

第3章 控制系统的复数域描述

在对实际中的控制系统进行分析与设计时,常常需要在必要的时候做一些假设与近似,使所获得的实际物理系统的数学模型能够应用线性系统理论。有两种情况下得到的数学模型能够采用线性系统理论进行分析:一是系统本身的特性是线性的,或者系统工作在其特性的线性区域;二是系统的特性是非线性的,但在平衡工作点附近采用了线性化方法,得到了系统的线性化模型。由于实际物理系统大多数是非线性的,因此采用线性系统理论进行系统分析与设计时,常常会遇到一些假设条件、线性化等词汇。

在前一章通过机理分析,利用物理定律,建立了系统的线性微分方程模型。无论是高阶微分方程、一阶微分方程组,还是由一阶微分方程组所构成的状态空间模型,都是系统特性在时间域内的表现形式。如果希望求出系统解的具体形式,就必须要求解高阶微分方程,而微分方程的求解如果仅仅在时域内通过手算来实现将会是很繁琐的,因此从本章开始,引入拉普拉斯变换(拉氏变换)这一数学工具,将微分方程的求解转换为代数方程求解。传递函数不仅能够以复数传递因子的形式描述元件或系统的输出变量和输入变量之间的关系,而且为进一步描述与求解复杂系统奠定了基础。伴随传递函数概念产生的动态结构图与信号流图,则以图形化的语言描述了系统内部变量之间存在的传递关系,更便于求解系统输出与输入之间的函数关系。

3.1 拉氏变换

拉氏变换是一种用来求解线性常微分方程的数学工具。通过拉氏变换,一些常用的函数如正弦函数、指数函数等可以转换为复数平面内关于复数 s 的代数函数,积分、微分运算也转换为代数运算,从而将微分方程转换为代数方程,微分方程的求解转变为结合复数域内多项式展开技术与拉氏变换表的代数运算。

因而,利用拉氏变换不仅可以无需真正求解微分方程便可分析系统的性能,而且还可以同时获得方程解中的瞬态部分与稳态部分。

3.1.1 拉氏变换的定义

若函数 $f(t)$ 满足下列条件:

- (1) 在 $t \geq 0$ 的任一有限区间上分段连续。
- (2) 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $f(t)$ 的增长速度不超过某一指数函数,亦即存在常数 $M > 0$ 及 $c \geq 0$,使得

$$|f(t)| \leq M e^{ct}, 0 \leq t < +\infty \quad (3.1)$$

成立,则下面的积分:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.2)$$

在半平面 $\operatorname{Re}(s) > c$ 上一定存在。此时右端的积分绝对收敛且一致收敛,并且在此半平面内, $F(s)$ 为解析函数。于是式(3.2)为函数 $f(t)$ 的拉氏变换定义式,记为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (3.3)$$

可以看出, $f(t)$ ($t \geq 0$) 的拉氏变换,实际上就是函数 $f(t) \varepsilon(t) e^{-\beta t}$ ($\beta > 0$) 的傅里叶变换, $\varepsilon(t)$ 为定义在 $[0, +\infty)$ 上、幅值为 1 的单位阶跃函数。物理学和工程上常见的函数一般都能够满足拉氏变换存在的条件,比傅里叶变换中绝对可积的条件要弱得多,因此拉氏变换的应用更为广泛。

例 3.1 设 $f(t)$ 为单位阶跃函数,即满足

$$f(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

则 $f(t)$ 的拉氏变换为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s} \quad (3.5)$$

例 3.2 设 $f(t)$ 为指数函数 $f(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$, 则 $f(t)$ 的拉氏变换为

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} Ae^{-at} e^{-st} dt \\ &= A \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{A}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{s+a} \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.1.2 拉氏变换的性质

在应用拉氏变换的过程中,利用拉氏变换的性质可以简化求取函数拉氏变换的过程。

1. 线性性质

若 a, b 为常数,且 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$, $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, 则有

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s) \quad (3.7)$$

这个性质表明函数线性组合的拉氏变换等于各函数拉氏变换的线性组合,即拉氏变换满足叠加性与均匀性,是一种线性变换。

2. 微分性质

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则有

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= sF(s) - f(0) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad (3.8)$$

当 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$ 时,有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= sF(s) \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] &= s^2F(s) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left[\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right] &= s^nF(s)\end{aligned}\quad (3.9)$$

利用此性质可以将关于 $f(t)$ 的微分方程转化为 $F(s)$ 的代数方程,因此它对分析线性系统有着十分重要的作用。

例 3.3 单位脉冲函数又称 δ 函数,其数学表达式为 $f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$,且定义 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$,这是一个脉冲面积为 1,在 $t=0$ 时刻出现幅值无穷大跳变的特殊函数。由于其在零时刻发生突变,而其他时刻的函数值均为零,故可以将其视为单位阶跃函数的导数,于是

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\right] = s \frac{1}{s} = 1 \quad (3.10)$$

对于脉冲函数而言,其特性的变化主要体现在 $[0^-, 0^+]$ 区间,故以后不加声明均认为拉氏变换的积分下限是 0^- ,即为 0^- 型变换。采用 0^- 型变换,意味着外作用尚未加于系统,系统所处的状态是易于知道的,因此初始条件也比较容易确定。

例 3.4 求函数 $f(t) = t^m$ 的拉氏变换,其中 m 是正整数。

解 由于 $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(m-1)}(0) = 0$,而

$$f^{(m)}(t) = m! \quad (3.11)$$

所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[m!] &= \mathcal{L}[f^{(m)}(t)] = s^m \mathcal{L}[f(t)] - s^{m-1}f(0) - s^{m-2}f'(0) - \dots - f^{(m-1)}(0) \\ &= s^m \mathcal{L}[t^m]\end{aligned}\quad (3.12)$$

而对于 $t \geq 0$ 时常值信号

$$\mathcal{L}[m!] = m! \cdot \mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{m!}{s} \quad (3.13)$$

所以

$$\mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}} \quad (3.14)$$

此外,由拉氏变换的存在定理,还可以得到象函数的微分性质:

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,则

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds} \quad (3.15)$$

一般的,有

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (3.16)$$

例 3.5 求函数 $f(t) = t \sin \omega t$ 的拉氏变换。

解 因为 $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, 根据象函数的微分性质可知

$$\mathcal{L}[t \sin \omega t] = -\frac{d}{ds} \left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right] = \frac{2s\omega}{(s^2 + \omega^2)^2} \quad (3.17)$$

3. 积分性质

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则有

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s}F(s) \\ \vdots \\ \mathcal{L}\left[\int_0^t dt \int_0^t dt \cdots \int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s^n}F(s) \end{cases} \quad (3.18)$$

例 3.6 设 $f(t)$ 为单位斜坡函数, 即满足 $f(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, 求该函数的拉氏变换。

解 与阶跃函数相比较, 可以知道该函数是单位阶跃函数的积分, 于是

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \varepsilon(t) dt\right] = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} \quad (3.19)$$

此外, 由拉氏变换存在定理, 还可以得到象函数的积分性质:

若 $\mathcal{L}[f(s)] = F(s)$, 且积分 $\int_s^\infty F(s) ds$ 收敛, 则

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(s) ds \quad (3.20)$$

一般的, 则有

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t^n}\right] = \int_s^\infty ds \int_s^\infty ds \cdots \int_s^\infty F(s) ds \quad (3.21)$$

例 3.7 求函数 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ 的拉氏变换。

解 因为 $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$, 所以,

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{s^2 + 1} ds = \arctan\left[\frac{1}{s}\right] \quad (3.22)$$

4. 位移性质

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则有

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \quad (3.23)$$

这个性质表明了一个原函数乘以一个指数函数 e^{at} 的拉氏变换, 等于其象函数变量移位 a , 故有时又称为复数位移定理。

例 3.8 求 $e^{-at} \sin \omega t$ 的拉氏变换。

解 已知 $\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, 利用位移性质可得

$$\mathcal{L}[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \quad (3.24)$$

5. 延迟性质

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 则对于任一非负实数 τ , 有

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = e^{-s\tau} F(s) \quad (3.25)$$

例 3.9 求函数 $\varepsilon(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}$ 的拉氏变换。

解 已经知道 $\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$, 根据延迟性质, 有

$$\mathcal{L}[\varepsilon(t - \tau)] = \frac{1}{s} e^{-s\tau} \quad (3.26)$$

6. 初值定理与终值定理

1) 初值定理

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 且 $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ 存在, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.27)$$

这个性质表明函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 时的函数值可以通过对 $sF(s)$ 取 $s \rightarrow \infty$ 时的极限得到, 它建立了函数 $f(t)$ 在坐标原点的值与函数 $sF(s)$ 无限远处的值之间的关系。

2) 终值定理

若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 且 $sF(s)$ 的所有极点均在 s 平面的左半平面及原点上, 或称 $sF(s)$ 在 s 平面的右半平面及除原点外的虚轴上解析, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.28)$$

这个性质表明函数在 $t \rightarrow \infty$ 时的数值(稳态值)可以通过 $sF(s)$ 取 $s \rightarrow 0$ 时的极限得到, 它建立了函数 $f(t)$ 在无限远处的值与函数 $sF(s)$ 在原点处的值之间的关系。

例 3.10 若 $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s+a}$, 求 $f(0)$, $f(+\infty)$ 。

解 根据初值定理, 有

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{s+a} = 1$$

由于 $F(s)$ 极点为 $s = -a$, 故 $sF(s)$ 在 s 平面的右半平面解析, 于是根据终值定理有

$$f(+\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s+a} = 0$$

已经知道 $f(t) = e^{-at}$, 上面的结果与直接求其初值与终值的计算结果一致。

在应用终值定理时, 需要注意定理条件是否满足, 例如函数 $f(t)$ 的拉氏变换形式为 $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$, 则 $sF(s) = \frac{s}{s^2+1}$ 的奇点为 $s = \pm j$, 位于虚轴上, 不满足定理的条件, 就不能应用终值定理。

虽然 $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$, 而 $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2+1} \right] = \sin t$ (\mathcal{L}^{-1} 为拉氏逆变换的符号), $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) =$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sin t$ 是不存在的。

初值定理对 $sF(s)$ 的极点分布没有限制。

7. 卷积定理

若 $f_1(t), f_2(t)$ 的拉氏变换存在, 且 $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s), \mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$, 则卷积 $f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$ 的拉氏变换存在, 且

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad (3.29)$$

这个性质表明两个函数卷积的拉氏变换等于这两个函数拉氏变换的乘积。

在拉氏变换的应用中, 卷积定理起着十分重要的作用, 可以利用它来求某些函数的逆变换。

例 3.11 若 $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$, 求 $f(t)$ 。

解 因 $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2+1}$, 取 $F_1(s) = \frac{1}{s^2}, F_2(s) = \frac{1}{s^2+1}$, 于是 $f_1(t) = t, f_2(t) = \sin t$, 那么

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \tau \sin(t - \tau) d\tau \\ &= \tau \cos(t - \tau) \Big|_0^t - \int_0^t \cos(t - \tau) d\tau = t - \sin t \end{aligned}$$

3.1.3 拉氏逆变换

若 $F(s)$ 为 $f(t)$ 的拉氏变换, 则称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的拉氏逆变换, 表达式为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (3.30)$$

由该式可以看出, 这是一个复变函数的积分, 通常计算起来比较困难, 但是当 $F(s)$ 满足一定条件时, 可以用留数方法来计算, 特别是当 $F(s)$ 为有理函数时, 计算更为简单。下面分别讨论计算函数拉氏逆变换的两种方法: 留数法与部分分式分解法。

1. 留数法

定理 若 s_1, s_2, \dots, s_n 是函数 $F(s)$ 的所有奇点 (适当选取 β 使这些奇点全在 $\operatorname{Re}(s) < \beta$ 的范围内), 且当 $s \rightarrow \infty$ 时, $F(s) \rightarrow 0$, 则有

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{s=s_k} [F(s) e^{st}] \quad (3.31)$$

即

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{s=s_k} [F(s) e^{st}] \quad (t > 0) \quad (3.32)$$

若函数 $F(s) = B(s)/A(s)$ 是有理函数, 其中 $A(s), B(s)$ 是不可约的多项式, 阶数分别为 n, m , 且 $m < n$, 满足定理对 $F(s)$ 的要求, 则根据 $A(s)$ 零点的不同取值情况, 按下面方法计算留数:

情况一: 若 $F(s)$ 具有 n 个两两互不相同的单极点, 即 $A(s)$ 具有 n 个单零点, 根据留数的计算方法, 有

$$\operatorname{Res}_{s=s_k} \left[\frac{B(s)}{A(s)} e^{st} \right] = \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t} \quad (3.33)$$

从而根据式(3.32)有

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(s_k)}{A'(s_k)} e^{s_k t} \quad (3.34)$$

情况二:若 s_1 是 $A(s)$ 的一个 m 阶零点, $s_{m+1}, s_{m+2}, \dots, s_n$ 是 $A(s)$ 的单零点, 即 s_1 是 $F(s)$ 的 m 重极点, $s_i (i = m+1, \dots, n)$ 是它的单极点, 根据留数计算方法, 有 s_1 点处的留数为

$$\operatorname{Res}\left[\frac{B(s)}{A(s)}e^{st}\right] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_1)^m \frac{B(s)}{A(s)} e^{st} \right] \quad (3.35)$$

于是

$$f(t) = \sum_{i=m+1}^n \frac{A(s_i)}{B'(s_i)} e^{s_i t} + \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow s_1} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \left[(s-s_1)^m \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] \quad (3.36)$$

例 3.12 求 $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ 的拉氏逆变换。

解 由 $F(s)$ 表达式可以看出, $s=0$ 为其单极点, $s=-1$ 为二重极点, 于是由式(3.36)可得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{[s(s+1)^2]'} e^{st} \Big|_{s=0} + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} e^{st} \right] \\ &= \frac{1}{3s^2 + 4s + 1} e^{st} \Big|_{s=0} + \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s} e^{st} \right] \\ &= 1 + \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{t}{s} e^{st} - \frac{1}{s^2} e^{st} \right] \\ &= 1 + (-te^{-t} - e^{-t}) = 1 - e^{-t}(t+1) \end{aligned}$$

2. 部分分式分解法

若 $F(s)$ 为有理多项式, 除了留数法以外, 还可以采用多项式部分分式分解和查表相结合的方法进行拉氏逆变换。同样, 根据多项式极点的不同取值情况, 分别进行讨论。

1) $F(s)$ 具有单极点

如果 $F(s)$ 具有单极点, 即 n 个极点两两互不相等, 此时 $F(s)$ 可以由如下形式表示:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (m < n) \quad (3.37)$$

其中 p_1, p_2, \dots, p_n 可以是复数, 也可以是实数, 但互不相等。于是 $F(s)$ 可以分解成形如

$$F(s) = \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_n}{s+p_n} \quad (3.38)$$

的多项式, 其中

$$c_i = \lim_{s \rightarrow -p_i} (s+p_i) F(s) \quad (3.39)$$

因为 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{c_i}{s+p_i}\right] = c_i e^{-p_i t}$, 于是

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = c_1 e^{-p_1 t} + c_2 e^{-p_2 t} + \cdots + c_n e^{-p_n t} \quad (3.40)$$

例 3.13 求 $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$ 的拉氏逆变换。

解 对 $F(s)$ 进行部分分式分解, 有

$$F(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+2}$$

式中, $c_1 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = 2$; $c_2 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2) \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = -1$ 。

于是有 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] = 2e^{-t} - e^{-2t}$

2) $F(s)$ 具有重极点

设 $F(s)$ 的 n 个极点中, $s = -p_1$ 为 r 重极点, 其余极点为单极点, 则 $F(s)$ 表示为

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{B(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_{n-r})(s+p_r)^r} \\ &= \frac{c_1}{s+p_1} + \frac{c_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{c_{r1}}{s+p_r} + \frac{c_{r2}}{(s+p_r)^2} + \cdots + \frac{c_{rr}}{(s+p_r)^r} \end{aligned} \quad (3.41)$$

其中单极点部分的展开系数按式(3.39)计算, 重极点部分展开系数为

$$\begin{aligned} c_{rr} &= [(s+p_r)^r F(s)] \Big|_{s=-p_r} \\ c_{r,r-1} &= \frac{d}{ds} [(s+p_r)^r F(s)] \Big|_{s=-p_r} \\ &\vdots \\ c_{r1} &= \frac{1}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [(s+p_r)^r F(s)] \Big|_{s=-p_r} \end{aligned} \quad (3.42)$$

