第三章

一元函数积分学

本章思维导图

- 一元函数积分学
  - 考点一 不定积分的定义和性质，基本积分公式
    - 题型一 不定积分的定义和性质
    - 题型二 利用基本积分公式计算不定积分
  - 考点二 不定积分的计算
    - 题型一 第一换元积分法(凑微分法)
    - 题型二 第二换元积分法
    - 题型三 分部积分法
    - 题型四 换元积分法和分部积分法的综合问题
  - 考点三 有理函数不定积分的求法
    - 题型 求有理函数的不定积分
  - 考点四 定积分的性质和应用
    - 题型 利用定积分的性质求解定积分问题
  - 考点五 变上限积分函数的求导公式及牛顿–莱布尼茨公式
    - 题型一 利用变上限积分函数求导公式求极限
    - 题型二 利用牛顿–莱布尼茨公式计算定积分
  - 考点六 定积分的换元积分法和分部积分法
    - 题型一 换元积分法
    - 题型二 分部积分法
    - 题型三 积分法综合应用
  - 考点七 计算平面图形的面积
    - 题型一 计算由 $y=f(x)$, $x=a$, $x=b(a<b)$, x轴围成平面图形的面积
    - 题型二 计算由 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b(a<b)$ 围成平面图形的面积
    - 题型三 计算由 $x=\varphi(y)$, $y=c$, $y=d(c<d)$, y轴围成平面图形的面积
    - 题型四 计算由 $x=\varphi(y)$, $x=\psi(y)$, $y=c$, $y=d(c<d)$ 围成平面图形的面积
  - 考点八 计算旋转体的体积
    - 题型 用积分计算旋转体的体积
  - 考点九 广义积分
    - 题型 求解广义积分问题

考点一　不定积分的定义和性质，基本积分公式

一、考试要求

1. 理解原函数与不定积分的概念.
2. 掌握不定积分的性质.
3. 熟练掌握基本积分公式.

二、典型例题

题型一　不定积分的定义和性质

解题依据：

（1）若在区间 I 上，有 $F'(x)=f(x)$ 或 $\mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.函数 $f(x)$ 在区间 I 的全体原函数 $F(x)+C$，称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分.

（2）函数的两个不同的原函数之间相差一个常数.

例　设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则下列结论中不正确的是（　　）.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{F(x)+2G(x)}{3}+C$　　　B. $\int f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2F(x)+G(x)}{3}+C$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=G(x)+C$　　　D. $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+2G(x)+C$

解析：本题考查原函数的概念，$F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 的原函数，则 $F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$，直接对各选项的右端函数求导，验证是否等于被积函数 $f(x)$ 即可.经计算，$[F(x)+2G(x)+C]'=3f(x)$，故 D 选项不正确，其余 3 个选项的结论均正确，故选 D.

题型二　利用基本积分公式计算不定积分

这类题型要求考生掌握基本积分公式，并能熟练地用基本积分公式计算不定积分.

例 1　计算 $\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x$.

解析：化简被积函数 $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)=x-1$，于是

$$\int(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)\mathrm{d}x=\int(x-1)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+C.$$

例 2　$\int\left(\cos x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解析：被积函数是几个简单的初等函数之和，根据函数和的不定积分等于不定积分

的和,然后利用基本积分公式.

$$\int\left(\cos x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\int\cos x dx+\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=\sin x+\ln|x|-\frac{1}{x}+C.$$

例 3 计算 $\int(\sqrt[3]{x}+1)^2dx$.

解析: 利用平方和公式展开被积函数,$(\sqrt[3]{x}+1)^2=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+1$,于是

$$\int(\sqrt[3]{x}+1)^2dx=\int(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+1)dx=\int\sqrt[3]{x^2}dx+\int 2\sqrt[3]{x}dx+\int dx=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}}+x+C.$$

例 4 求 $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$.

解析: 对分子做恒等变形,化成能用基本公式的形式,通过减 1 加 1,利用平方差公式,去凑和分母相同的因子 $1+x^2$,于是

$$\int\frac{x^4}{1+x^2}dx=\int\frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C.$$

例 5 求 $\int\cot^2xdx$.

解析: 利用三角函数之间的关系,把被积函数化成能用基本公式的函数,

$$\int\cot^2xdx=\int(\csc^2x-1)dx=-\cot x-x+C.$$

【注】 常用的三角函数之间的关系:

$$\sin^2x+\cos^2x=1,1+\tan^2x=\sec^2x,1+\cot^2x=\csc^2x.$$

这三个和 1 有关的公式请考生一定要牢记!

