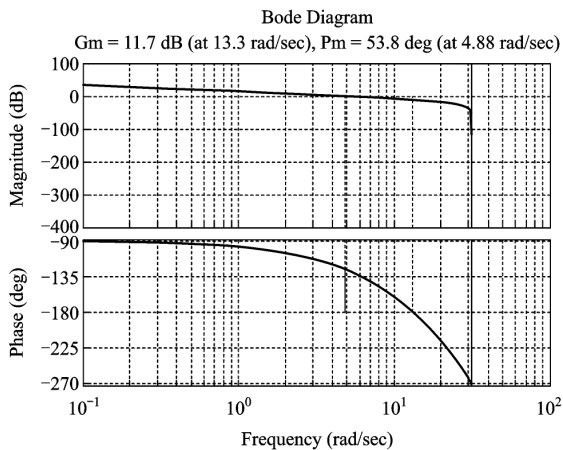


图 3-20 Bode 图及稳定裕度

所得曲线如图 3-20 所示。从图中可知,截止频率 $\omega_c=4.88 \text{ rad/s}$,相角裕度 $\gamma_m=54^\circ$;幅值裕度 $L_h=-20\log(1/h)=-20\log(1/3.85) \text{ dB}=11.7 \text{ dB}$, $\omega_h=13.3 \text{ rad/s}$ 。

3.5 应用实例

第 2 章 2.6 节给出了天线计算机控制系统结构图(如图 2-40 所示)。

- (1) 试求使系统稳定的参数 $D(z)=k_d$ 的范围;
- (2) 试确定该系统的静态误差系数以及当 $k_d=10$ 时,常值干扰 $U_n(s)$ 的稳态误差;
- (3) 试确定当 $T=0.02 \text{ s}$ 、 $k_d=10$ 时系统的稳定裕度;
- (4) 计算 $T=0.02 \text{ s}$ 、 $k_d=10$ 时闭环系统的单位阶跃曲线,并求系统的主要动态响应指标。

解:(1) 求取系统传递函数

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{K_\omega}{(T_\omega s+1)} \cdot \frac{1}{is}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{K(1-e^{-Ts})}{s^2(s+a)}\right] = \mathcal{Z}\left[\frac{20(1-e^{-Ts})}{s^2(s+10)}\right] \\
 &= 2(1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1-e^{-10T})z}{10(z-1)(z-e^{-10T})}\right] \\
 &= \frac{(2T-0.2+0.2e^{-10T})z - [(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]}{(z-1)(z-e^{-10T})}
 \end{aligned}$$

(2) 判断稳定性

闭环系统特征方程

$$\Delta(z) = 1 + D(z)G(z) = (z-1)(z-e^{-10T}) + k_d \{ (2T-0.2+0.2e^{-10T})z - [(0.2+2T)e^{-10T}-0.2] \} \quad (3-34)$$

$$= z^2 - [1 + e^{-10T} - (2T-0.2+0.2e^{-10T})k_d]z + \{ e^{-10T} - k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2] \} = 0$$

$$\Delta(0) = |e^{-10T} - k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2]| < 1;$$

$$e^{-10T} - k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2] < 1; k_d < \frac{1-e^{-10T}}{0.2-(0.2+2T)e^{-10T}}$$

$$e^{-10T} - k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2] > -1; k_d > \frac{-(1+e^{-10T})}{0.2-(0.2+2T)e^{-10T}}$$

$$\Delta(1) = 1 - [1 + e^{-10T} - (2T-0.2+0.2e^{-10T})k_d] + \{ e^{-10T} - k_d[(0.2+2T)e^{-10T}-0.2] \} > 0$$

$$2k_d T(1-e^{-10T}) > 0$$

因为 $(1-e^{-10T}) > 0, T > 0$, 所以, $k_d > 0$ 。

$$\Delta(-1) = 1 + [1 + e^{-10T} - (2T-0.2+0.2e^{-10T})k_d] + [e^{-10T} - k_d((0.2+2T)e^{-10T}-0.2)] > 0$$

$$k_d < \frac{2(1+e^{-10T})}{2T(1+e^{-10T})-0.4(1-e^{-10T})}$$

若改变采样周期 T , 依据上述结果, 可看到极限放大系数 k_d 的变化:

$T =$	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2	0.5
$k_d \leq$	100.8	51.6	21.8	11.96	7.28	3.3