例 3.14 求 $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$ 的原函数。

解 $F(s)$ 含有一个单根、一个两重极点, 即

$$F(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s+1} + \frac{c_3}{(s+1)^2}$$

其中,

$$\begin{aligned} c_1 &= s \frac{1}{s(s+1)^2} \Big|_{s=0} = 1 \\ c_2 &= \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} \right] \Big|_{s=-1} = -1 \\ c_3 &= (s+1)^2 \frac{1}{s(s+1)^2} \Big|_{s=-1} = -1 \end{aligned}$$

于是 $f(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}$, 与留数法的结果一致。

实际物理系统的微分方程经拉氏变换以后, 得到的传递函数一般为有理多项式, 因此采用部分分式展开与查表相结合的方法求取象函数的拉氏逆变换, 简单实用, 易于理解。

3.1.4 拉氏变换的应用

由拉氏变换的性质可以看出, 拉氏变换能够将微分方程变换为代数方程, 因此可以利用拉氏变换进行线性常微分方程的求解。

采用拉氏变换方法求解线性常微分方程时, 主要按以下步骤进行:

(1) 对微分方程进行拉氏变换, 将其转换成 s 域内的代数方程。

(2) 求解代数方程, 得到输出量的表达式。

(3) 采用留数法或者部分分式分解与拉氏变换表相结合的方法, 得到输出变量的时域表达式, 即微分方程的解。

例 3.15 考虑微分方程 $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5\varepsilon(t)$, 其中 $\varepsilon(t)$ 为单位阶跃输入, 求满足初始条件 $y(0) = -1, y^{(1)}(0) = 2$ 的解。

解 首先对方程两边进行拉氏变换, 有

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5/s$$

代入初始条件并进行部分分式展开, 有

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3}{2(s+2)}$$

根据拉氏变换表, 可以得到单位阶跃信号作用下、满足初始条件的解为

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

3.1.5 MATLAB 求解拉氏变换与拉氏逆变换

1. 拉氏变换

MATLAB 环境下, 可以采用 `laplace()` 函数求时域函数的拉氏变换。当调用格式为 `laplace(F)`, 则默认设定函数 F 为关于 t 的函数, 返回函数默认为关于 s 的函数。若调用格式为 `laplace(F, t)`, 则返回关于 t 的函数。若调用格式为 `laplace(F, w, t)`, 则将函数 F 视为关于 w 的函数, 返回函数为关于 t 的函数。

在使用该函数之前, 需要利用函数 `syms` 建立符号对象, 表达形式为

```
syms t deta
```

符号对象的名称仅由字母构成, 对象之间由空格隔开。

由 `laplace()` 函数得到的拉氏变换象函数还可以利用函数 `simple()` 将函数表达式化简, 调用格式为 `simple(F)`, 可以得到符号表达式或者矩阵 F 的最简形式。若调用格式为 `[R, How] = simple(F)`, 则将最简符号函数或矩阵形式返回给 R , 而将简化过程中运用的运算函数名以字符串的形式赋给 How 。

例如: 计算时域函数 $f(t) = 2e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos t$ 的拉氏变换, 其 MATLAB 程序为

```
% 求 f(t) 拉氏变换
```

```
syms t y;
```

```
% 声明 t, y 为变量
```

```
y = laplace(2 * exp(-3 * t) + 3 * sin(2 * t) - 2 * cos(t)); % 求拉氏变换
```

```
B = simple(y);
```

```
% 化简
```

```
运行结果为
```

```
B =
```

$$2/(s+3) + 6/(s^2+4) - 2*s/(s^2+1)$$

2. 拉氏逆变换

在 MATLAB 中, 实现拉氏逆变换有两种方法: 一是采用部分分式展开的方法, 利用函数 `residue()` 将有理多项式分解以后, 再根据分解后的形式, 对照拉氏变换表, 求得其相应时域函数形式, 约定的自变量是 t 。另外一种方法是直接采用逆变换函数 `ilaplace()`。

函数 `residue()` 的调用格式为 `[r, p, k] = residue[B, A]`, 其中 B 、 A 分别为待求拉氏逆变换多项式函数的分子分母多项式系数构成的向量, 分解的形式为

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{r(1)}{s-p(1)} + \frac{r(2)}{s-p(2)} + \cdots + \frac{r(n)}{s-p(n)} + k(s)$$

返回值中 p, r 分别为分解得到的极点以及该极点对应分解式的权值, k 为倍数因子。若存在 m 重极点 $p(j)$, 则分解形式为

$$\frac{r(j)}{s-p(j)} + \frac{r(j+1)}{[s-p(j)]^2} + \cdots + \frac{r(j+m-1)}{[s-p(j)]^m}$$

返回参数中 $p(j) = p(j+1) = \cdots = p(j+m-1)$ 。若调用格式为 $[B, A] = \text{residue}[r, p, k]$, 则实现以上分解过程的逆运算, 将分解后的形式还原。

函数 `ilaplace()` 的调用格式为 $F = \text{ilaplace}(L)$, 则将多项式函数 L 变换为时域函数, F 默认为关于变量 t 的函数。若调用格式为 $F = \text{ilaplace}(L, x)$, 则变换后的函数为关于变量 x 的函数。若调用格式为 $F = \text{ilaplace}(L, w, x)$, 则将函数 L 视为关于变量 w 的函数, 返回函数为关于 x 的函数。

例如求 $G(s) = \frac{2s^3 + 5s^2 + 3s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$ 的拉氏逆变换, 其 MATLAB 程序以及运行结果如下:

```
% 部分分式分解法进行拉氏逆变换
num = [2 5 3 6]; den = [1 6 11 6]; % 待求分解多项式的分子分母多项式系数
[r, p, k] = residue(num, den) % 因式分解
运行结果为
r =
    -6.0000 % 分解后权系数
    -4.0000
     3.0000
p =
    -3.0000 % 极点
    -2.0000
    -1.0000
k =
     2 % 分解式中常数项
```

于是按照以上分解式, 查拉氏变换表可得

$$y(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t} - 4e^{-2t} + 3e^{-t}$$

若利用 `ilaplace()` 函数, 有如下程序:

```
% 直接进行拉氏逆变换
syms s; % 声明 s 为变量
y = ilaplace((2*s^3 + 5*s^2 + 3*s + 6)/(s^3 + 6*s^2 + 11*s + 6)); % 拉氏逆变换
运行结果为
y =
    2 * Dirac(t) - 6 * exp(-3 * t) - 4 * exp(-2 * t) + 3 * exp(-t)
```

其中 `Diract(t)` 函数为脉冲函数。

3.2 传递函数

控制理论中, 传递函数常用来描述能够用线性常系数微分方程表示的系统或元件输出输入

之间的关系,它建立在拉氏变换的基础上,不仅可以避免直接求解微分方程的麻烦,还可以分析系统结构及参数变化对系统性能的影响,是古典控制理论最重要的基本概念。

3.2.1 传递函数的基本概念

定义 零初始条件下,线性定常系统输出与输入拉氏变换之比称为传递函数。

对于高阶微分方程描述的线性定常系统,一般形式为

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \quad (3.43)$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 与 b_0, b_1, \dots, b_m 均为实常数,如果 $t \geq t_0$ 时的输入 $u(t)$ 及输出变量 $y(t)$ 及各阶导数在 $t = t_0$ 的初始值给定,则由式(3.43)可以确定 $y(t)$ 的值。尽管目前数字计算机中有很多求解高阶微分方程的成熟算法,但在控制系统分析与设计中一般尽量避免直接求解微分方程。

若假定初始条件为零,即 $y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0$,对式(3.43)两边同时进行拉氏变换,则有

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)Y(s) = (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0)U(s) \quad (3.44)$$

于是输出量 y 与输入量 u 之间的传递函数可以表示为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3.45)$$

若令

$$\begin{aligned} B(s) &= b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0 \\ A(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

则 $A(s)$ 称为系统的特征方程,而 $A(s) = 0$ 的根 $p_i (i = 1, \dots, n)$ 称为传递函数的极点,即系统的特征根; $B(s) = 0$ 的根 $z_j (j = 1, \dots, m)$ 称为系统的零点,故传递函数还可以表示为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (3.47)$$

极点 p_i 与零点 z_j 的数值完全取决于系统的结构参数即 a_0, a_1, \dots, a_{n-1} 与 b_0, b_1, \dots, b_m 。

由于实际物理系统的结构参数均为实数,故零、极点可以是实数,也可以是复数,如果是复数,则必为共轭复数。极点在复数平面上的分布不仅影响系统的稳定性,还与时域响应的运动形式密切相关。

3.2.2 关于传递函数的几点说明

(1) 拉氏变换是一种线性积分变换,它将变量从实数域映射到复数域,得到的结果不改变原方程所反映的事物本质,故传递函数能够反映系统本身的动态品质,是一种动态数学模型,并且只适用于线性定常系统。

(2) 传递函数是在零初始条件下定义的,这一方面是指外作用是在 t_0 时刻以后才作用于系统的,另一方面也指出,在输入加入系统之前,系统相对静止。如果工程系统能够满足这个条件,传递函数就可以完全表征系统动态性能。但是,零初始条件的系统具有一定的局限性,应用中只有同时考虑非零初始条件对系统输出响应产生的效果之后,才能完全了解系统的动态性能。

(3) 实际物理系统具有惯性,且能量有限,故一般有 $n \geq m$,而 $m > n$ 的情况多用于数学抽象、

社会问题等广义系统。传递函数中各系数都是物理元件参数,因而是实数。

(4) 传递函数只表明一个输入与一个输出的关系,同一系统若取不同变量做输出、或不同输入信号做输入,则传递函数的形式不同。

(5) 传递函数只能描述系统外部输出与输入之间的关系,无法表明中间变量的变化情况。

(6) 传递函数只取决于系统和元件的结构与参数,与外作用无关。

3.2.3 传递函数阵

对于状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.48)$$

其中 $\mathbf{x}(t)$ 为状态变量; $\mathbf{u}(t)$ 为输入量, $\mathbf{y}(t)$ 为输出量。

在零初始条件下,分别对状态方程和输出方程两边取拉氏变换,则有

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \quad (3.49)$$

即

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.50)$$

若 $\mathbf{D} = \mathbf{O}$, 则有

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (3.51)$$

如果 \mathbf{C} 的阶数为 $r \times n, r \neq 1$, 即为多输出系统,则由此可得到传递函数阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{y_1}{u_1} & \frac{y_1}{u_2} & \cdots & \frac{y_1}{u_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_r}{u_1} & \frac{y_r}{u_2} & \cdots & \frac{y_r}{u_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{r1} & G_{r2} & \cdots & G_{rm} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

例 3.16 第 2 章例 2.6 中货车悬挂系统的微分方程模型为

$$M_1 M_2 \frac{d^4 y_1}{dt^4} + (M_1 + M_2) c \frac{d^3 y_1}{dt^3} + [(k_1 + k_2) M_1 + k_1 M_2] \frac{d^2 y_1}{dt^2} + k_2 c \frac{dy_1}{dt} + k_1 k_2 y_1 = k_2 c \frac{dx}{dt} + k_1 k_2 x$$

若系统初始状态为静止状态,即初始条件为零,对上式两边进行拉氏变换,则有

$$\{M_1 M_2 s^4 + (M_1 + M_2) cs^3 + [(k_1 + k_2) M_1 + k_1 M_2] s^2 + k_2 cs + k_1 k_2\} Y_1(s) = (k_2 cs + k_1 k_2) X(s)$$

于是以 x 为输入, y_1 为输出的系统的传递函数为

$$\frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{k_2 cs + k_1 k_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1 + M_2) cs^3 + [(k_2 + k_2) M_1 + k_1 M_2] s^2 + k_2 cs + k_1 k_2} \quad (3.53)$$

若系统的状态及输出定义为 $x_1 = y_1, x_2 = dy_1/dt, x_3 = y_2, x_4 = dy_2/dt, y = y_1$, 并令 $u = x$, 则系统

的状态空间模型同式(2.37)即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M_1} & -\frac{c}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & \frac{c}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{M_2} & \frac{c}{M_2} & -\frac{k_1+k_2}{M_2} & -\frac{c}{M_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{M_2} \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x} \end{cases}$$

按式(3.51)得传递函数为

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \\ &= \frac{\left[\frac{cs+k_1}{M_1} \right] \frac{k_2}{M_2}}{s^4 + \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right] s^3 + \left[\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_1+k_2}{M_2} \right] s^2 + \frac{ck_2}{M_1 M_2} s + \frac{k_1 k_2}{M_1 M_2}} \\ &= \frac{k_2 cs + k_1 k_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1 + M_2) cs^3 + [(k_1 + k_2) M_1 + k_1 M_2] s^2 + k_2 cs + k_1 k_2} \end{aligned} \quad (3.54)$$

该式与式(3.53)相同。如果同时考虑输出量 y_2 , 则 $\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 于是得到传递函数阵为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}'(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(s)}{X(s)} \\ \frac{Y_2(s)}{X(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{1x}(s) \\ G_{2x}(s) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

式中 $G_{1x}(s)$ 与式(3.54)相同, $G_{2x}(s)$ 为

$$\begin{aligned} G_{2x}(s) &= \frac{Y_2(s)}{X(s)} \\ &= \frac{M_1 M_2 s^2 + ck_2 s + k_1 k_2}{M_1 M_2 s^4 + (M_1 + M_2) cs^3 + [(k_1 + k_2) M_1 + k_1 M_2] s^2 + k_2 cs + k_1 k_2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

例 3.17 第2章中例2.8 钻井平台与钻孔机的微分方程模型[式(2.45)]为

$$\begin{aligned} J_1 J_2 \frac{d^4 \theta_2}{dt^4} + (J_1 c_2 + J_2 c_1) \frac{d^3 \theta_2}{dt^3} + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} + (c_1 k + c_2 k) \frac{d\theta_2}{dt} \\ = J_1 \frac{d^2 \tau_2}{dt^2} + c_1 \frac{d\tau_2}{dt} + k\tau_2 - k\tau_1 \end{aligned}$$

若设初始状态为零状态, 则对上式两边进行拉氏变换以后可以得到

$$\begin{aligned} (J_1 J_2 s^4 + (J_1 c_2 + J_2 c_1) s^3 + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) s^2 + (c_1 k + c_2 k) s) \Theta_2(s) \\ = (J_1 s^2 + c_1 s + k) \Gamma_2(s) - k \Gamma_1(s) \end{aligned}$$

即输出量 $\Theta_2(s)$ 表示为

$$\Theta_2(s) = \frac{(J_1 s^2 + c_1 s + k) \Gamma_2(s) - k \Gamma_1(s)}{J_1 J_2 s^4 + (J_1 c_2 + J_2 c_1) s^3 + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) s^2 + (c_1 k + c_2 k) s} \quad (3.57)$$

系统输入信号由两部分构成,一为驱动力矩 τ_2 ,另一为阻力矩 τ_1 ,若考虑驱动力矩与钻井平台输出转角之间的关系,可先令阻力矩为零,即 $\tau_1 = 0$,则

$$\frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_2(s)} = \frac{J_1 s^2 + c_1 s + k}{J_1 J_2 s^4 + (J_1 c_2 + J_2 c_1) s^3 + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) s^2 + (c_1 k + c_2 k) s} \quad (3.58)$$

若考虑阻力矩与平台转角之间的关系,则令驱动力矩为零,即 $\tau_2 = 0$,于是有

$$\frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_1(s)} = \frac{-k}{J_1 J_2 s^4 + (J_1 c_2 + J_2 c_1) s^3 + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) s^2 + (c_1 k + c_2 k) s} \quad (3.59)$$

根据式(2.46),将钻井平台输出转角 θ_2 与钻孔机输出转角 θ_1 同时作为系统输出变量的状态空间模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{J_1} & -\frac{c_1}{J_1} & \frac{k}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J_2} & 0 & -\frac{k}{J_2} & -\frac{c_2}{J_2} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

上式两边分别进行拉氏变换并求解,可以得到

$$\frac{\mathbf{Y}(s)}{\Gamma(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_1(s)} & \frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_2(s)} \\ \frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_1(s)} & \frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_2(s)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

其中 $\frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_1(s)}$, $\frac{\Theta_2(s)}{\Gamma_2(s)}$ 分别如式(3.59)和式(3.58)所示,而 $\frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_1(s)}$, $\frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_2(s)}$ 则为