例 6 $\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

解析: 分项,同时利用倍角公式,有

$$\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}(x-\sin x)+\arcsin x+C.$$

【注】 当碰到被积函数为半角的平方时,考生要想到用倍角公式:

$$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x,\ \sin 2x=2\sin x\cos x,$$

或者其变形形式:$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x)$,$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos x)$.

举一反三

1. 在区间(a,b)内,如果$f'(x)=\varphi'(x)$,则一定有( ).

A. $f(x)=\varphi(x)$

B. $f(x)=\varphi(x)+C$

C. $d\int f(x)dx=d\int\varphi(x)dx$

D. $\left[\int f(x)dx\right]'=\left[\int\varphi(x)dx\right]'$

答案: B.

解析: 两个函数的原函数之间相差一个常数,故选 B.

2. 求不定积分 $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

答案：$-\frac{1}{x}-\arctan x+C$.

解析：$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-\arctan x+C$.

3. 求不定积分 $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

答案：$-\cot x-\tan x+C$.

解析：

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int \csc^2 x\mathrm{d}x-\int \sec^2 x\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C.$$

4. 已知某商品的边际成本为 $C'(x)=50x-x^2$，固定成本为 100，求总成本函数和平均成本函数.

答案：$C(x)=25x^2-\frac{1}{3}x^3+100$，$\bar{C}(x)=25x-\frac{1}{3}x^2+\frac{100}{x}$.

解析：$C(x)=\int_0^x C'(t)\mathrm{d}t+C(0)=25x^2-\frac{x^3}{3}+100$，$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=25x-\frac{1}{3}x^2+\frac{100}{x}$.

5. 设曲线通过点(1,2)，且其上任意点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

答案：$y=x^2+1$.

解析：设所求曲线方程为 $y=f(x)$，则由题意知 $y'=2x$，方程两边对 x 积分，得 $y=x^2+C$，又因为曲线通过点(1,2)，代入，得 $C=1$，故所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

三、 典型真题

1. 不定积分 $\int(2^x-x^3)\mathrm{d}x$ 的结果为(　　).

A. $2^x\ln 2-3x^2+C$

B. $\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{x^4}{4}+C$

C. $2^x\ln 2-\frac{x^4}{4}+C$

D. $\frac{2^x}{\ln 2}-3x^2+C$

解析：本题考查不定积分的性质及基本初等函数的积分公式，利用两个函数差的积分等于积分的差及基本积分公式，故选 B.

2. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，C 为常数，则下列函数中仍是 $f(x)$ 的原函数的是(　　).

A. $F(Cx)$　　B. $F(x+C)$　　C. $CF(x)$　　D. $F(x)+C$

解析：本题考查原函数的定义，原函数之间可能会相差一个常数，选 D.

3. 已知 $\int f(x)\mathrm{d}x=\sin x\cos x+C$，则 $f(x)=$ ________.

解析：$\int f(x)\,dx=\sin x\cos x+C$，两边对 x 求导数，有

$$\int f(x)\,dx=\left(\frac{1}{2}\sin 2x+C\right)'=\cos 2x.$$

四、同步练习

1. 积分 $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=$________.

答案：$\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-6x^{\frac{1}{6}}+C$.

解析：$\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{5}{6}}\right)dx=\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-6x^{\frac{1}{6}}+C$.

2. 不定积分 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=$________.

答案：$x-\arctan x+C$.

解析：$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=x-\arctan x+C$.

3. 函数 $\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx$ 的一个原函数是（　　）.

A. $\ln(2+\sin 2x)$　　B. $\ln(1+\sin 2x)$

C. $\ln(x+\sin 2x)$　　D. $\ln(2-\sin^2 x)$

答案：A.

解析：$\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{d(2+\sin 2x)}{2+\sin 2x}=\ln(2+\sin 2x)+C$，故选 A.

4. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，则 $\int f'(x)\,dx=$（　　）.

A. $\frac{\sin x}{x}+C$　　B. $\cos x+C$

C. $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C$　　D. $\frac{x\cos x+\sin x}{x^2}+C$

答案：C.

解析：$f(x)$ 有一个原函数 $\frac{\sin x}{x}$，根据原函数定义有 $f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，则

$\int f'(x)\,dx=f(x)+C=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+C$，故选 C.