可见, 随着采样周期的增大, 保证系统稳定的极限放大系数减小。

(3) 稳态特性分析

该系统为 I 型系统, 位置误差系数 $k_p = \infty$, 速度误差系数 $k_v = k_d k_\omega / i = 2k_d$;

由干扰 $u_n = 1(t)$ 所引起的输出均为误差。依第 2 章 2.6 节的推导, 有

$$\theta_n(z) = \frac{U_n G_1(z)}{1 + D(z)G(z)}$$

$$U_n G_1(z) = \mathcal{Z}[U_n(s) \cdot G_1(s)] = \mathcal{Z}\left[U_n(s) \cdot \frac{K_\omega}{(T_\omega s+1)} \cdot \frac{1}{is}\right]$$

若假设 $U_n(s) = 1/s$, 则

$$U_n G_1(z) = 2\mathcal{Z}\left[\frac{10}{s^2(s+10)}\right] = \frac{0.00374(z+0.939)z}{(z-1)^2(z-0.8187)}$$

所以, 在 $D(z) = k_d = 10$ 时

$$\theta_n(z) = \frac{U_n G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{U_n G(z)}{1 + 10G(z)} = \frac{0.00374(z+0.939)z}{(z^2-1.7813z+0.85382)(z-1)}$$

稳态误差值为

$$e_{ss} = -\theta_{ss} = -\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \theta_n(z) = \frac{-0.00374(z+0.939)z}{(z^2-1.7813z+0.85382)(z-1)} = -0.1$$

从控制回路分析可知,闭环系统产生 0.1 的系统输出,控制器方能产生控制指令 $u = -1$,抵消干扰的作用。

(4) 稳定裕度的计算

开环传递函数为

$$D(z)G(z) = \frac{10 \times 0.00374(z+0.939)}{z^2-1.8187z+0.8187} = \frac{0.0374z+0.0351}{z^2-1.8187z+0.8187}$$

利用 MATLAB 相关指令可求得相位及幅值稳态裕度:

```
num = [0.0374 0.0351];
den = [1 -1.8187 0.8187];
T = 0.02;
hd = tf(num, den, T);
margin(hd);
grid
```

由程序绘制的 Bode 图如图 3-21 所示。从图中可知,截止频率 $\omega_c = 12.5$ rad/s,相角裕度 $\gamma_m = 31.6^\circ$;幅值裕度 $L_h = 14.3$ dB, $\omega_h = 31.1$ rad/s。

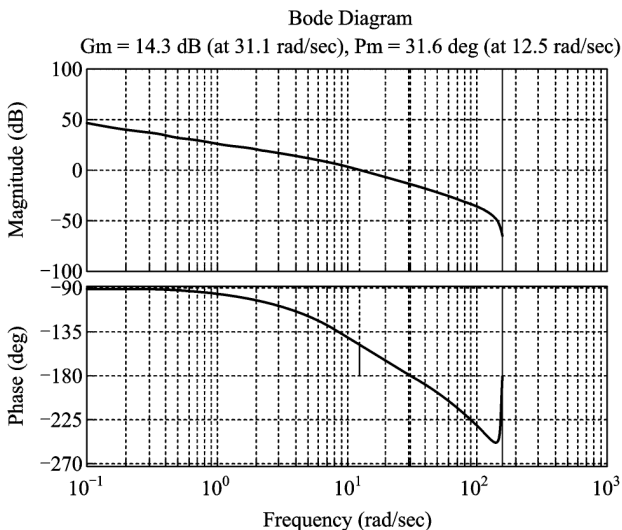


图 3-21 Bode 图及稳定裕度

(5) 动态响应计算

利用 Simulink 软件,对该系统进行仿真计算。仿真曲线如图 3-22 所示。图中可见,超调量 $\sigma\% = 40\%$,调节时间 $t_s = 0.76$ s,峰值时间 $t_p = 0.24$ s。这种响应特性与稳定裕度是一致的,由于相角裕度仅为 $\gamma_m = 31.6^\circ$,所以系统超调量较大。

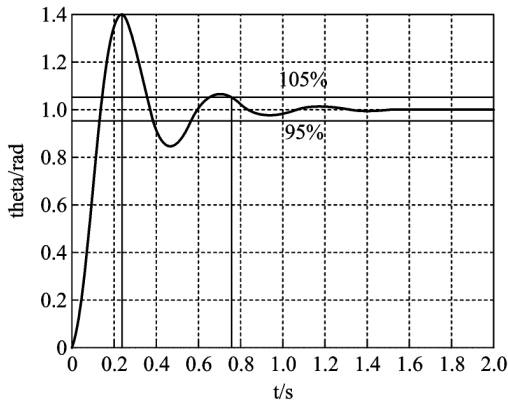


图 3-22 单位阶跃响应

本章小结

本章主要从时域及频域特性两方面讨论了离散系统的稳定性、稳态特性和动态响应特性的描述方法和计算手段。本章所讨论的特性与方法分析计算机控制系统的基本手段,应熟练地掌握和了解以下内容:

1. s 平面上的任意一点,通过 z 变换都对应地映射为 z 平面上唯一的一点,应清楚地了解 s 平面向 z 平面映射的规律。特别注意, s 平面被分为一个主带和许多旁带,主带与旁带内的对应点将重叠地映射为 z 平面上相同点。此外应牢记, s 左半平面上所有点将周期重复地映射在 z 平面的单位圆内。依据这种对应关系,应注意, z 平面上的任意点对应 s 平面上的点并不是唯一的, s 平面上的映射点,实部相同,但沿虚轴将周期地重复。

2. 依 s 平面与 z 平面的关系,应注意掌握 s 平面上各等值线(如等阻尼比线、等自然频率线等)在 z 平面上的对应关系。这些概念在系统设计时是非常有用的。

3. 要牢记离散系统稳定的充分必要条件,特别注意,采样周期对稳定性的影响,通常,增大采样周期将使系统的稳定程度降低,甚至变为不稳定。此外,还应注意,一个连续系统,转换为离散系统后,在控制规律不变的情况下,系统稳定程度将要降低。

4. 离散系统稳态误差的概念及基本规律与连续系统类似。但应注意,尽管采样周期是系统的重要参数,但在具有零阶保持器的系统中,采样周期大小并不影响稳态误差。

5. 在研究系统动态特性时,系统动态指标的提法与连续系统类似,但应注意其特点。

6. 与连续系统类似,应注意了解 z 平面极点分布与时间响应的关系以及相应的规律,应注意当系统极点位于 z 平面原点时,系统调节时间最短的概念。

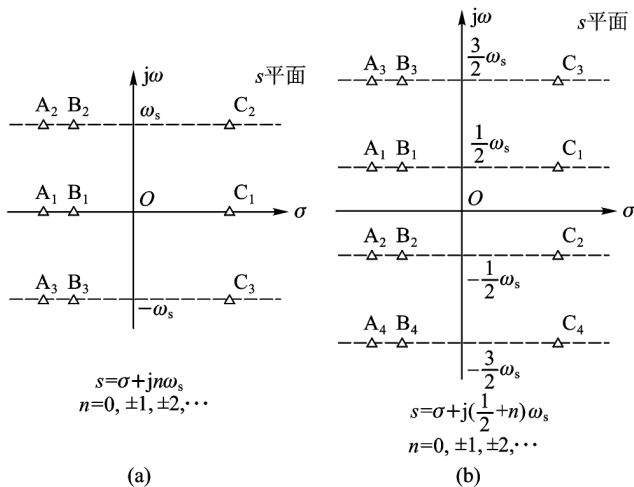
7. 尽管离散系统频率特性有其特点,并且绘制不太方便,但应注意,在利用相关的计算机软件获得系统频率特性后,连续系统中判别稳定性、稳态误差和动态特性的一些方法和概念也仍然可以使用。

习 题

A 习题(具有题解)

A3-1 s 平面上有 3 对极点,分别为 $s_{1,2} = -1 \pm j1.5$, $s_{3,4} = -1 \pm j8.5$, $s_{5,6} = -1 \pm j11.5$, $\omega_s = 10$, 试求在 z 平面上相应极点的位置。

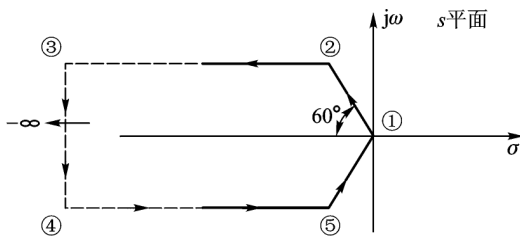
A3-2 已知 s 平面上实轴平行线上点的位置(A、B、C)如题图 A3-2(a)和(b)所示,试分别画出映射到 z 平面上点的位置。