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_1(s)} &= \frac{J_2 s^2 + c_2 s + k}{J_1 J_2 s^4 + (J_1 c_2 + J_2 c_1) s^3 + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) s^2 + (c_1 k + c_2 k) s} \\ \frac{\Theta_1(s)}{\Gamma_2(s)} &= \frac{k}{J_1 J_2 s^4 + (J_1 c_2 + J_2 c_1) s^3 + (J_1 k + J_2 k + c_1 c_2) s^2 + (c_1 k + c_2 k) s} \end{aligned}$$

可以看出,对于多输入多输出、结构较为复杂的系统,状态空间模型以及由此构成的传递函数矩阵能够更好地描述系统中多个变量之间的关系。传递函数作为一个因子,描述了两个变量之间的动态因果关系,这两个变量既可以是整个系统的输入输出变量,也可以是系统中各元件的输入输出变量。

此外,传递函数概念的引入,给电网络建模带来很大方便。例如,电路中的线性元件电阻 R 、电容 C 、电感 L 的端电压与其上电流之间的关系为

$$u_R(t) = Ri_R(t), u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt, u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (3.60)$$

对以上各式进行拉氏变换,则有

$$\frac{U_R(s)}{I_R(s)} = R, \frac{U_C(s)}{I_C(s)} = \frac{1}{Cs}, \frac{U_L(s)}{I_L(s)} = Ls \quad (3.61)$$

其中, R 、 $\frac{1}{Cs}$ 、 Ls 称为复数阻抗, 这与电路理论中以傅里叶变换形式表示的复数阻抗意义是相同的, 因为拉氏变换是一种特殊的傅里叶变换。

例 3.18 对于图 3.1 所示的运算放大器电路, 试利用复数阻抗法求传递函数 $U_2(s)/U_1(s)$ 。

解 对于图 3.1 所示运算放大器电路, 根据放大器负端线性运算法则, 有

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{-R_2}{R_1 // \frac{1}{Cs}} = \frac{-R_2}{\frac{R_1}{R_1 Cs + 1}} = -\frac{R_2}{R_1} (R_1 Cs + 1)$$

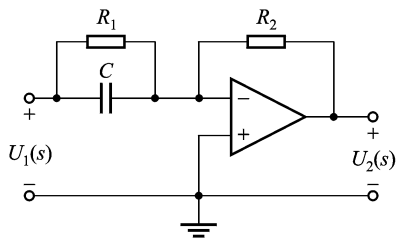


图 3.1 运算放大器电路

3.3 动态结构图

在第 2 章已经注意到, 即使是建立控制系统中被控对象的数学模型, 也无法仅仅通过一个微分方程来完成, 往往是由多个微分方程构成微分方程组, 通过联立, 消去中间变量, 得到一个子系统或元件的传递函数模型。实际中的控制系统, 一般由多个元件构成, 若希望准确把握系统中被控变量与控制量之间的关系、了解信号的传递过程, 利用传递函数概念、结合系统职能方块图建立的动态结构图与信号流图, 不仅可以将系统中信号的传递关系表示得十分清楚, 而且通过动态结构图和信号流图, 可以简化求取传递函数的过程, 得到复杂系统的总传递函数。

3.3.1 动态结构图的基本元素

由于简洁灵活, 结构图经常用来表示所有类型的系统, 它既可以仅仅描述系统的构成与连接关系, 也可以与传递函数一起描述系统中变量之间存在的因果关系。例如图 3.2a 所示的开环直流电动机速度控制系统, 图中仅表示了系统各部件的功能连接关系, 没有给出数学方程。当系统所有元件的函数关系已知时, 如图 3.2b 所示, 该图便可以作为数学模型用于分析和仿真。

一般说来, 结构图既可以表示线性系统, 也可以表示非线性系统。图 3.2b 中电动机的输入电压是功率放大器的输出, 而实际上功率放大器是非线性的。若采用小偏差线性化方法, 将功率放大器进行线性化, 令其输入输出信号的拉氏变换分别为 $U_i(s)$ 与 $U_a(s)$, 则其特性就可以由传递函数 $U_a(s)/U_i(s) = K$ 来表示。如果电动机是线性的, 或者更确切地说, 电动机工作在线性区, 它的动态特性可以用传递函数来表示, 就可以将图 3.2a 中各个部件的名称用数学表达式替换, 即将表示功能连接关系的原理方框图, 转换为如图 3.2b 所示的、表示系统中信号传递关系的动态结构图。

动态结构图的基本构成元素如图 3.3 所示, 包括函数块 $G(s)$ (图 3.3a), 用于表示两个经拉氏变换以后的信号 $X_1(s)$ 、 $X_2(s)$ 之间的线性动态关系; 综合点 (图 3.3b) 表示所有信号的代数和, 可以有多个输入信号, 但是只有唯一的输出; 引出点 (图 3.3c) 表示同一信号被多处引用。

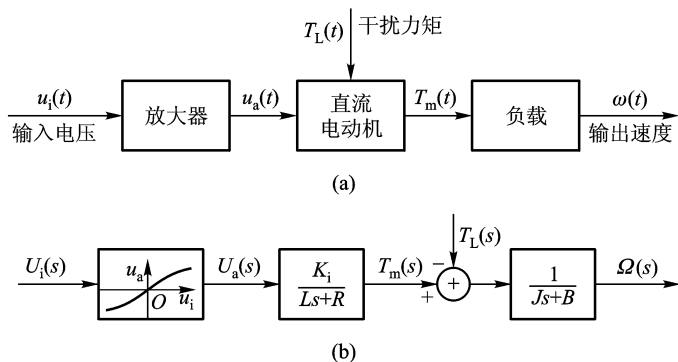


图 3.2 直流电动机控制系统

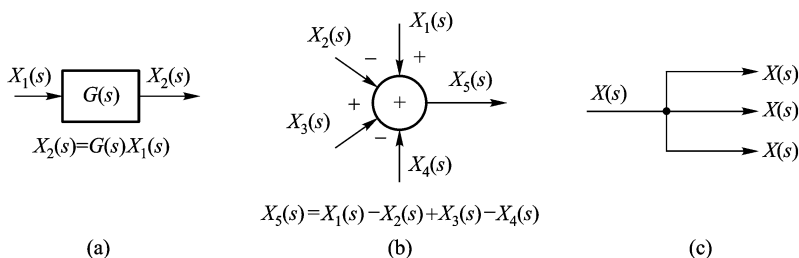


图 3.3 动态结构图的基本构成元素

利用以上基本元素,任何复杂系统的信号传递特性均可以表示出来。

例 3.19 由加热器与对象以及温度传感器构成的闭环温度控制系统,其中加热器的输出热量 x 使对象温度 y 的变化满足关系式

$$\frac{dy}{dt} + by = bx$$

在零初始条件下对上式进行拉氏变换,有

$$Y(s) = \frac{b}{s+b}X(s)$$

加热器输出热量 x 与加热器输入信号 e 满足下式:

$$\frac{dx}{dt} + ax = ae$$

零初始条件下拉氏变换为

$$X(s) = \frac{a}{s+a}E(s)$$

温度传感器测量输出量后反馈至输入端,与控制信号综合,假设传感器增益为 1,则综合点处有 $e = r - y$,零初始条件下的拉氏变换为 $E(s) = R(s) - Y(s)$ 。

于是根据以上各变量之间的因果关系,便可以得到如图 3.4 所示的动态结构图,这是一个典型的反馈系统。

例 3.20 第 2 章中例 2.10 的无源网络,根据欧姆定律与基尔霍夫定律,同时应用复数阻抗

的概念,可以直接建立如下描述系统的方程组:

$$\begin{cases} I_1 R_1(s) = U_1(s) - U_2(s) \\ I_a R_2(s) = U_2(s) - U_3(s) \\ U_2(s) = \frac{1}{C_1 s} [I_1(s) - I_a(s)] \\ U_3(s) = \frac{1}{C_2 s} I_a(s) \end{cases} \quad (3.62)$$

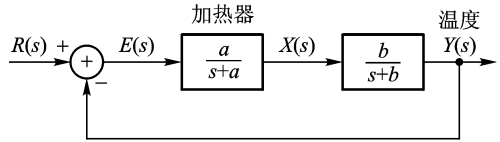


图 3.4 温度控制系统动态结构图

根据方程组描述的各个变量之间的关系,可以得到图 3.5 所示的动态结构图。

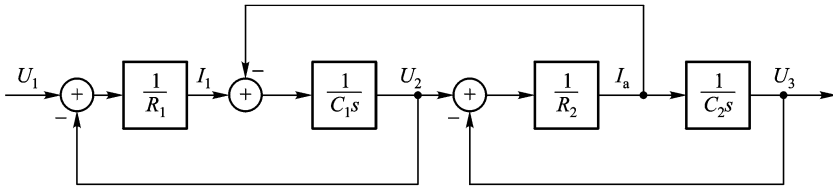


图 3.5 无源网络的动态结构图

由图 3.5 可以很清楚地看到,π 型滤波器并不是两个无源网络的简单串联,网络之间存在负载效应。从这个意义上讲,动态结构图较之微分方程更为形象,更能够直观地表明信号之间存在的连接与传递关系。

动态结构图是系统原理图与数理方程的结合,是数学模型的图形表示,它形象、定量地描述了信号间的传递特性,避免了抽象的数学描述,直观地描述了元部件特性对系统性能的影响,因而也是系统的一种动态模型。

3.3.2 动态结构图的化简

对于单输入单输出系统而言,动态结构图的化简即是通过一系列简化法则,最终将系统的结构图化为关于一个输入(系统输入)、一个输出(系统输出)的函数块。

由例 3.20 知道,图 3.5 是式(3.62)的图形表示,若最终化简为一个函数块,表明一个输入量与一个输出量之间的关系,从方程组角度而言,是通过消除中间变量,最终得到变量 $U_3(s)$ 和 $U_1(s)$ 之间的关系,遵循的原则即是等效变换原则。而从动态结构图角度而言,便是结构图的化简。

1. 动态结构图基本结构与运算法则

首先针对动态结构图的三种基本结构:串联、并联及反馈,分析其运算法则。

1) 串联结构

两个函数块以串联形式连接,中间不存在引出点或综合点,如图 3.6a 所示。若将两者合并,用一个传递函数 $G(s)$ 表示,则有

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \quad (3.63)$$

等效结构如图 3.6b 所示。推广至 n 个传递函数的串联,则有

$$G(s) = G_1(s) G_2(s) \cdots G_n(s) \quad (3.64)$$

2) 并联结构

两个函数块以并联形式连接,如图 3.7a 所示。若合并,则为两者的代数和,有

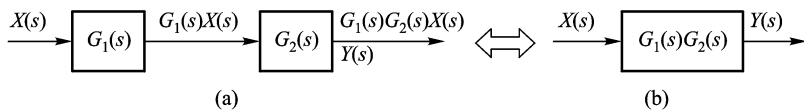


图 3.6 串联结构的运算

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) \quad (3.65)$$

等效结构如图 3.7b 所示。推广至 n 个传递函数的并联有

$$G(s) = G_1(s) \pm G_2(s) \cdots \pm G_n(s) \quad (3.66)$$

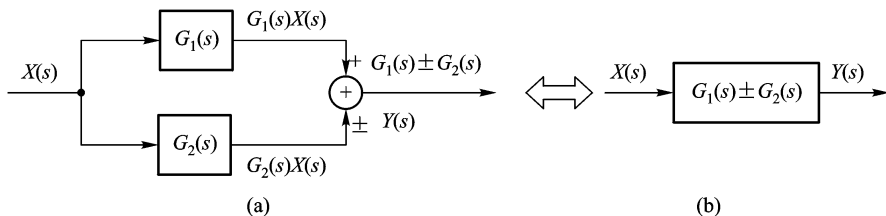


图 3.7 并联结构的运算

3) 反馈结构

连接方式如图 3.8a 所示的两个函数块称为反馈结构,其中 $G(s)$ 称为前向通路传递函数,或称前向增益, $H(s)$ 称为反馈通路传递函数,或称反馈增益。符号为正,表示正反馈,符号为负,表示负反馈。按图中信号传递关系有

$$\begin{cases} E(s) = X(s) \pm H(s)Y(s) \\ Y(s) = G(s)E(s) \end{cases} \quad (3.67)$$

于是

$$\begin{cases} Y(s) = G(s)X(s) \pm G(s)H(s)Y(s) \\ \Phi(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)}{1 \mp G(s)H(s)} \end{cases} \quad (3.68)$$

等效结构如图 3.8b 所示。对于 $H(s) = 1$ 的情况,常称为单位反馈。

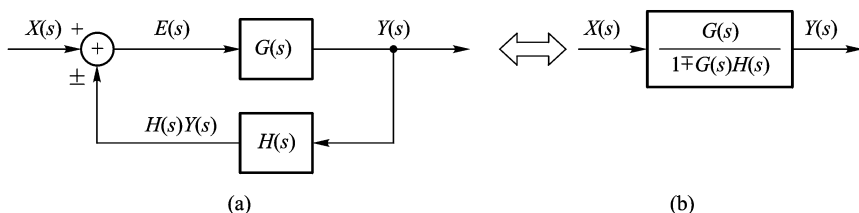


图 3.8 反馈结构的运算

2. 动态结构图等效变换法则

结构图通过等效变换,变换为前述的三种基本结构,然后再运用运算法则,得到一个输入与一个输出之间的关系。

1) 综合点的移动

综合点为代数运算点,这种点的移动即是变换求和的位置。如图 3.9a 所示,将综合点移动至函数块之前,即将先相乘后综合的运算,变换为先综合后相乘的运算,在保持信号关系不变的前提下,有

$$X_3(s) = G(s)X_1(s) \pm X_2(s) = G(s) \left[X_1(s) \pm \frac{1}{G(s)}X_2(s) \right] \quad (3.69)$$

得到图 3.9a 右图所示的连接关系。同样,如果将综合点移动至函数块之后,将先综合后相乘的运算,转换为先相乘后综合的运算,为保持信号传递关系不变,则有

$$X_3(s) = G(s) [X_1(s) \pm X_2(s)] = G(s)X_1(s) \pm G(s)X_2(s) \quad (3.70)$$

如图 3.9b 所示。

由于综合点为代数运算点,综合点之间可以相互移动,如图 3.9c 所示。既可以将一个综合点拆分为两个,也可以将两个综合点组合为一个,如图 3.9d 所示。

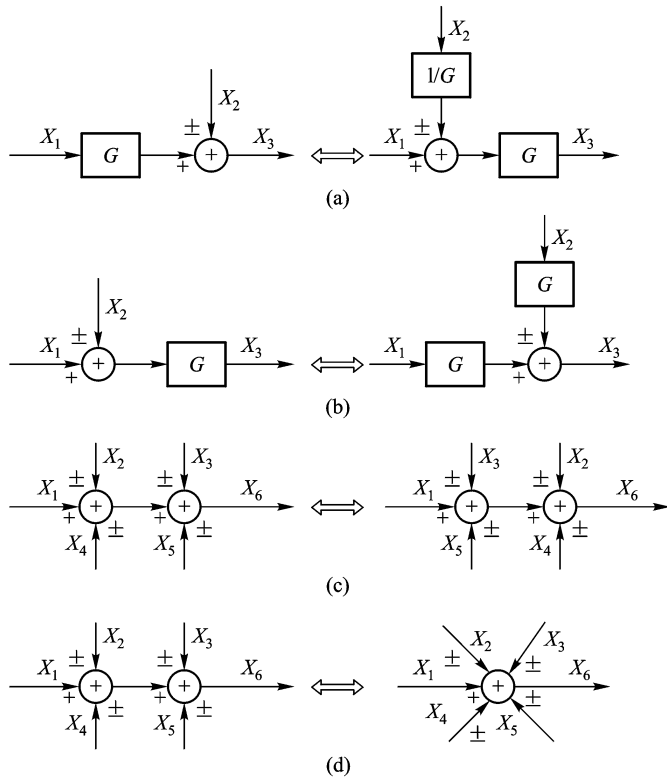


图 3.9 综合点的移动

2) 引出点的移动

引出点引出的是变量,改变引出的位置,不应改变引出的变量本身。例如, $X_1(s) = G(s)X(s)$ 为引出变量。如果将引出点前移,为保证引出变量不变,则需乘以 $G(s)$,表示方法如图 3.10a 所示。同样,若将引出点后移,为保证引出量不变,则有

$$X_1(s) = G_1(s)X(s) = G_1(s)G_2(s)\frac{1}{G_2(s)}X(s) \quad (3.71)$$

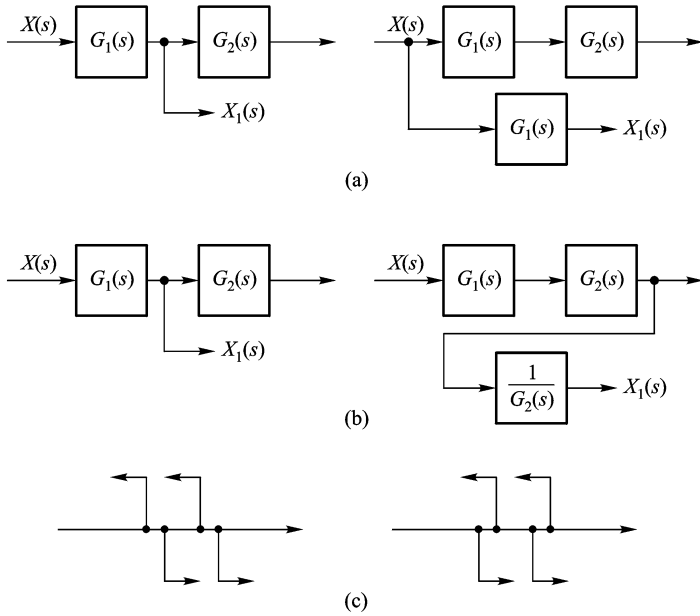


图 3.10 引出点的移动

变量间关系如图 3.10b 所示。由于若干个相邻引出点为同一变量,因此相互之间交换位置不会改变引出信号的值,如图 3.10c 所示。

3) 综合点与引出点之间的移动

从原则上讲,应尽量避免综合点与引出点之间的移动。必要的情况下需要移动,仍然是要遵循等效原则,保证引出的变量关系不变。如图 3.11a 所示,若将引出点 $X(s)$ 引至综合点之前,则由于 $X(s) = X_1(s) - X_2(s)$,故需增加综合点,使其减去 $X_2(s)$,从而保证变量关系不变。同样,图 3.11b 中引出点后移,因为引出点 $X(s) = X_1(s)$,故需增加综合点,加上 $X_2(s)$,以保证变量关系不变。