5. 计算不定积分 $\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$.

答案：$2e^x-\ln|x|+C$.

解析：$\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx=\int\left(2e^x-\frac{1}{x}\right)dx=2e^x-\ln|x|+C$.

考点二　不定积分的计算

一、考试要求

1. 熟练掌握不定积分第一换元积分法.
2. 掌握不定积分第二换元法.
3. 熟练掌握不定积分的分部积分法.

二、典型例题

题型一　第一换元积分法(凑微分法)

解题依据：

设$\int f(u)\mathrm{d}u=F(u)+C$，$u=\varphi(x)$可微，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x=F[\varphi(x)]+C.$$

【注】　凑微分的关键是把被积函数凑成$f[\varphi(x)]\varphi'(x)$的形式，即观察到被积函数是$\varphi(x)$的函数，则设法去凑$\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}[\varphi(x)]$.常见的凑微分形式如下：

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)$，$a\neq 0$；

(2) $\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$；

(3) $\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\frac{1}{x}$；

(4) $\int f(x^2)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}x^2$；

(5) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)$；

(6) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$；

(7) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)$；

(8) $\int f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\mathrm{d}(\cos x)$；

(9) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)$；

(10) $\int f(\cot x)\csc^2 x\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\mathrm{d}(\cot x)$;

(11) $\int f(\arcsin x)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)$;

(12) $\int f\left(\arctan \dfrac{x}{a}\right)\dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\int f\left(\arctan \dfrac{x}{a}\right)\mathrm{d}\left(\arctan \dfrac{x}{a}\right)$;

(13) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int \dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{f(x)}=\ln|f(x)|+C$.

例 1　求不定积分 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1-2x}$.

解析：凑微分 $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{2}\mathrm{d}(1-2x)$，则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x}\xlongequal{1-2x=u}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u}=-\frac{1}{2}\ln|u|+C=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C.$$

【注】(1) 凑微分求出不定积分后，考生一定要记得进行变量回代，因为被积函数是关于变量 x 的函数.

(2) 这个过程熟练之后，中间换元的过程可以省略.

如此题过程可简化为：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-2x}=-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1-2x)}{1-2x}=-\frac{1}{2}\ln|1-2x|+C.$$

例 2　求不定积分 $\int \dfrac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x$.

解析：$\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$凑成 $\mathrm{d}(1+\ln x)$，则 $\int \dfrac{1}{x(1+\ln x)}\mathrm{d}x=\int \dfrac{1}{1+\ln x}\mathrm{d}(1+\ln x)=\ln|1+\ln x|+C$.

例 3　求不定积分 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{9+4x^2}$.

解析：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{9+4x^2}=\int \frac{\mathrm{d}x}{9\left[1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2\right]}=\frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x}{3}\right)}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2}=\frac{1}{6}\arctan \frac{2x}{3}+C.$

例 4　计算不定积分 $\int \dfrac{1+x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$.

解析：$\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x+\int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}}-\frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^2}}-\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(9-4x^2)}{2\sqrt{9-4x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin \frac{2x}{3}-\frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2}+C.$$

例 5 计算不定积分 $\int \tan^4 x\mathrm{d}x$.

解析： $\int \tan^4 x\mathrm{d}x = \int \tan^2 x \tan^2 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x-1)\tan^2 x\mathrm{d}x$

$= \int \tan^2 x \sec^2 x\mathrm{d}x - \int \tan^2 x\mathrm{d}x = \int \tan^2 x\mathrm{d}(\tan x) - \int (\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C.$

例 6 计算不定积分 $\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

解析： $\int \sin^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x\mathrm{d}(-\cos x) = \int (\cos^2 x-1)\mathrm{d}(\cos x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$

例 7 计算不定积分 $\int \cos^4 x\mathrm{d}x$.

解析： $\int \cos^4 x\mathrm{d}x = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\left[\int \mathrm{d}x + \int 2\cos 2x\mathrm{d}x + \int \cos^2 2x\mathrm{d}x\right]$

$= \frac{1}{4}\left[x + \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\mathrm{d}x\right]$

$= \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

【注】 当被积函数是弦函数的奇数次幂如 $\sin^{2n+1}x$, $\cos^{2n+1}x$ 时，可分出一个因子与 $\mathrm{d}x$ 凑微分，然后积分；当被积函数是弦函数的偶数次幂如 $\sin^{2n}x$, $\cos^{2n}x$ 时，可利用倍角公式先进行降幂，然后积分.