题图 A3-2 题 A3-2 图

A3-3 已知 z 平面上的点 $z_{1,2} = -0.5 \pm j0.5$, 试求其映射至 s 平面上的位置, 设采样周期 $T = 0.1$ s。

A3-4 已知 s 平面上封闭曲线如题图 A3-4 所示(①→②→③→④→⑤→①)。试画出映射至 z 平面的封闭曲线。

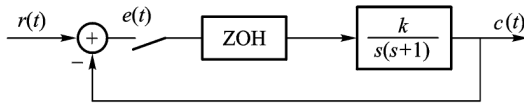


题图 A3-4 题 A3-4 图

A3-5 已知离散系统闭环特征方程分别为

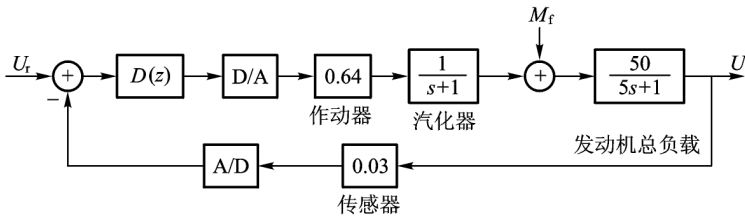
- (1) $\Delta(z) = (z+1)(z+0.5)(z+2) = 0$
- (2) $\Delta(z) = 2z^2 + 0.6z + 0.4 = 0$
- (3) $\Delta(z) = z^3 + 2z^2 + 1.31z + 0.28 = 0$, 试判断其稳定性。

A3-6 已知系统的结构图如题图 A3-6 所示,其中 $k=1, T=0.1 \text{ s}$,输入 $r(t)=1(t)+t$,试用稳态误差系数法求稳态误差,并分析误差系数与 T 的关系。



题图 A3-6 系统结构图

A3-7 汽车行驶速度控制系统的结构图如题图 A3-7 所示。设 $D(z)=k$,试判断干扰力矩 M_f 为单位阶跃时所产生的稳态误差(依图直接判断)。若 $T=0.2 \text{ s}$,求使系统稳定的 k 值范围。若该系统为连续系统时,结果又如何。比较说明之。



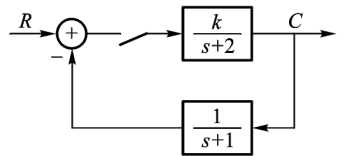
题图 A3-7 习题 A3-7 汽车行驶速度控制系统的结构图

A3-8 已知单位反馈离散系统开环传递函数为

$$G(z) = \frac{k(1 - e^{-\frac{T}{T_m}})z}{(z-1)(z - e^{-\frac{T}{T_m}})}$$

试求使系统稳定 k 与 T 的关系式。

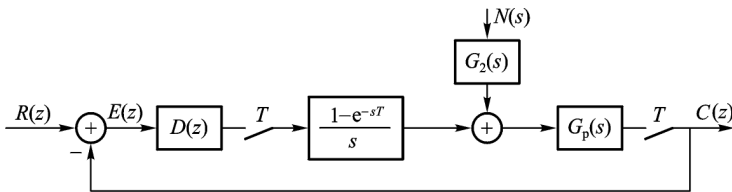
A3-9 试确定题图 A3-9 所示系统使系统稳定的 k 值范围,令采样周期 T 趋于 0, k 值又如何?若将该系统作为连续系统,结果又如何?对上述结果进行讨论。



题图 A3-9 离散系统结构图

A3-10 给定系统如题图 A3-10 所示,设指令输入 $R(s)=1/s, D(z)=$

k ,扰动输入 $N(s)=A/s, T=0.2 \text{ s}, G_p(s)=\frac{1}{s+1}, G_2(s)=1$,当 $A=-1, k=2$,系统的稳态误差如何?