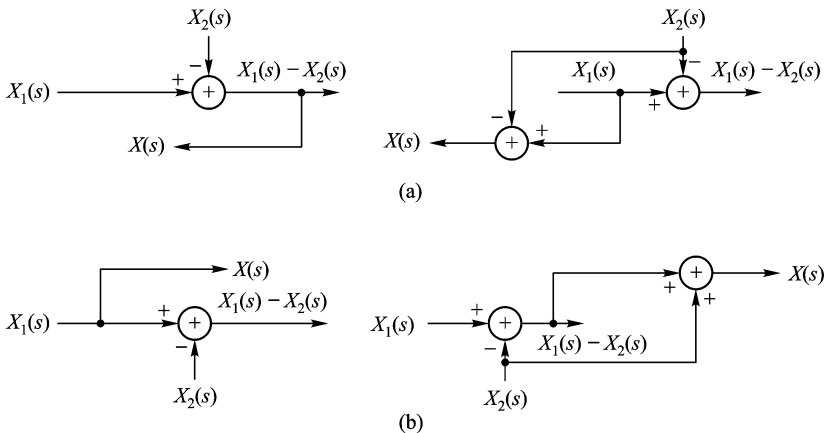


图 3.11 综合点与引出点之间的移动

例 3.21 简化如图 3.12 所示系统的动态结构图,并求 $C(s)/R(s)$ 。

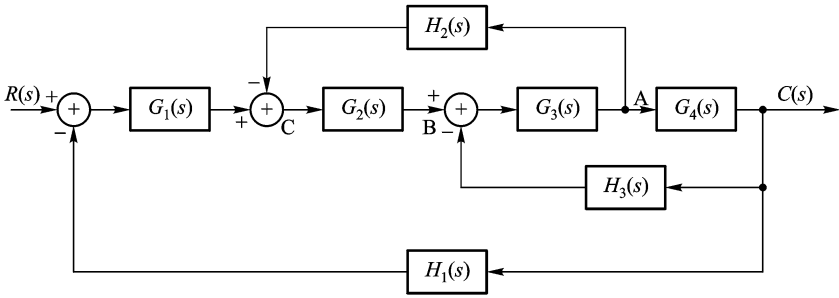


图 3.12 例 3.21 图

解 图 3.12 是一个多回路动态结构图,并且内回路有引出点,使得回路之间存在交叉,不能直接应用运算法则。为了实现从内回路到外回路的逐步化简,首先要消除交叉连接,然后再应用

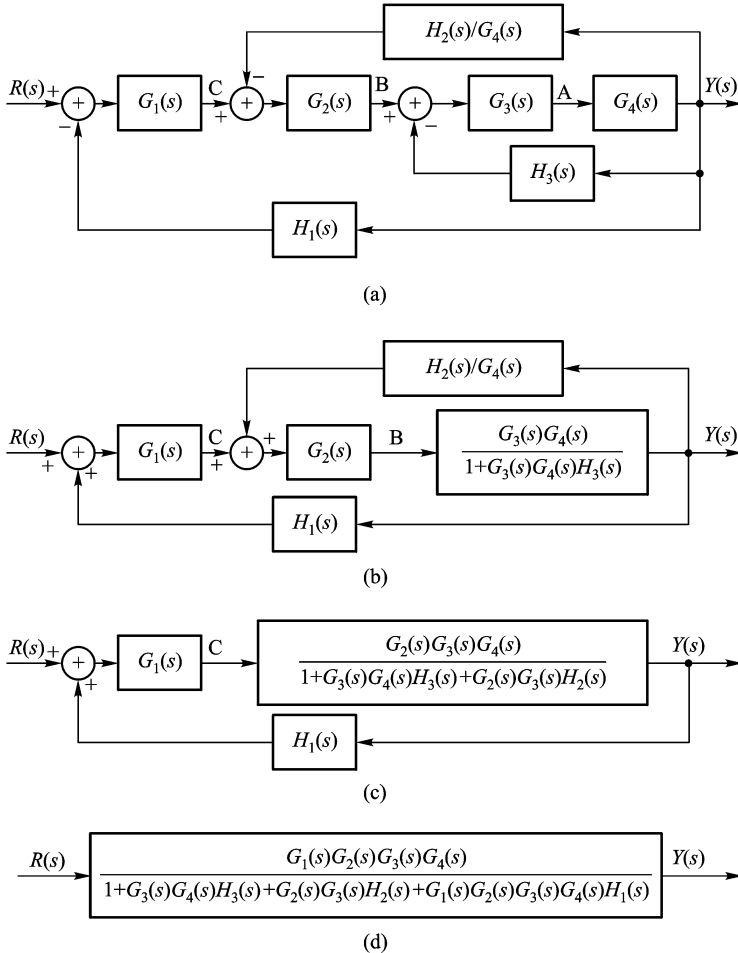


图 3.13 图 3.12 的动态结构图变换

反馈运算法则。

方法之一是将 A 点后移,如图 3.13a 所示,然后由内至外,逐个回路应用反馈运算法则,如图 3.13b、图 3.13c 所示,最后得到图 3.13d,即输出输入之间的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_3(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s) + G_1(s)G_2(s)G_3(s)G_4(s)H_1(s)}$$

此外,由图 3.12 看出,还可以将综合点 B 前移至 C,然后交换综合点位置,再由内而外应用反馈运算法则。一般说来,对于同一结构图,不止一种变换方法。

例 3.22 求图 3.14 所示系统的传递函数 $Y(s)/R(s)$ 。

解 该动态结构图有两处综合点与引出点交连,移动时应格外注意。若将综合点 A 前移至 B 点,然后与 B 点交换位置,得到图 3.15a 所示的结构,然后将左侧并联结构与右侧的多回路反

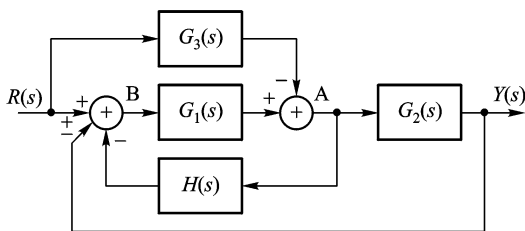


图 3.14 例 3.22 图

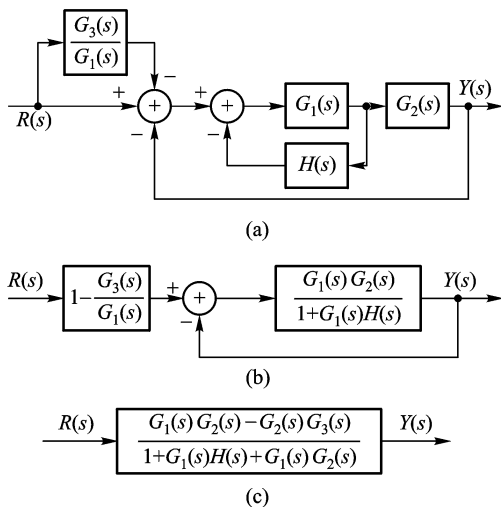


图 3.15 图 3.14 的动态结构图变换

馈结构分别应用运算法则,得到图 3.15b 所示的动态结构图,进一步运算,得到图 3.15c 所示的动态结构图,即输出输入之间的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s) - G_2(s)G_3(s)}{1 + G_1(s)H(s) + G_1(s)G_2(s)}$$

3.4 信号流图

信号流图也是一种图形化的数学模型,可以认为它是动态结构图的简化版本,主要用于表示采用代数方程组描述的线性系统。除了表示符号不同以外,信号流图遵循较为严格的数学规则,定义为线性代数方程组的图形描述。采用信号流图最大的优点是可以运用梅森公式直接求解系统的传递函数,而无需进行任何简化。

3.4.1 信号流图的基本元素

下面通过代数方程组

$$\begin{cases} y_2 = a_{12}y_1 + a_{32}y_3 \\ y_3 = a_{23}y_2 + a_{43}y_4 \\ y_4 = a_{24}y_2 + a_{34}y_3 + a_{44}y_4 \\ y_5 = a_{25}y_2 + a_{45}y_4 \end{cases}$$

的信号流图(图 3.16)表示来说明信号流图的基本构成元素。

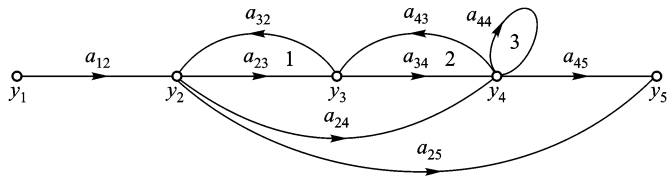


图 3.16 代数方程组的信号流图

由图 3.16 可以看出,信号流图是由带增益的支路与节点构成,其中:

- (1) 输入节点(源):仅有输出支路的节点,如图中的 y_1 。
- (2) 输出节点(汇):仅有输入支路的节点,如图中的 y_5 。

当不存在输出节点时,可以选取流图中一个变量定义为输出变量,然后从该节点引出一条增益为 1 的支路,就形成了输出节点,图中 y_2 、 y_3 、 y_4 均可以形成输出节点。

注意:不能简单地通过引出一条增益为 1 的支路,把非输入节点变成输入节点。

- (3) 混合节点:既有输出支路又有输入支路的节点,如图中的 y_2 、 y_3 、 y_4 。

- (4) 通路:从一个节点出发,沿支路箭头方向,通过一些节点到达某一节点的途径。

例如,从节点 y_2 至节点 y_4 的通路有 2 条,一条为直接通路,即由增益为 a_{24} 的单一支路构成,另一条经过节点 y_3 ,由增益分别为 a_{23} 、 a_{34} 的两条支路构成。

- (5) 前向通路:起始于输入节点,终止于输出节点,与任一节点只相遇一次的通路。

如果定义 y_1 为输入节点, y_5 为输出节点,则前向通路有三条:经 y_2 、 y_3 、 y_4 节点,由增益分别为 a_{12} 、 a_{23} 、 a_{34} 、 a_{45} 的支路构成;经 y_2 、 y_4 节点,由增益分别为 a_{12} 、 a_{24} 、 a_{45} 的支路构成;经 y_2 节点,由增益分别为 a_{12} 、 a_{25} 的两条支路构成。

- (6) 回路:起始并终止于同一节点,并与其他节点仅相遇一次的通路。

图 3.16 中的回路有三个:增益分别为 a_{23} 、 a_{32} 的支路构成的回路 1,增益分别为 a_{34} 、 a_{43} 的支路构成的回路 2,增益为 a_{44} 的回路 3。

(7) 互不接触回路:两个以上不存在公共节点的回路。

图 3.16 中回路 1 与回路 2 在节点 y_2 处相互接触,回路 2 与回路 3 在节点 y_4 处接触,而回路 1 与回路 3 没有接触的节点,故为互不接触回路。

(8) 通路增益:通路上各支路增益的乘积。

如图 3.16 所示,节点 y_2 经 y_3 至节点 y_4 的通路增益为 a_{23} 、 a_{34} 。

(9) 回路增益:回路上各支路增益的乘积。

图 3.16 中回路 1 的增益为 a_{23} 、 a_{32} 。

需要特别注意的是:

(1) 信号流图只适用于线性系统,只表示代数方程组的因果联系。

(2) 信号只沿支路箭头方向传递。

(3) 信号流图中的节点用来表示变量,它把所有进入这个节点的支路信号叠加起来,并把信号送给这个节点的所有输出支路。

鉴于使用习惯及目的的不同,常会遇到动态结构图与信号流图之间的转换情况,下面详细予以说明。

3.4.2 动态结构图与信号流图之间的转换

图 3.17 指出了信号流图与动态结构图在图形与表示方法上的基本区别,其中最为关键的一点是,信号流图中的节点相当于动态结构图的综合点与引出点共同作用的效果,既完成信号的综合,又表示综合后的信号本身。若动态结构图表示的系统为线性系统,则可以将其转换为信号流图,步骤如下:

(1) 将动态结构图中所有的函数块以支路形式表示。

(2) 将动态结构图中的综合点和引出点表示为节点,节点处的运算为加法,动态结构图中箭头上的负号以增益 -1 的形式与支路增益合并在一起。

(3) 实引出点(未与综合点相连的引出点)以节点表示。

(4) 每个输入信号以输入节点形式表示。

(5) 为使连接关系更为清晰,可以增加单位增益支路。

如图 3.18a 所示,5 个函数块 $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 、 $G_3(s)$ 、 $G_4(s)$ 、 $H_1(s)$,加上分别表示 $X_2(s)$ 和 $R(s)$ 的两条单位增益支路,可以由图 3.18b 中的 7 条支路来表示。结构图中有两处综合点与引出点交联在一起,即 $E(s)$ 与 $Y(s)$,两个不与综合点相连的实引出点 $X_1(s)$ 、 $X_2(s)$ 以及输入 $R(s)$,在信号流图中分别由 5 个节点来表示。图 3.18a 中的两个负号在图 3.18b 中分别加在 $H_1(s)$ 支路与 $X_2(s)$ 节点的引出支路上。

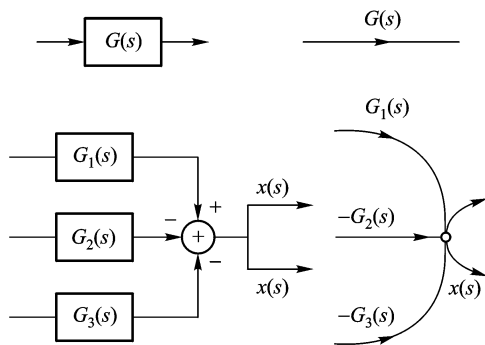


图 3.17 信号流图与动态结构图比较

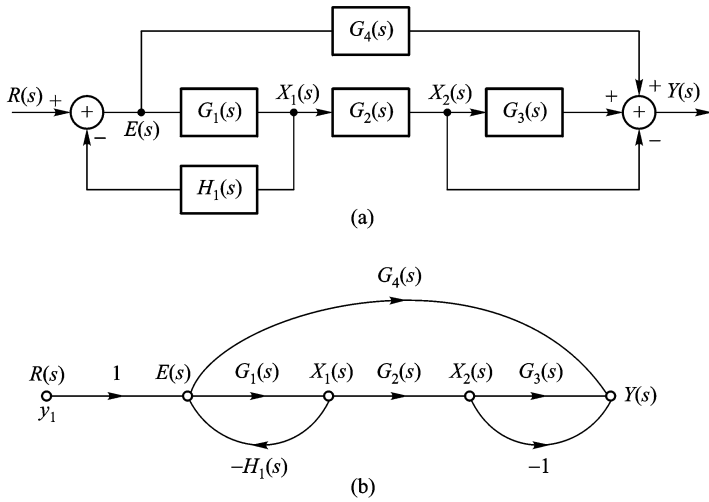


图 3.18 结构图与信号流图之间的转换

3.4.3 梅森公式

根据信号流图,利用梅森公式,可以无需变换,一步求出系统的传递函数,即对于单输入单输出系统,输入节点到输出节点的总增益可以由下式计算:

$$G(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_k \Delta_k \quad (3.72)$$