举一反三

1. 若 $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + C$，则 $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x =$ ________.

答案： $-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$

解析： $\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int f(1-x^2)\mathrm{d}(1-x^2) = -\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C.$

2. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x(4-\ln^2 x)}\mathrm{d}x$.

答案： $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right| + C.$

解析： $\int \frac{1}{x(4-\ln^2 x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{4-\ln^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(2+\ln x)(2-\ln x)}$

$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{2+\ln x} + \frac{1}{2-\ln x}\right)\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right| + C.$

3. 计算不定积分 $\int \tan^3 x\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C$.

解析：$\int \tan^3 x\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x-1)\tan x\mathrm{d}x = \int \sec^2 x\tan x\mathrm{d}x - \int \tan x\mathrm{d}x$

$$= \int \tan x\mathrm{d}(\tan x) - \int \tan x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C.$$

4. 计算不定积分 $\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$.

解析：$\int \sin^2 x\cos^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}(\sin x) = \int \sin^2 x\mathrm{d}(\sin x) - \int \sin^4 x\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C.$$

题型二　第二换元积分法

解题依据：设 $x=\psi(t)$，且 $\psi'(t)\neq 0$，若 $\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t=F(t)+C$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F[\psi^{-1}(x)]+C.$$

【注】　第二换元积分法中令 $x=\psi(t)$，求出原函数后必须把 $t=\psi^{-1}(x)$ 回代.

被积函数中含有根式，且无法用直接法和凑微分法计算的题目，为去掉题目中的根式，可用换元法，常见换元法有：

(1) 含 $\sqrt[n]{x+b}$ 时，令 $\sqrt[n]{x+b}=t$，则 $x=t^n-b$，$\mathrm{d}x=nt^{n-1}\mathrm{d}t$；

(2) 同时含 $\sqrt[n]{x}$ 和 $\sqrt[m]{x}$ 时，取 n 和 m 的最小公倍数 $u=(m,n)$，令 $x=t^u$；

(3) 含 $\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$ 时，令 $x=a\sin t$；

(4) 含 $\sqrt{a^2+x^2}$ $(a>0)$ 时，令 $x=a\tan t$；

(5) 含 $\sqrt{x^2-a^2}$ $(a>0)$ 时，令 $x=a\sec t$.

其他常见的代换还有：

(6) 倒代换 $t=\frac{1}{x}$，用于分母幂次较高的问题；

(7) 指数代换 $t=\mathrm{e}^x$，用于当被积函数是 e^x 的函数的问题；

(8) 对数代换 $t=\ln x$，用于被积函数是 e^x 或 $\ln x$ 的函数的问题.

考生在解决具体问题时需要具体分析.

例 1　求不定积分 $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解析：方法 1　令 $\sqrt{2x+1}=t$，$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，则

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(t^2-1)-1}{t} \cdot t dt = \int \left(\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}\right) dt = \frac{1}{6}t^3-\frac{3}{2}t+C$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C.$$

方法 2　本题也可以利用凑微分法来求解，

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1-3}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{4}\int [(2x+1)^{\frac{1}{2}}-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}]d(2x+1)$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C.$$

例 2　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}dx$.

解析：本题同时含有$\sqrt{x}$，$\sqrt[4]{x}$这两个根式，通过换元将根式转化为整式，取 2 和 4 的最小公倍数 4，

设$\sqrt[4]{x}=t$，则 $x=t^4$，$dx=4t^3dt$，于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4t^3}{t+t^2}dt = 4\int \frac{t^3+1-1}{t(t+1)}dt = 4\int \left[\left(t-1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t(t+1)}\right]dt$$

$$= 4\int \left[\left(t-1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$= 2t^2-4t+4\ln|1+t|+C = 2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

例 3　求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

解析：当 $x\geqslant 1$ 时，设 $x=\sec t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sqrt{x^2-1}=\tan t$，$dx=\sec t\tan t dt$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx = \int \frac{\tan t\sec t\tan t dt}{\sec^2 t} = \int (\sec t-\cos t)dt = \ln|\sec t+\tan t|-\sin t+C$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

为了回代方便，根据 $\sec t=x$ 作辅助三角形，如图 3-1，

显然，$\tan t=\sqrt{x^2-1}$，$\sin t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

当 $x\leqslant -1$ 时，设 $x=\sec t$，$t\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$，做法同上，结果也相同.