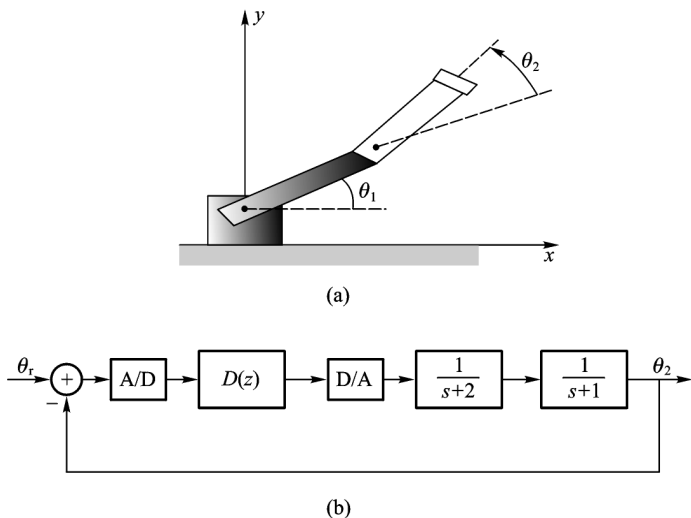
题图 A3-10 习题 A3-10 图

A3-11 写出开环脉冲传递函数 $G(z)=\frac{z}{z^2-z+0.5}$ 的脉冲响应表达式。

A3-12 如题图 A2-16 所示的火星漫游车控制系统,若 $D(z)=1, T$ 分别为 0.1 s 和 1 s ,试确定使系统稳定

的 k 值范围。

A3-13 双关节机械臂如题图 A3-13(a)所示。简化后系统结构图如题图 A3-13(b)所示。若 $D(z)=1$, 试画出连续系统及采样周期 $T=0.1\text{ s}$ 和 $T=1\text{ s}$ 开环对数频率特性曲线。



题图 A3-13 习题 A3-13 双关节机械臂结构图

B 习题

B3-1 已知 z 平面复极点 z_i , 试求相应 s 平面极点的阻尼比及无阻尼自然频率。

B3-2 试确定使开环传递函数为

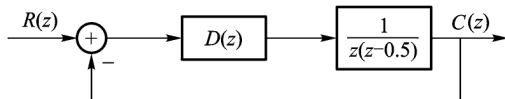
$$G(z) = K \frac{4z^{-1} + z^{-2}}{1 + z^{-1} + 0.16z^{-2}}$$

单位负反馈闭环系统稳定的 K 值。

B3-3 试确定题图 B3-3 所示系统的稳定性和单位阶跃输入时的稳态输出值。其中

(1) $D(z) = K$ (比例控制器);

(2) $D(z) = K \frac{z}{z-1}$ (积分控制器)。



题图 B3-3 系统结构图

B3-4 试求题图 B3-3 所示系统在斜坡输入时的稳态误差。

B3-5 题图 B3-5 为水位高度控制系统示意图。电机通过减速器控制 N 个阀门的开度, 水箱高度为 $h(t)$, 水箱底面积为 A , 进水量为 $q_i(t) = k_i N \theta_c(t)$ (θ_c 为电机转角), 出水量 $q_o(t) = k_o h(t)$, 因此, 水箱中水位高度由下述方程描述

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_0^t (q_i(t) - q_o(t)) dt = \frac{1}{A} \int_0^t (k_i N \theta_c(t) - k_o h(t)) dt$$

所以有

$$\frac{h(t)}{\theta_c(t)} = \frac{k_i N}{As + k_o}$$

对该系统,根据已给参数,可知

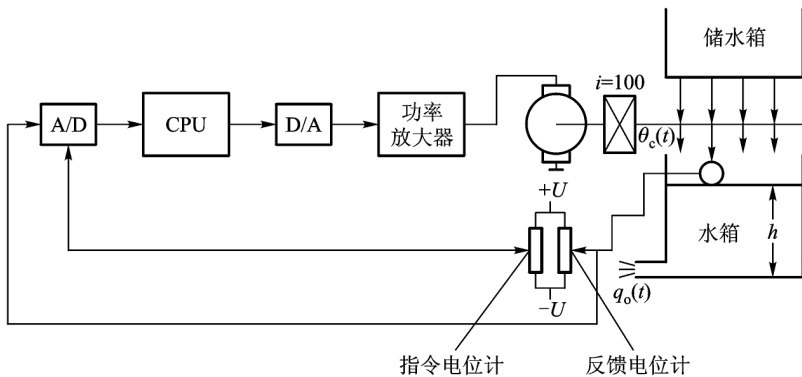
$$\frac{h(t)}{\theta_c(t)} = \frac{0.06N}{s+1}$$

直流电机的传递函数为

$$\frac{\theta_c(s)}{u_a(s)} = \frac{1.7}{s(s+12.5)}$$

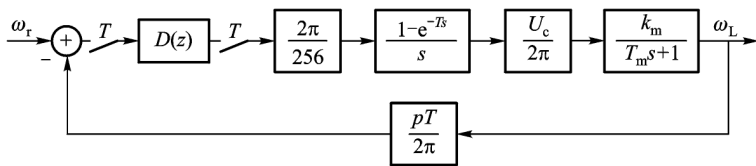
驱动电机的功率放大器系数 $k_a = 50$, 电位计的传递系数 $k_s = 1$, 减速比 $i = 100$ 。