式中, $G(s)$ ——待求的从输入节点到输出节点的总增益,或称传递函数。

Δ ——系统特征式,并且有

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots \quad (3.73)$$

其中, $\sum L_i$ 表示所有回路增益之和; $\sum L_i L_j$ 表示所有两两互不接触回路增益之积之和; $\sum L_i L_j L_k$ 表示所有三三互不接触回路增益之积之和。

P_k ——第 k 条前向通路增益。

Δ_k ——第 k 条前向通路的代数余子式,即将特征式 Δ 中与第 k 条前向通路相接触的回路所在项除去以后余下的部分。

例 3.23 由图 3.19 的信号流图求 $\frac{Y}{R}$ 。

解 在图 3.19 中共有 5 个回路,所以有

$$\sum_{i=1}^5 L_i = -G_1 G_2 H_1 - G_2 G_3 H_2 - G_1 G_2 G_3 - G_4 H_2 - G_1 G_4$$

这 5 个回路均相互接触,故 $\sum L_i L_j = 0$ 。前向通路有两条,即 $P_1 = G_1 G_2 G_3$, $P_2 = G_1 G_4$ 。

由于这两条前向通路分别与所有回路都接触,故有 $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 1$,于是可以得到输出 Y 与输入 R 之间的传递函数 G 为

$$G = \frac{Y}{R} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2}{1 - \sum L_i} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 G_4}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 + G_4 H_2 + G_1 G_4}$$

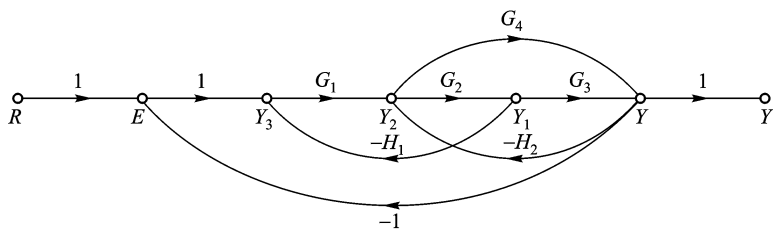


图 3.19 例 3.23 信号流图

例 3.24 求图 3.16 所示信号流图的传递函数 y_5/y_1 。

解 如前所述,图 3.16 中共有 3 个回路,则

$$\sum_{i=1}^3 L_i = a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43} + a_{44}$$

其中有一组两两互不接触回路,则

$$\sum L_i L_j = a_{23}a_{32}a_{44}$$

前向通路有三条,即 $P_1 = a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}$, $P_2 = a_{12}a_{24}a_{45}$, $P_3 = a_{12}a_{25}$ 。第 1、2 条通路与所有回路相接触,第 3 条通路与回路 3 不接触,故 $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta_3 = 1 - a_{44}$ 。于是 y_5 与 y_1 之间的传递函数为

$$\frac{y_5}{y_1} = \frac{a_{12}a_{23}a_{34}a_{45} + a_{12}a_{24}a_{45} + a_{12}a_{25}(1 - a_{44})}{1 - a_{23}a_{32} - a_{34}a_{43} - a_{44} + a_{23}a_{32}a_{44}}$$

例 3.25 求图 3.20 所示信号流图的传递函数 $\frac{Y_5}{Y_1}$ 。

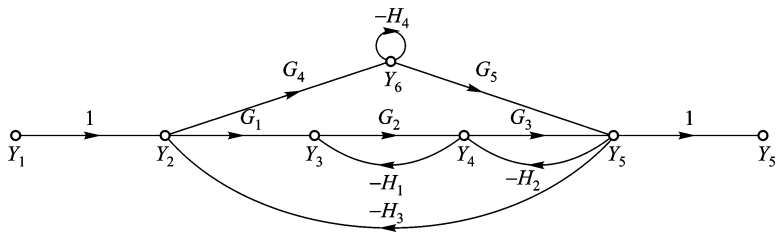


图 3.20 信号流图

解 图 3.20 中有 5 个反馈回路,分别为

$$L_1 = -G_2H_1, L_2 = -G_3H_2, L_3 = -G_1G_2G_3H_3, L_4 = -G_4G_5H_3, L_5 = -H_4$$

其中两两互不接触的回路有四组,为

$$L_1L_5 = G_2H_1H_4, L_2L_5 = G_3H_2H_4, L_3L_5 = G_1G_2G_3H_3H_4, L_1L_4 = G_2G_4G_5H_1H_3$$

没有三三互不接触回路,故特征式为

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j \\ &= 1 + G_2H_1 + G_3H_2 + G_1G_2G_3H_3 + G_4G_5H_3 + H_4 + \\ &\quad G_2H_1H_4 + G_3H_2H_4 + G_1G_2G_3H_3H_4 + G_2G_4G_5H_1H_3 \end{aligned}$$

前向通路有两条, $P_1 = G_1G_2G_3$, $P_2 = G_4G_5$, 代数余子式分别为 $\Delta_1 = 1 + H_4$, $\Delta_2 = 1 + G_2H_1$, 于是可以得到系统的传递函数为

$$\frac{Y_3}{Y_1} = \frac{G_1 G_2 G_3 (1 + H_4) + G_4 G_5 (1 + G_2 H_1)}{\Delta}$$

求取系统传递函数时,如果是以动态结构图的形式给出,则为应用梅森公式,可以首先将结构图转换为信号流图的形式,然后针对信号流图应用梅森公式。例如图 3.18a 所示系统,首先转换为如图 3.18b 所示的信号流图,然后再利用梅森公式,可以得到系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 (G_3 - 1) + G_4}{1 + G_1 H_1}$$

由于动态结构图与信号流图之间存在的相似关系,当动态结构图中各个函数块均是线性的,或者说动态结构图描述的是线性系统时,可以直接应用梅森公式求取传递函数。

多输入多输出系统求取传递函数时,根据线性系统满足叠加定理的特性,针对不同输入与输出分别讨论。

例 3.26 针对图 3.21 中三输入二输出系统,分别求取传递函数 $\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}$ 、 $\frac{Y_1(s)}{R_2(s)}$ 、 $\frac{Y_1(s)}{R_3(s)}$ 、 $\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}$ 、 $\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}$ 、 $\frac{Y_2(s)}{R_3(s)}$ 。

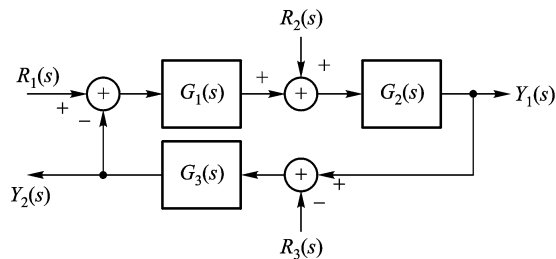


图 3.21 多输入多输出系统

解 由于系统中各函数块中的函数均为传递函数,则该结构图表示的系统为线性系统,可以直接应用梅森公式。

首先考虑输入 $R_1(s)$ 的作用,令 $R_2(s) = R_3(s) = 0$,于是有

$$\frac{Y_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 G_3}, \quad \frac{Y_2(s)}{R_1(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3}$$

考虑输入 $R_2(s)$ 时,令 $R_1(s) = R_3(s) = 0$,有

$$\frac{Y_1(s)}{R_2(s)} = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 G_3}, \quad \frac{Y_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3}$$

考虑输入 $R_3(s)$ 时,令 $R_1(s) = R_2(s) = 0$,有

$$\frac{Y_1(s)}{R_3(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3}, \quad \frac{Y_2(s)}{R_3(s)} = \frac{-G_3}{1 + G_1 G_2 G_3}$$

可以看出,对于多输入多输出系统,梅森公式较结构图变换能够更迅速地得到结果。

3.4.4 基于 MATLAB 的结构图变换仿真

MATLAB 中,进行结构图变换仿真时主要应用的函数有串联运算函数 `series()`、并联运算函

数 `parallel()`、反馈运算函数 `feedback()` 等。

1. 系统输入函数 `tf()`、`zpk()`

在 MATLAB 环境中,进行控制系统仿真的第一步,是建立系统的模型。利用 `tf()` 与 `zpk()` 函数可以在 MATLAB 中得到传递函数对象,两者不同之处在于函数调用的参数与形成的传递函数的形式不同。

对于 `tf()` 函数,调用格式为 `sys = tf(num,den)`,其中 `num`、`den` 分别为传递函数的分子、分母系数构成的向量,两者的维数决定了生成的 `sys` 是传递函数还是传递函数阵。例如调用格式为 `h = tf(5,[1 1])`,则生成传递函数对象 $h = \frac{5}{s+1}$ 。若调用格式为 `h = tf(5;[1 5 6]),[1 1];[1 1 0])`,则因分子、分母参数的维数均为 2,于是则生成 2×1 的传递函数阵,即为

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{s+1} \\ \frac{s^2+5s+6}{s^2+s} \end{bmatrix}$$

`zpk()` 函数则是将分子、分母的零、极点所构成的向量作为参数,生成以分子分母零、极点形式表达的传递函数对象,函数调用的格式为 `sys = zpk(z,p,k)`,其中 `z`、`p`、`k` 分别为传递函数的零点、极点以及增益构成的向量。同样,参数的维数决定了生成的对象是传递函数还是传递函数阵。例如调用格式为 `h = zpk([], [2 3], 1)`,则生成传递函数对象为 $\frac{1}{(s-2)(s-3)}$ 。若调用格式为 `h = zpk([-1]; [-2 -3]), [-1]; [0 -1]), [-5 1])`,则生成传递函数阵

$$h = \begin{bmatrix} \frac{-5}{s+1} \\ \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

对于形式为 $G(s) = \frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$ 的传递函数模型,若采用 `tf()` 函数建立传递函数对象,则首先需要利用多项式相乘函数 `conv()` 将零、极点形式表示的传递函数展开为多项式形式,于是有程序及运行结果为

```
den = conv([1 2],[1 3]);den = conv(den,[1 4]);    %分母三个因子相乘
sys = tf(2*[1 1],den);                          %求传递函数
```

运行结果为

Transfer function:

2 s + 2

s³ + 9s² + 26s + 24

若采用 `zpk()` 函数建立模型,则有程序及运行结果为

```
sys = zpk([-1],[ -2, -3, -4], 2)                %分子分母的零点以向量形式构
                                                成 zpk 的参数
```

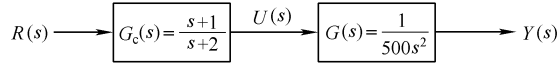
运行结果为

Zero/pole/gain:

$$\frac{2(s+1)}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

2. 串联运算函数 series()

当调用格式为 `series(sys1,sys2)`, 则完成 `sys1` 与 `sys2` 的相乘运算, 即等效于 `sys1 * sys2`。若模型为传递函数阵, 则应满足矩阵运算条件。对于下面的串联结构:



利用 `series()` 函数求串联后传递函数的 MATLAB 程序及运行结果为:

```
>> gc = tf([1 1],[1 2]); g = tf(1,[500 0 0]); % 两个环节参数赋值
>> sys = series(gc,g)
```

Transfer function:

$$s + 1$$

$$500 s^3 + 1000 s^2$$

若函数的调用格式为 `series(sys1,sys2,outputs1,outputs2)`, 则是将由 `outputs1` 定义的系统 `sys1` 的输出与由 `outputs2` 定义的系统 `sys2` 的输入相串联, 从而得到关于一个输入与一个输出之间的传递函数。若两系统的传递函数阵为

$$\text{sys1} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1}{U} \\ \frac{Y_2}{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{s+1} \\ \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)} \end{bmatrix}, \quad \text{sys2} = \begin{bmatrix} \frac{Z}{W_1} & \frac{Z}{W_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-6}{s+5} & \frac{(s+3)(s+4)}{s(s+5)} \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

执行指令 `series(sys1,sys2,1,2)`, 即将 `sys1` 的输出 Y_1 作为 `sys2` 的 W_2 输入, 从而得到

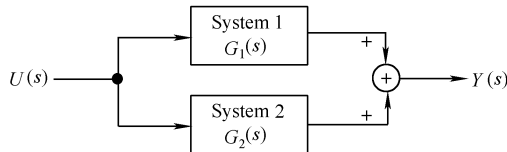
$$\frac{-5(s+3)(s+4)}{s(s+5)(s+1)}$$

若执行指令 `series(sys2,sys1,1,1)`, 则得到

$$\begin{bmatrix} \frac{30}{(s+1)(s+5)} & \frac{-5(s+3)(s+4)}{s(s+1)(s+5)} \\ \frac{-6(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+5)} & \frac{(s+2)(s+3)^2(s+4)}{s^2(s+1)(s+5)} \end{bmatrix}$$

3. 并联运算函数 parallel()

若调用格式为 `parallel(sys1,sys2)`, 则完成两个相同维数的传递函数的相加运算。对于下面



的并联结构, 若 $G_1 = \frac{s+1}{s+2}$, $G_2 = \frac{1}{500s^2}$, 则 MATLAB 程序及运算结果为:

```
>> g1 = tf([1 1],[1 2]); g2 = tf(1,500 * [1 0 0]);
>> sys = parallel(g1,g2)
```

Transfer function:

$$500 s^3 + 500 s^2 + s + 2$$

$$500 s^3 + 1000 s^2$$

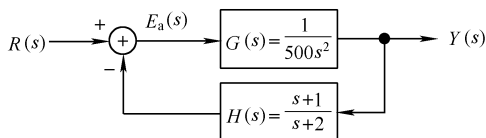
当调用格式为 `parallel(sys1,sys2,in1,in2,out1,out2)`, 则将由 `in1` 定义的 `sys1` 输入端与由 `in2` 定义的 `sys2` 的输入端作为并联的共同输入端, 由 `out1` 定义的 `sys1` 的输出端与由 `out2` 定义的 `sys2` 的输出端作为并联叠加端, 如由式 (3.74) 定义的两个系统, 当执行指令 `parallel(sys1,sys2,1,2,2,1)` 后, 得到传递函数阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{-5}{s+1} & \frac{2s(s+1.586)(s+3)(s+4.414)}{s^2(s+1)(s+5)} \\ 0 & \frac{-6}{s+5} \end{bmatrix}$$

4. 反馈运算函数 `feedback()`

当调用格式为 `feedback(sys1,sys2,-1)`, 则计算以 `sys1` 为前向通路传递函数、`sys2` 为反馈通路传递函数的负反馈系统的传递函数。

对于下面的反馈结构:



MATLAB 程序及运算结果为

```
>> g=tf(1,500*[1 0 0]);h=tf([1 1],[1 2]);
```

```
>> sys=feedback(g,h,-1)
```

Transfer function:

$$s+2$$

$$500 s^3 + 1000 s^2 + s + 1$$

`feedback()` 函数中第三个参数是反馈极性, `-1` 为负反馈, `1` 为正反馈, 默认为 `-1`。若为单位反馈, `sys2` 以 `1` 表示即可。

3.5 典型环节与控制系统的传递函数

控制理论只考虑元件或系统的动态数学模型, 而不关心其具体的物理化学功能。无论是电气、液压、气动元件或系统, 只要数学模型相似, 动态性能必然相似。下面给出一些典型环节与系统的基本形式与基本概念。

3.5.1 典型环节

对于传递函数的一般形式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \quad (3.75)$$

对其分子、分母进行实系数的因式分解,可以得到形如下式的传递函数:

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^u (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^w (\tau_k^2 s^2 + 2\zeta_k \tau_k s + 1)}{s^\gamma \prod_{j=1}^q (T_j s + 1) \prod_{l=1}^p (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l \tau_l s + 1)} \quad (3.76)$$

式中, $K = \frac{b_0}{a_0}$; $u + 2w = m$; $\gamma + q + 2p = n$ 。

以式(3.76)表示的传递函数中,存在6种不同的因子,一般说来,任何线性系统都可以是这6种因子表示的环节的串联组合。这6种因子与纯微分环节、纯延迟环节一起,常被称为典型环节。

与分子相对应的环节分别称为

放大环节(比例环节):	K
一阶微分环节:	$\tau s + 1$
二阶微分环节:	$\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1$
纯微分环节:	s