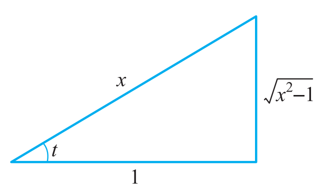

图 3-1

例 4　求不定积分 $\int \frac{x}{(x-1)^{100}}dx$.

解析：设 $x-1=t$，$x=t+1$，$dx=dt$，于是

$$\int\frac{x}{(x-1)^{100}}\mathrm{d}x=\int\frac{t+1}{t^{100}}\mathrm{d}t=\int(t^{-99}+t^{-100})\mathrm{d}t=-\frac{t^{-98}}{98}-\frac{t^{-99}}{99}+C=-\frac{(x-1)^{-98}}{98}-\frac{(x-1)^{-99}}{99}+C.$$

例 5　求不定积分 $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x(x>0)$.

解析:此题因为分母中 x 的幂次较高,不用三角代换,而是用倒代换,

令 $x=\frac{1}{t}$,则 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$, 于是

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{a^2-\frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\right)=-\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot t\mathrm{d}t$$

$$=-\frac{1}{2a^2}\int(a^2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(a^2t^2-1)=-\frac{(a^2t^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3a^2}+C=-\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3a^2x^3}+C.$$

例 6　求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

解析:设 $\mathrm{e}^x=t$, 则 $x=\ln t$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t}$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\frac{\mathrm{d}t}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\arctan t+C=\arctan \mathrm{e}^x+C.$$

【注】　被积函数是 e^x 的函数,把 e^x 看做一个整体,令 $\mathrm{e}^x=t$,这个代换称为指数代换.

由换元法得到的几个结论可作为公式使用,对基本积分公式表做如下扩充:

(14) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$;

(15) $\int\frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$;

(16) $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{a}+C$;

(17) $\int\tan x\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C$;

(18) $\int\cot x\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$;

(19) $\int\sec x\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C$;

(20) $\int\csc x\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C$;

(21) $\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\mathrm{d}x=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

举一反三

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=$________.

答案：$\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$.

解析：$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{1-4x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin 2x+C$.

2. $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，则 $\int \frac{1}{f(x)}dx=$________.

答案：$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

解析：$\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，两端同时对 x 求导，有 $xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则 $\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$，于是 $\int \frac{1}{f(x)}dx=\int x\sqrt{1-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d(1-x^2)=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$.

3. $\int \frac{1}{e^x+1}dx=$(　　).

A. $x-\ln(e^x+1)+C$

B. $x+\ln(e^x+1)+C$

C. $\ln|x|-\ln(e^x+1)+C$

D. $\ln|x|+\ln(e^x+1)+C$

答案：A.

解析：设 $e^x=t, x=\ln t, dx=\frac{dt}{t}$，于是

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx=\int \frac{dt}{(t+1)t}=-\int \frac{dt}{t+1}+\int \frac{dt}{t}=-\ln|t+1|+\ln|t|+C=x-\ln(e^x+1)+C.$$

4. 求不定积分 $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$.

答案：$-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C$.

解析：设 $\frac{1}{x-1}=t$，则 $x-1=\frac{1}{t}, x=\frac{t+1}{t}, dx=-\frac{dt}{t^2}$，于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx &= \int \frac{t^{100}}{t^3}(t+1)^3\cdot\left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\int t^{95}(t^3+3t^2+3t+1)dt\\ &=-\int(t^{98}+3t^{97}+3t^{96}+t^{95})dt=-\left(\frac{t^{99}}{99}+\frac{3t^{98}}{98}+\frac{3t^{97}}{97}+\frac{t^{96}}{96}\right)+C\\ &=-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.\end{aligned}$$

题型三　分部积分法

解题依据：设函数 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 具有连续导数，则有

$$\int uv'\mathrm{d}x=uv-\int u'v\mathrm{d}x,$$

或简记为

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u.$$

【注】　分部积分公式适用于被积函数是两个函数乘积的形式，而且 $\int u'v\mathrm{d}x$ 要比 $\int uv'\mathrm{d}x$ 容易求出，所以正确选择 u,v 是关键.牢记 u 函数的选择顺序是反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数和三角函数.（或反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数和指数函数，也就是说三角函数和指数函数在分部积分计算时，优先级相同.）

例 1　求不定积分 $\int \ln x\mathrm{d}x$.