- (1) 若 $D(z) = k_d = 1, T = 0.05$, 试求使系统稳定的最大阀门数 N ;
- (2) 如考虑 A/D 的转换误差为 5%, 试求系统保持水位高度的稳态误差。



题图 B3-5 水箱控制系统原理示意图

B3-6 微机控制的直流电机速度控制系统如题图 B3-6 所示。其中 $U_c = 24 \text{ V}, k_m = 5 \text{ rad/s/V}, T_m = 0.05 \text{ s}, p = 100$ 脉冲/周。设采样周期 $T = 0.1 \text{ s}$ 。试求使系统稳定的 $D(z) = k_d$ 值以及 $k_d = 1$ 时, 系统单位阶跃响应特性及稳态值。



题图 B3-6 直流电机速度控制系统示意图

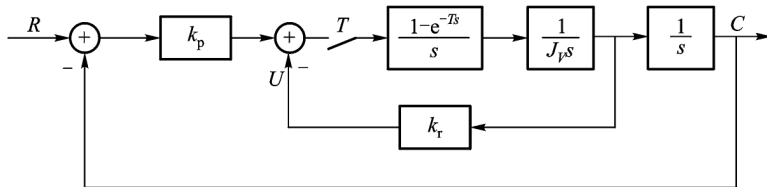
B3-7 数字飞船控制系统如题图 B3-7 所示。若采样周期 $T = 0.264 \text{ s}, J_r = 418 \text{ 22}, k_p = 1.65 \times 10^6$, 试推导系统开环及闭环传递函数, 并求使系统稳定的临界 k_r 值。

B3-8 已知单位负反馈闭环系统传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{z+0.5}{3(z^2-z+0.5)} \quad T = 1 \text{ s}$$

试求开环传递函数, 并绘制 Bode 图, 求相位、增益稳定裕度。

B3-9 试求题图 A2-15 热蒸汽加热系统的相位、幅值稳定裕度、单位阶跃响应特性和稳态误差。令 $D(z) =$



题图 B3-7 数字飞船控制系统

k_d 分别为 1、10, 采样周期 T 分别为 0.2 s、1 s。

B3-10 若开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, 试绘制连续系统奈奎斯特图及带零阶保持器和不带零阶保持器离散系统的奈奎斯特图, 设采样周期 $T=0.2$ s。

B3-11 试求题图 B3-11(a)、(b)所示系统干扰所引起的稳态误差表达式, 并说明为减少干扰所引起的稳态误差应如何选取系统参数。

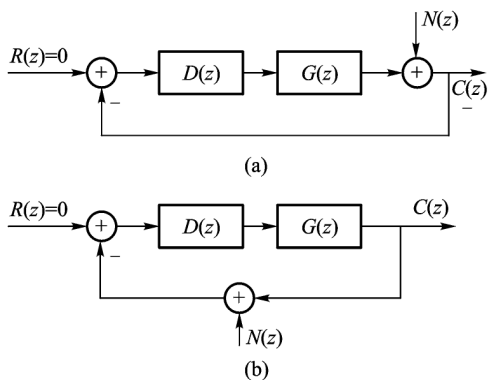
B3-12 系统结构如题图 B3-12(a)所示。其控制算法为

$$u(kT) = K(r(kT - \tau) - c(kT - \tau))$$

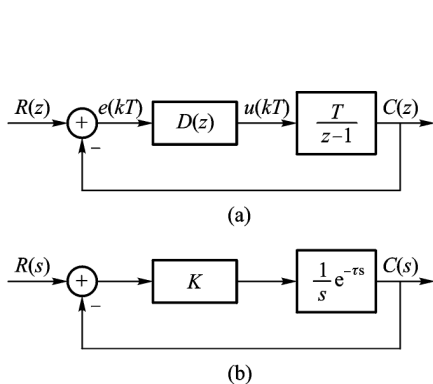
其中, τ 为延迟时间。

(1) 试求当 τ 分别为 0 和 T 时, 使闭环系统稳定的控制器增益 K 值的大小。

(2) 如连续系统如题图 B3-12(b)所示, 试求当 τ 分别为 0 和 T 时, 使闭环系统稳定的控制器增益 K 值的大小, 并与上述结果进行比较。



题图 B3-11 习题 B3-11 系统结构图



题图 B3-12 习题 B3-12 系统结构图