由于实际物理系统存在 $m \leq n$,故纯微分环节是一种理想环节。 K 称为传递函数的静态增益或增益,即将传递函数的分子、分母最低项系数换算为1以后得到的传递系数。

与分母相对应的环节分别称为

积分环节:	$\frac{1}{s}$
一阶惯性环节:	$\frac{1}{T s + 1}$
二阶振荡环节:	$\frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$

此外,在各类系统,特别是机械、液压或气动系统中均会遇到纯时间延迟现象,用延迟函数 $g(t - \tau)$ 描述,拉氏变换形式为

$$\mathcal{L}[g(t - \tau)] = \mathcal{L}[g(t)] e^{-\tau s} = G(s) e^{-\tau s} \quad (3.77)$$

即延迟环节为 $e^{-\tau s}$ 。

3.5.2 控制系统的传递函数

控制系统在工作过程中会受到两类信号的作用:一类是有用信号,或称控制信号、输入信号、指令、参考输入 $r(t)$ 等;另一类则是扰动,或称干扰 $n(t)$ 。参考输入通常作用在系统的输入端,而干扰信号一般作用在被控对象上,也可以出现在其他元件中,甚至夹杂在指令中,一个闭环系统的典型结构如图3.22所示。

将主反馈断开以后,前向通路传递函数与主反馈通路传递函数的乘积称为开环传递函数,等于主反馈信号与输入信号之比,不包括反馈极性,即

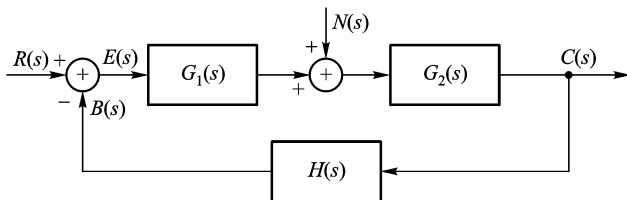


图 3.22 典型控制系统结构图

$$\frac{B(s)}{R(s)} = G_1(s) G_2(s) H(s) \quad (3.78)$$

应当注意的是,开环传递函数不是开环系统的传递函数,而是相对闭环系统的开环。

由于控制系统为线性系统,故对于多个输入作用的系统而言,可以分别考虑不同输入作用的影响。若考虑输入信号 $r(t)$ 的作用,则令 $n(t) = 0$,于是有

$$\Phi_{CR} = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (3.79)$$

若研究干扰对系统的影响,需要求出 $c(t)$ 对 $n(t)$ 的传递函数,此时令 $r(t) = 0$,则由图 3.22 可以得到

$$\Phi_{CN} = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (3.80)$$

此时系统的总输出为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \Phi_{CR} R(s) + \Phi_{CN} N(s) \\ &= \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} N(s) \end{aligned} \quad (3.81)$$

若定义系统的偏差为 $E(s) = R(s) - B(s)$,则偏差分别关于输入信号与干扰信号的传递函数为

$$\Phi_{ER} = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (3.82)$$

$$\Phi_{EN} = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} \quad (3.83)$$

此时系统的总偏差为

$$\begin{aligned} E(s) &= \Phi_{ER} R(s) + \Phi_{EN} N(s) \\ &= \frac{1}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} R(s) + \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s) G_2(s) H(s)} N(s) \end{aligned} \quad (3.84)$$

3.6 机电控制系统中的传感器与直流电动机

为组成闭环控制系统,系统中必须有检测元件,它的作用主要有两个:一是为了便于对信号进行传输和处理,把某些物理量转换成另一物理量,如把位移、速度、温度、压力、张力等非电量转换成电量;二是利用检测元件,检测出两个量的差值,并适当放大。

同时,作为控制系统的执行机构,控制电动机也是系统中必不可少的组成部分。本节主要介

绍机电控制系统中常见的传感器与直流电动机,为今后进一步分析实际系统奠定基础。

3.6.1 传感器与编码器

传感器与编码器是控制系统中的重要元件,用于监控系统的状态、作为反馈元件参与反馈控制。本小节介绍控制系统中常用的一些传感器与编码器的工作原理与应用。

1. 电位器

电位器是将机械量转换为电量的机-电转换装置。输入量是机械位移量(既可以是直线位移,也可以是角位移),输出量是与输入量呈线性或特定非线性关系的电量。用于测量角位移的传感器多采用单转或多转的形式,而用于测量直线位移的传感器则采用绕线方式或导电塑料。

图 3.23a 表示用于位移指示的电位器原理图,图 3.23b 表示位移差值检测的原理图,而图 3.23c、图 3.23d 则分别是与其相对应的原理方框图。

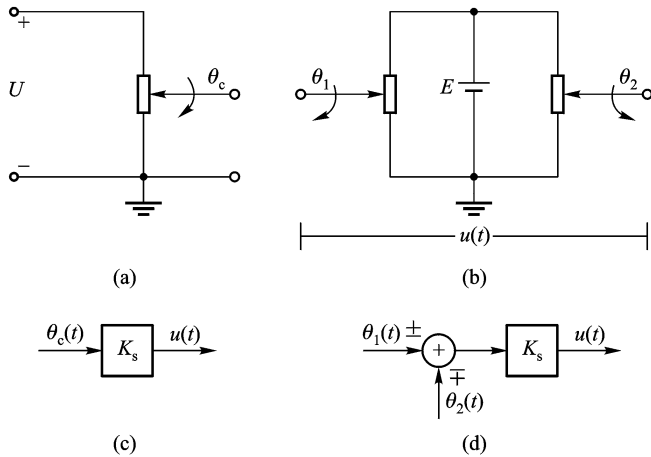


图 3.23 电位器测量原理与原理方框图

在直流电动机控制系统中,电位器作为反馈元件,将测得的实际位移量与理想位移量进行比较,偏差经直流放大器放大后,驱动直流电动机运动以减小偏差,其原理如图 3.24a 所示。图 3.24b 所示为采用两相交流电动机进行位置控制的原理图,两者的区别是后者采用两相交流电动机、交流放大器以及交流信号调制装置。

在控制理论中,直流电动机与交流电动机控制系统的基本区别是其信号是否经过调制。这点与电气工程中,直流表示信号无方向性,而交流表示交变信号的概念有所不同。图 3.25 分别给出了两个控制系统中的偏差信号,可以看出,交流电动机控制系统中的偏差信号经过调制以后成为交流信号,输入至交流放大器,放大后控制执行电动机。这里执行电动机相当于一个信号解调器,也就是说,尽管输入的是交流信号,电动机输出的位移量本身仍是直流信号。

2. 测速发电机

测速发电机也是一种机-电转换装置,该装置的基本原理是发电机,产生与输入轴转速成比例的直流电压信号。

测速发电机有直流与交流之分,原理分别如图 3.26a 和 b 所示。直流测速发电机中有一个永久磁场,当转子旋转时,转子绕组切割磁感线,在转子绕组上产生一个与转子旋转速度成正比

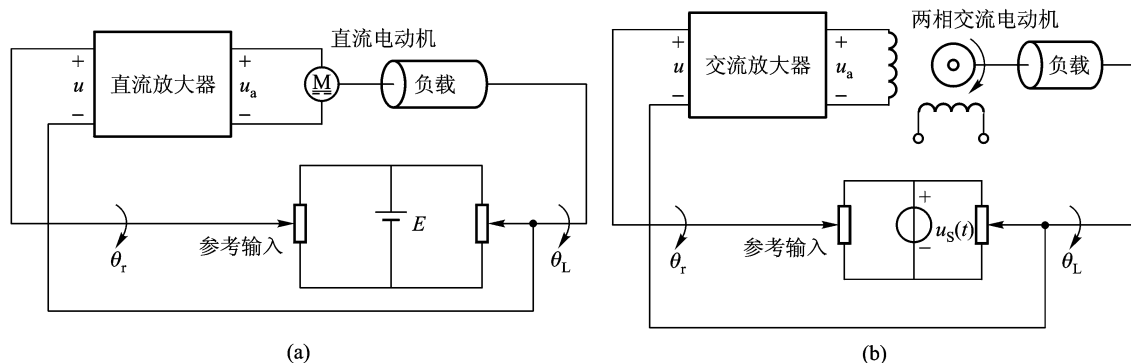


图 3.24 直流电动机控制系统与交流电动机控制系统

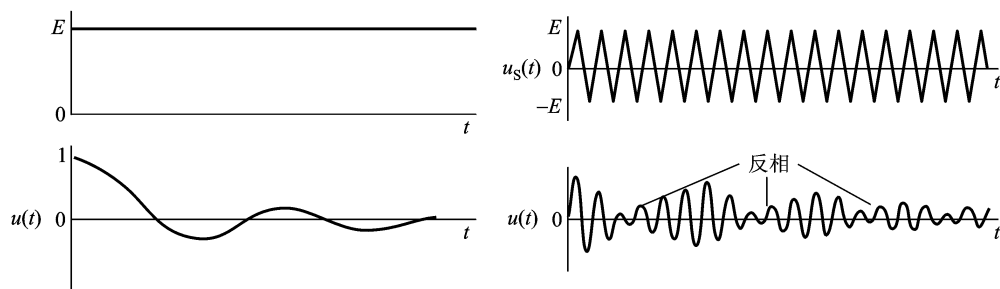


图 3.25 电动机控制系统中的信号

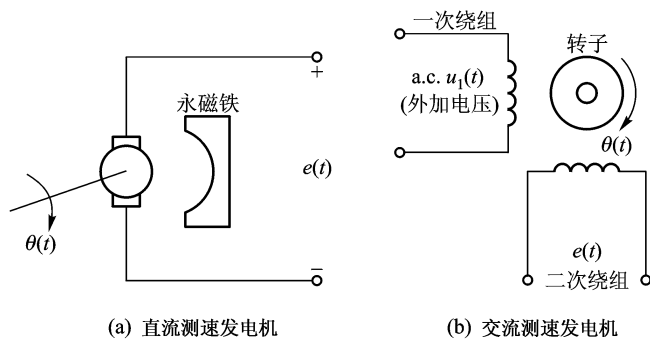


图 3.26 测速发电机原理图

的电动势 $e(t)$ 。交流测速发电机有两个定子绕组,在一个定子绕组(一次绕组)上外加一个交流电压 $u_1(t)$,当转子旋转时,则在二次绕组上产生一个与转子旋转速度成正比的电动势 $e(t)$ 。交流信号解调后,表示方法与直流相同,有

$$e(t) = K_1 \frac{d\theta(t)}{dt} = K_1 \omega(t)$$

于是传递函数为

$$\frac{E(s)}{\Theta(s)} = K_1 s \quad \text{或} \quad \frac{E(s)}{\Omega(s)} = K_1 \quad (3.85)$$

测速发电机在控制系统中主要有两个作用:一是在速度控制系统中作为反馈元件与指令信号相比较,以进行精确的速度控制,如图 3.27a 所示;另外一个作用是作为位置控制系统的辅助控制部分,以改善系统的稳定性与动态特性,如图 3.27b 所示。

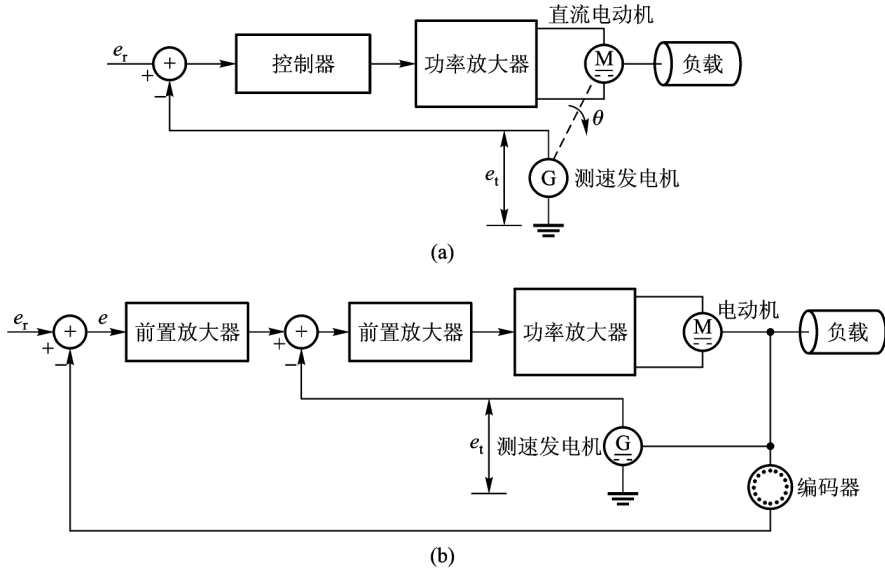


图 3.27 电动机控制系统

3. 增量式光电编码器

增量式光电编码器是一种将位移信号转换为数字或脉冲信号的装置,广泛用于现代控制系统中。

增量式光电编码器由光源、转盘、静止盘及光电器件组成。光源、静止盘的透孔、光电器件置于一条直线上,转盘为一光栅,如图 3.28 所示。当转盘转动时,光电器件接收到一个个光信号,输出一个个电脉冲信号。根据测量精度的要求,光电器件的输出信号分为三角波或者正弦波,经过线性放大器与比较器作用后产生与数字信号兼容的方波信号。控制系统中常常采用双通道脉冲发生器,利用这两条光通道产生的相位相差 90° 的电信号,判别转盘的转向,转速的大小则通过计数器计算接收到的脉冲数确定。

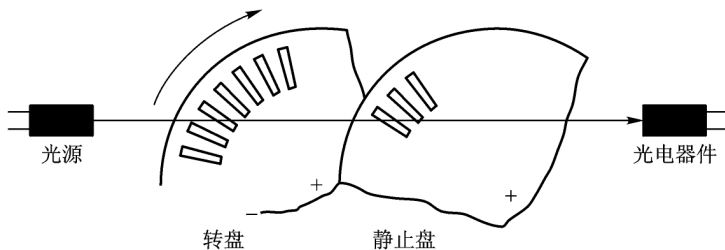


图 3.28 光电编码器

3.6.2 执行电动机

过去,大多数小功率伺服控制电动机都采用交流电动机,由于特性的非线性很强,交流电动机控制难度较大,尤其是用于位置控制时,分析工作十分复杂。而直流电动机由于电刷和换向器的磨损较大,造价相对昂贵,并且变磁直流电动机只能适用于某些特定的控制系统中,应用范围较窄。永磁铁技术以及稀土氧化磁铁的发展,使得以较低成本获得较高力矩-体积比的直流永磁电动机成为可能。此外,电刷-换向器技术的发展使维护费用降至最低。功率电子技术的发展,也使无刷电动机在高性能控制系统中广泛使用。先进的制造技术已能够制造出具有很小惯量的非铁转子的直流电动机,从而获得较高的力矩-惯量比和较小的时间常数。这些特性使直流电动机不仅应用在计算机外围设备,如打印机、磁盘驱动器以及字处理器等设备上,而且还在自动化以及机床工业中得到了广泛的应用。

下面根据图 3.29 所示的电枢控制的直流电动机原理,建立永磁直流电动机的数学模型。

永磁直流电动机的电枢可以等效为电阻 R_a 和电感 L_a , E_b 表示转子转动时在电枢中产生的反电动势,于是有

电枢电压方程

$$U_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + E_b(t) \quad (3.86)$$

电动机力矩平衡方程

$$T_m(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} + T_d(t) \quad (3.87)$$

电动机力矩方程

$$T_m(t) = K_m i_a(t) \quad (3.88)$$

反电动势方程

$$E_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} = K_b \omega(t) \quad (3.89)$$

其中, $U_a(t)$ ——电枢控制电压;

$i_a(t)$ ——电枢电流;

$T_m(t)$ ——电动机力矩;

$T_d(t)$ ——负载力矩;

K_b ——反电动势常数;

K_m ——力矩常数;

$\theta(t)$ ——转子转角;

$\omega(t)$ ——转子转动角速度;

J ——转子惯量;

c ——粘性阻尼系数。

对式(3.86)~式(3.89)进行零初始条件的拉氏变换,得如下方程组:

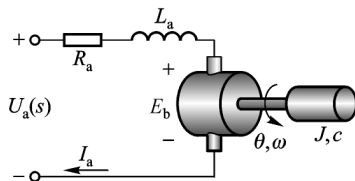


图 3.29 直流电动机原理图

$$\begin{aligned}
 U_a(s) &= L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + E_b(s) \\
 T_m(s) &= J s^2 \Theta(s) + c s \Theta(s) + T_d(s) \\
 T_m(s) &= K_m I_a(s) \\
 E_b(s) &= K_b s \Theta(s) = K_b \Omega(s)
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

于是可以得到如图 3.30 所示的动态结构图,它较好地描述了系统各模块传递函数之间的关系。若令 $T_d(t) = 0$,则有

$$\frac{\Theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{L_a J s^3 + (R_a J + c L_a) s^2 + (K_m K_b + R_a c) s} \tag{3.91}$$

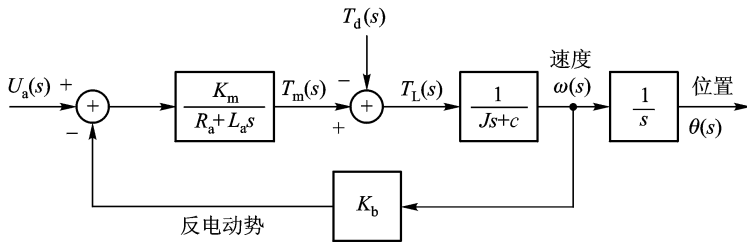


图 3.30 电动机控制系统动态结构图

可以看出,该传递函数分母含有一个积分环节,说明输入量 U_a 与输出量转子转角 Θ 之间是积分关系。也就是说,如果 $U_a(t)$ 为常值输入,电动机的输出转角将随时间线性增加。

虽然直流电动机本身是一个开环控制系统,但从结构图中可以看出,电动机实际上存在一个由反电动势构成的自反馈回路,该反馈信号的大小与电动机速度成比例,极性为负。由于反电动势的存在,使得传递函数分母中增加了 $K_m K_b s$ 项,因而具有改善系统稳定性的作用,又称为电磁摩擦。

若考虑到电枢绕组的电感很小,忽略 L_a ,则将上式简化为

$$\frac{\Theta(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{R_a J s^2 + (K_m K_b + R_a c) s} = \frac{K}{s(Ts + 1)} \tag{3.92}$$

式中, $K = \frac{K_m}{K_m K_b + R_a c}$ 称为电动机的传递系数; $T = \frac{R_a J}{K_m K_b + R_a c}$ 称为电动机的时间常数。

3.7 实例分析

1. 电视卫星天线位置伺服系统

当将电视卫星天线视为具有较大惯量的物体时,天线的位置伺服系统原理图如图 3.31 所示。输入、输出电位器将位置的偏差信号送入差值放大器,放大后,送入功率放大器进一步放大以驱动电动机,电动机输出经齿轮系减速,获得较大力矩、较低速度以带动天线转动。

1) 电位器

设输入、输出电位器增益相同,均为 $K_p = \frac{U}{\theta_{\max}}$,输入电位器给定角度为 r ,输出电位器测量的天线角度为 θ ,于是两者差值为

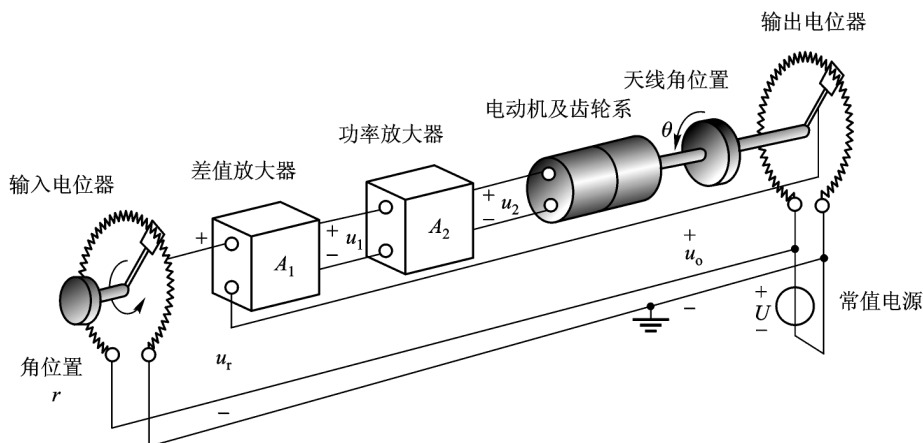


图 3.31 天线位置伺服系统原理图

$$u_r - u_0 = K_p r - K_p \theta = K_p (r - \theta)$$

2) 放大器

差值信号经过差值放大器放大以后,有

$$u_1 = A_1 (u_r - u_0) = A_1 K_p (r - \theta)$$

式中, A_1 ——差值放大器放大倍数。

u_1 被进一步放大,有

$$u_2 = A_2 u_1 = A_2 A_1 K_p (r - \theta)$$

式中, A_2 ——功率放大器放大倍数;

u_2 ——电动机驱动电压。

3) 电动机 - 负载模型

电动机输出转角 θ_m 经过齿轮系减速,则有关系 $\theta = \frac{N_1}{N_2} \theta_m$ 存在,其中 θ 是惯量为 J 的天线的转角。利用前面得到的直流电动机模型,有

$$\frac{\Theta(s)}{U_2(s)} = \frac{K_m (N_1/N_2)}{s(\tau_L s + 1)}$$

以上各式经拉氏变换以后得到的结构图模型与信号流图模型分别如图 3.32a 和图 3.32b 所示,注意电动机模型中忽略了负载力矩的影响。

于是,由信号流图或动态结构图,可以得到特征式为

$$\Delta = 1 + \frac{1}{\tau_L s} + \frac{(N_1/N_2) K_m A_1 A_2 K_p}{\tau_L s^2}$$

前向通路为

$$P_1 = \frac{(N_1/N_2) K_m A_1 A_2 K_p}{\tau_L s^2}, \Delta_1 = 1$$

故系统的传递函数为

$$\frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{(N_1/N_2) K_m A_1 A_2 K_p}{\tau_L s^2 + s + (N_1/N_2) K_m A_1 A_2 K_p}$$

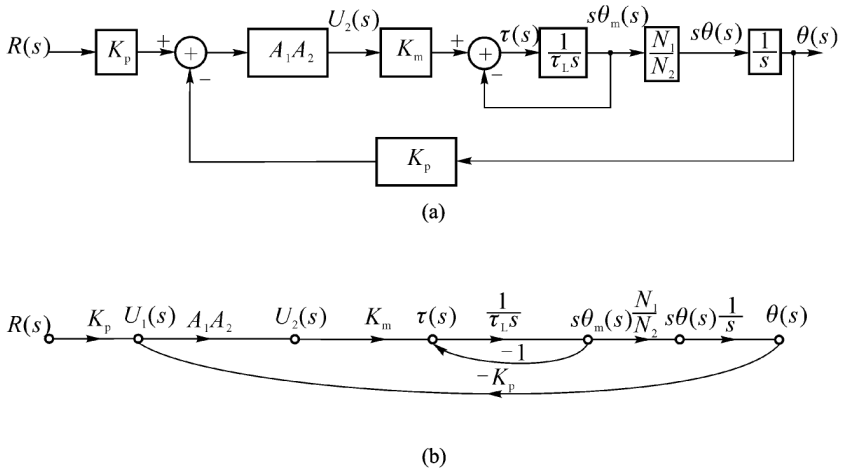


图 3.32 天线位置伺服系统动态结构图与信号流程图

2. 火车机车驱动控制系统

大多数现代火车和交通工具采用电气牵引机车,火车的电气机车驱动装置速度控制部分的原理图与结构图如图 3.33a 所示,求闭环系统的传递函数 $\omega(s)/\omega_d(s)$ 。

首先求出描述系统各部分性能的传递函数。

1) 放大器

采用转速计产生与速度成比例的电压信号 u_i , u_i 与 u_1 分别为指令信号与速度信号检测值,于是差值信号放大器的输出为

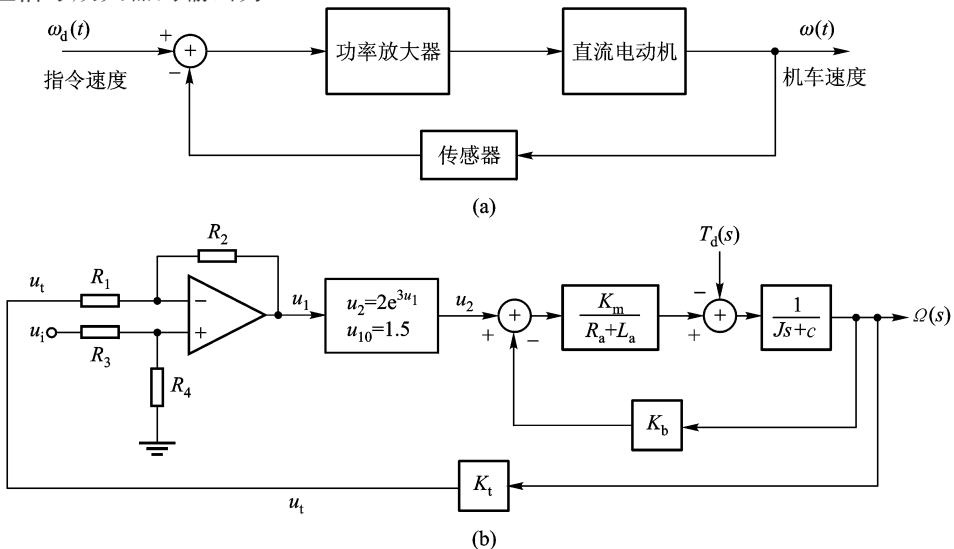


图 3.33 火车机车驱动控制系统

$$u_1 = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} u_i - \frac{R_2}{R_1} u_1$$

由于稳态时 $u_1 = K_1 \omega_a$, 此时希望系统调节部分不工作, 即 $u_1 = 0$ 。若令 $K_1 = 0.1$, 则有 $\frac{1 + R_2/R_1}{1 + R_3/R_4} = \left[\frac{R_2}{R_1} \right] K_1 = 1$, 可得 $R_2/R_1 = R_3/R_4 = 10$ 。代入上式并经过拉氏变换以后可得

$$U_1(s) = U_i(s) - 10U_1(s) = U_i(s) - \Omega(s)$$

功率放大器的特性是非线性的, 可以由 $u_2 = e^{3u_1}$ 来描述, 平衡工作点是 $u_0 = 1.5u$, 于是采用小偏差线性化方法得线性化模型

$$\Delta u_2 = \left. \frac{dg(u_1)}{du_1} \right|_{u_{10}} \Delta u_1 = 2 \times 3 e^{3u_{10}} \Delta u_1 = 540 \Delta u_1$$

对增量方程进行拉氏变换, 有

$$U_2(s) = 540U_1(s)$$

2) 电动机 - 负载部分

参照图 3.33 所示的电动机控制系统模型, 同时考虑负载力矩。需要注意的是, 电动机控制部分中的转动惯量 J 为电动机转动轴惯量与负载折合至电动机转轴的等效惯量, c 为电动机所受粘性阻尼与折合至电动机轴的负载等效阻尼。

若电动机 - 负载部分的参数为 $K_m = 10, R_a = 1, L_a = 1, J = 2, c = 0.5, K_b = 0.1$, 于是可以得到系统的动态结构图及信号流程图如图 3.34 所示, 其中,

$$G_3(s) = 540, G_1(s) = \frac{10}{s+1}, G_2(s) = \frac{1}{2s+0.5}$$

利用 MATLAB 求图 3.34 所示系统输入输出之间的传递函数, 基本步骤是

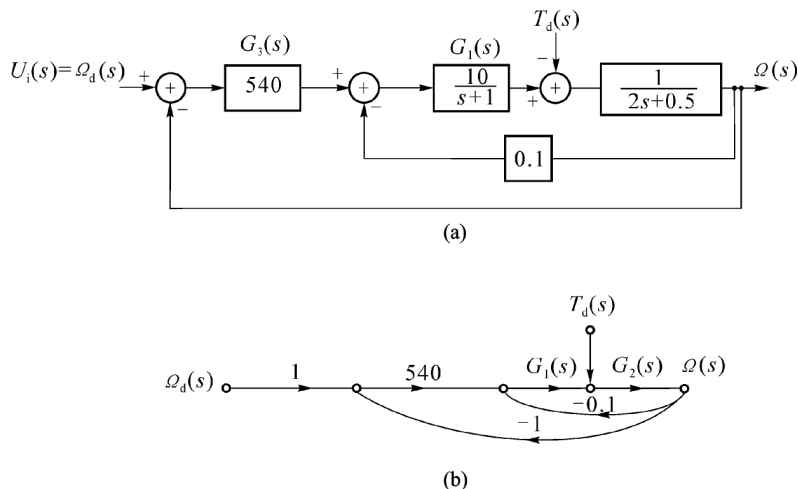


图 3.34 火车机车驱动控制系统的动态结构图与信号流程图

- (1) 首先令 $T_d(s) = 0$, 则 G_1, G_2 串联后与系数为 -0.1 的反馈支路构成内回路。
- (2) 内回路闭合以后与 G_3 串联, 再与增益为 -1 的反馈支路构成回路, 求得 $\frac{\Omega(s)}{\Omega_d(s)}$ 。

以上步骤的 MATLAB 程序及运行结果如下:

```
>> g1 = tf(10,[1 1]);g2 = tf(1,[2 0.5]);g3 = tf(540,1);%各环节参数赋值
>> sys1 = series(g1,g2); %g1,g2 串联
>> sys2 = feedback(sys1,0.1); %求反馈内回路传递函数
>> sys3 = series(g3,sys2); %反馈回路与 g3 串联
>> sys = feedback(sys3,1) %反馈外回路,得系统传递函数  $\frac{\Omega(s)}{\Omega_1(s)}$ 
```

Transfer function:

5400

2 s² + 2.5 s + 5402

3.8 小 结

在时域模型的基础上,通过引入拉氏变换,本章建立了复数域内重要的数学模型——传递函数。作为控制理论最基本的概念,它的建立又引出了图形化的数学模型——动态结构图和信号流程图,这样不仅使系统中各种信号之间的传递关系表达得更为清楚,采用等效变换法则与梅森公式也使求解复杂系统传递函数可以较容易地进行。

传递函数是古典控制理论的一个重要概念,以后分析系统所使用的工程方法都是基于这一模型的,但应注意其局限性,即传递函数只是针对一个输出与输入在零初始条件下的关系,非零初始条件、多输入多输出的情况一般应采用线性系统的可叠加原理加以处理。另外,多输入多输出系统,还可以用传递函数阵的形式表示。

习 题

3.1 确定以下函数的拉氏变换:

$$(1) f_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-0.4t} \cos 12t & t \geq 0 \end{cases} \quad (2) f_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \sin\left[4t + \frac{\pi}{3}\right] & t \geq 0 \end{cases}$$

$$(3) f_3(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 e^{-at} & t \geq 0 \end{cases} \quad (4) f_4(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ te^{-t} \sin 5t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$(5) f_5(t) = \begin{cases} t+1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \\ 2-t & 2 \leq t < 3 \\ 0 & t \geq 3 \end{cases}$$

3.2 确定如图 3.35 所示函数的拉氏变换。

3.3 函数 $f(t)$ 的拉氏变换形式为 $F(s) = \frac{10}{s(s+1)}$,运用拉氏变换终值定理确定当 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t)$ 的数值,并利用拉氏逆变换对以上结果进行验证。

3.4 函数 $f(t)$ 的拉氏变换形式为 $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$,利用拉氏变换初值定理确定 $f(0^+)$ 与 $\dot{f}(0^+)$ 。

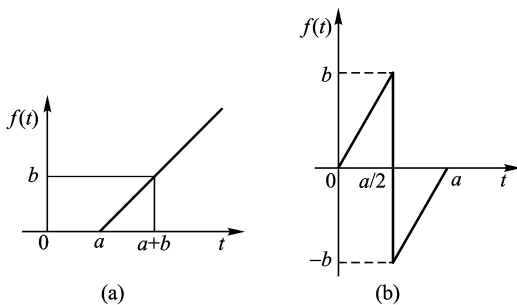


图 3.35 题 3.2 图

3.5 确定如下函数的拉氏逆变换:

$$(1) F_1(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

$$(2) F_2(s) = \frac{5e^{-s}}{s+1}$$

$$(3) F_3(s) = \frac{6s+3}{s^2}$$

$$(4) F_4(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$(5) F_5(s) = \frac{1}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

$$(6) F_6(s) = \frac{1}{s(s^2+2\zeta\omega s+\omega^2)}$$

3.6 利用拉氏变换与逆变换求如下微分方程的解:

$$(1) \dot{x} + ax = A \sin \omega t \quad x(0) = b$$

$$(2) 2\ddot{x} + 7\dot{x} + 3x = 0 \quad x(0) = 3, \dot{x}(0) = 0$$

$$(3) \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad x(0) = a, \dot{x}(0) = b$$

$$(4) \ddot{x} + 2\dot{x} + 10x = e^{-t} \quad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$$

3.7 在 MATLAB 环境下对如下函数进行部分因式分解,并求其拉氏逆变换。

$$(1) F_1(s) = \frac{10(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)(s+5)^2}$$

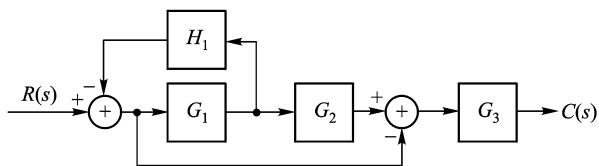
$$(2) F_2(s) = \frac{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 9s + 30}{s^4 + 6s^3 + 21s^2 + 46s + 30}$$

3.8 假定初始条件均为零,求第 2 章习题中各微分方程的传递函数。

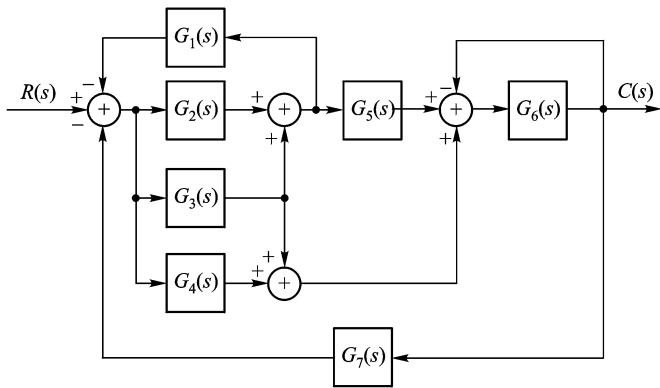
3.9 对于如下—阶微分方程组表示的系统,确定系统的状态空间模型,并求其传递函数阵。

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -x_1(t) + 2x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -2x_2(t) + 3x_3(t) + u_1(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) + u_2(t) \\ y_1(t) = x_1(t) \\ y_2(t) = x_2(t) \end{cases}$$

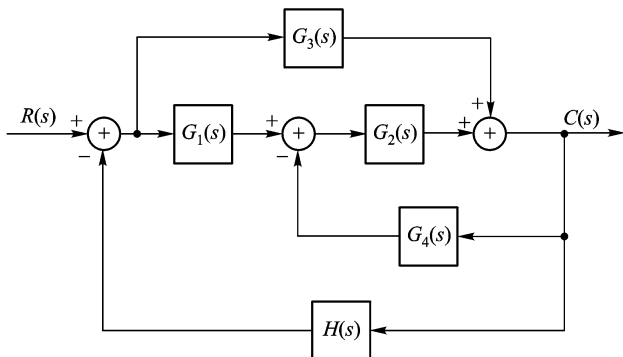
3.10 分别采用结构图变换方法与梅森公式,求图 3.36 所示的结构图的输出输入之间的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。



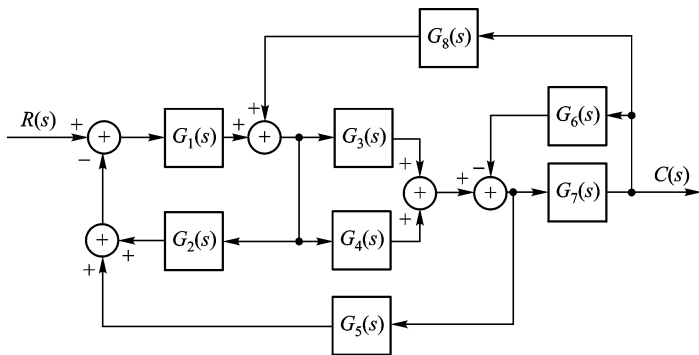
(a)



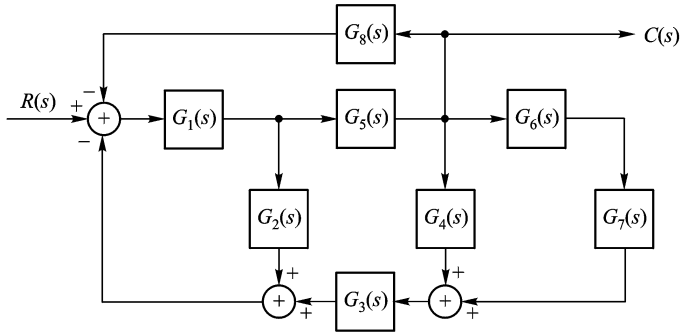
(b)



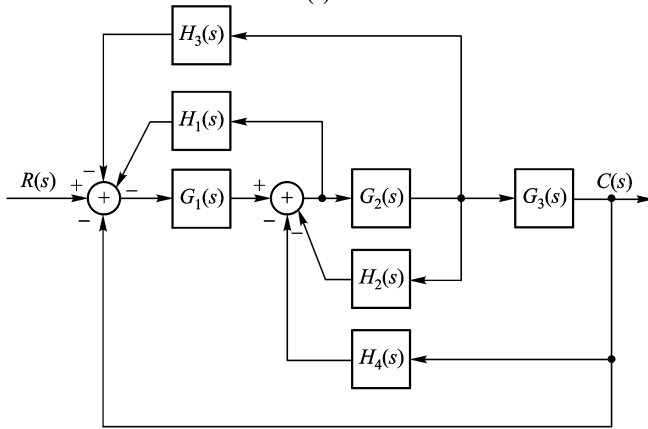
(c)



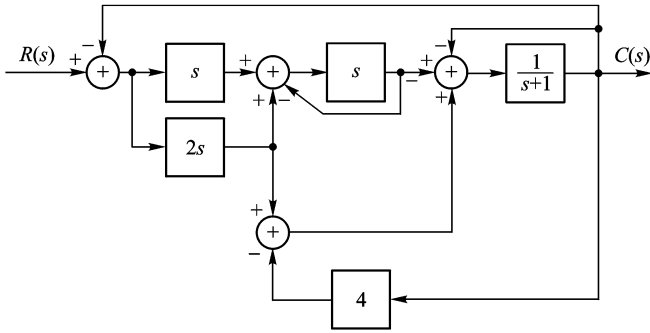
(d)



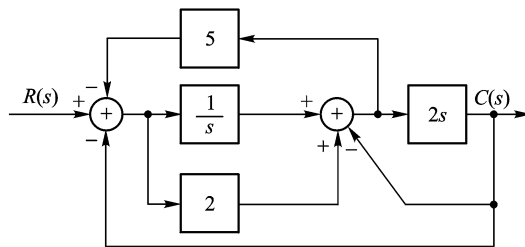
(e)



(f)



(g)



(h)

图 3.36 题 3.10 图

3.11 运用梅森公式求图 3.37 所示的信号流图的传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

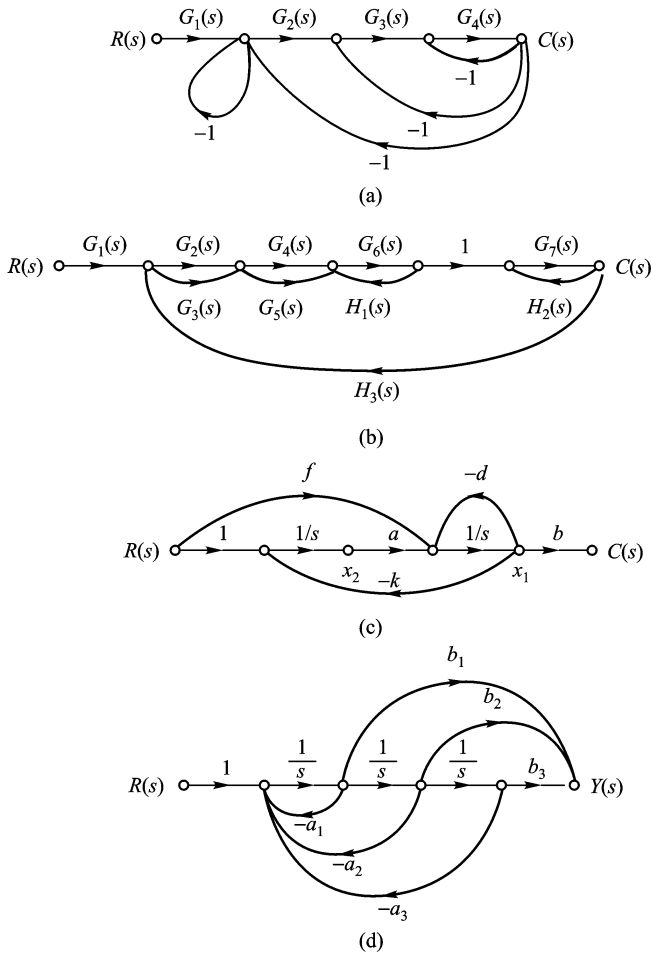


图 3.37 题 3.11 图

3.12 分别求图 3.38 所示系统传递函数 $\frac{\theta_{21}(s)}{\theta_{11}(s)}$, $\frac{\theta_{21}(s)}{\theta_{12}(s)}$, $\frac{\theta_{22}(s)}{\theta_{11}(s)}$ 。

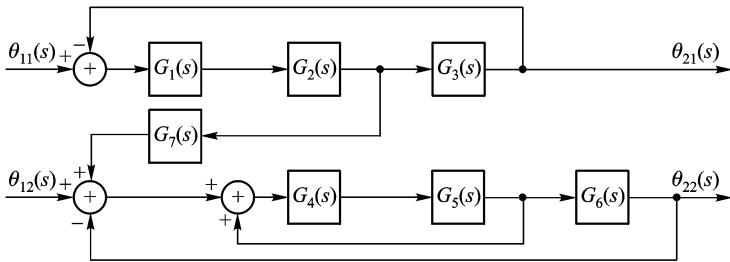


图 3.38 题 3.12 图

3.13 航天飞机上升过程中的倾斜度由导航计算机计算出的指令进行控制。指令信号包括倾斜角度指令、倾斜角速度指令以及倾斜角加速度指令,同时还有由惯量测量单元测量的机体倾斜角、由速度陀螺测量的倾斜

角速度以及加速度计测量的倾斜角加速度信息。自动驾驶仪根据倾斜角度差、倾斜角速度差以及倾斜角加速度差来对航天飞机的主发动机和固体火箭推进器进行控制,以获得理想的姿态控制。简化的倾斜角控制系统如图 3.39 所示。

- (1) 求倾斜角度指令至实际倾斜角度之间的闭环传递函数,假定其他输入为零;
- (2) 求倾斜角速度指令至实际倾斜角速度之间的闭环传递函数,假定其他输入为零;
- (3) 求倾斜角加速度指令至实际倾斜角加速度之间的闭环传递函数,假定其他输入为零。

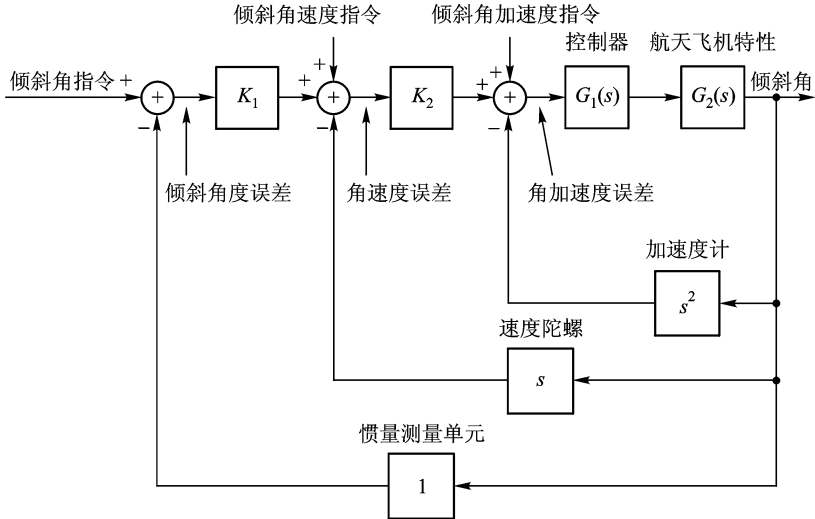


图 3.39 航天飞机倾斜角控制系统

3.14 某系统如图 3.40 所示,图中 N_1 、 N_2 分别为两齿轮的齿数, $u_1(t)$ 为输出轴位置信号。试绘制系统结构图,并求传递函数 $\frac{U_0(s)}{T(s)}$ 。

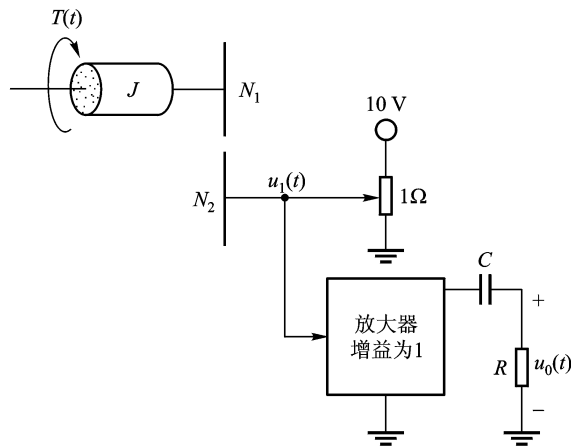


图 3.40 题 3.14 图

3.15 人眼捕捉对象位置的控制原理图可以由图 3.41 来描述,对象位置作为输入信号,眼睛位置为输出信号。大脑根据对象与眼睛位置的偏差以及眼睛运动的速度信息,向眼部肌肉发出信号,肌肉运动带动眼球运动,眼球的运动可以等效为无弹性负载的惯量与粘性阻尼的运动。假定大脑与神经系统的延迟可以忽略不计,试求

眼睛位置控制系统的闭环传递函数。

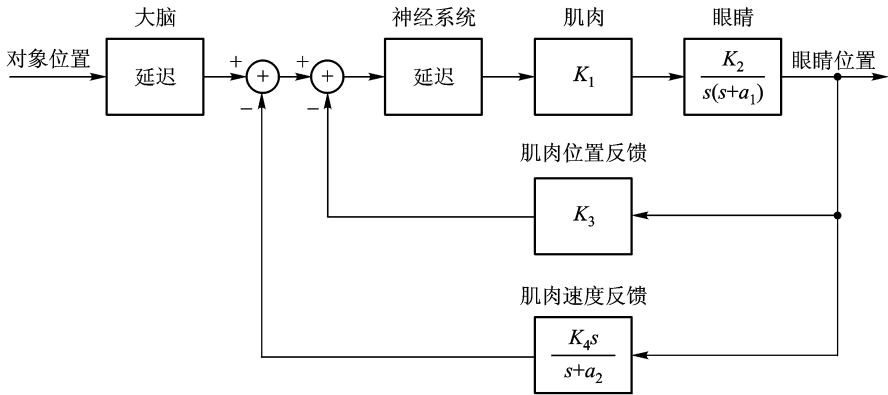


图 3.41 人眼位置反馈系统

3.16 机械位置控制系统如图 3.42 所示, N_1 、 N_2 为齿轮齿数, 齿轮齿条传动比设为 R 。若位置信号 $x(t)$ 反馈至输入端, 与指令信号 $r(t)$ 综合后, 经放大形成控制电压 $u_a(t)$, 试建立该系统由指令信号 $r(t)$ 至位置信号 $x(t)$ 的控制原理结构图, 并求该系统的传递函数。

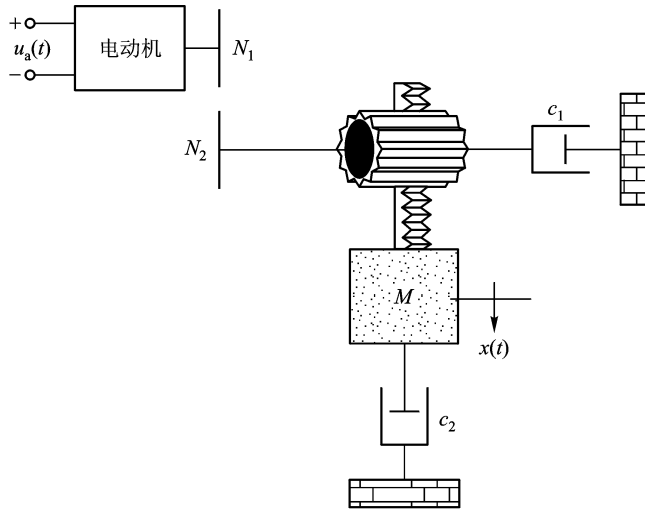


图 3.42 机械位置控制系统