解析：对数函数的原函数不在基本积分公式里，需要用分部积分法求出，显然，$\ln x=u$，于是 $\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$.

$\ln x$ 的积分比较常用，建议考生将此公式记住！

例 2　求不定积分 $\int \arcsin x\mathrm{d}x$.

解析：$$\int \arcsin x\mathrm{d}x=x\arcsin x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=x\arcsin x+\int\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}$$
$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

同理，$\int \arccos x\mathrm{d}x=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

例 3　求不定积分 $\int \arctan x\mathrm{d}x$.

解析：$$\int \arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2}$$
$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

同理，$\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x=x\operatorname{arccot} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

【注】　求对数函数、反三角函数的原函数需要用分部积分法，得到的结论如下：

（1）$\int \ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x+C$；

（2）$\int \arcsin x\mathrm{d}x=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$；

(3) $\int \arccos x\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$;

(4) $\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$;

(5) $\int \operatorname{arccot} x\mathrm{d}x = x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

例 4 计算 $\int x\cos x\mathrm{d}x$.

解析: $\int x\cos x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}(\sin x) = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$.

【注】 当被积函数为幂函数与三角函数之积时,如: $x^n\sin kx$, $x^n\cos kx$,用分部积分公式计算时,要将幂函数取做 u 函数放在外面, $\sin kx\mathrm{d}x$, $\cos kx\mathrm{d}x$ 分别凑成 $-\frac{1}{k}\mathrm{d}(\cos kx)$, $\frac{1}{k}\mathrm{d}(\sin kx)$.

例 5 计算不定积分 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解析: $\int x\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \ln x\mathrm{d}(x^2) = \frac{1}{2}\left(x^2\ln x - \int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$.

【注】 当被积函数为幂函数与对数函数、反三角函数之积时,如: $x^\alpha\log_a x$, $x^\alpha\arcsin x$ 用分部积分公式计算时,要将对数函数,反三角函数取做 u 函数.

例 6 计算 $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解析:

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \ln^2 x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\ln^2 x + 2\int \frac{1}{x}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\int \ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\frac{1}{x}\ln^2 x - 2\left(\frac{1}{x}\ln x - \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C,$$

两次利用分部积分公式.

例 7 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$.

解析: 方法 1 $\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t = \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}(\sin t) = \mathrm{e}^t\sin t - \int \sin t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sin t + \int \mathrm{e}^t\mathrm{d}(\cos t) = \mathrm{e}^t\sin t + \mathrm{e}^t\cos t - \int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$,移项,有

$2\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\sin t + \mathrm{e}^t\cos t + C_1$,于是有 $\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) + C\left(\frac{C_1}{2} = C\right)$.

方法 2 $\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t = \int \cos t\mathrm{d}\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t\cos t + \int \mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t\sin t - \int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$,移项,有 $\int \mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t + \cos t) + C$.

【注】　由于指数函数的导数还是指数函数，三角函数的导数还是三角函数，这种指数函数与三角函数乘积的不定积分，指数函数和三角函数的地位是一样的，所以指数函数或三角函数都可作为 u 函数，而且用一次分部积分公式不能简化运算，必须两次利用分部积分后出现一项和原被积函数符号相反的项，然后通过移项，得到结果.

举一反三

1. $\int xf''(x)\mathrm{d}x=$__________.

答案：$xf'(x)-f(x)+C$.

解析：$\int xf''(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}f'(x)=xf'(x)-\int f'(x)\mathrm{d}x=xf'(x)-f(x)+C$.

2. $\int xf(x^2)f'(x^2)\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. $\dfrac{f(x^2)}{4}+C$　　B. $\dfrac{f^2(x^2)}{4}+C$　　C. $\dfrac{f^2(x^2)}{2}+C$　　D. $2f^2(x^2)+C$

答案：B.

解析：$\int xf(x^2)f'(x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}f(x^2)=\dfrac{1}{4}f^2(x^2)+C$，故选 B.

3. 计算不定积分 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x$.

答案：$x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$.

解析：
$$\begin{aligned}\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\mathrm{d}x&=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int x\cdot\frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\\&=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

4. 计算不定积分 $\int\dfrac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

答案：$-\dfrac{\arctan x}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}+C$.

解析：
$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\int\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x}\arctan x+\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\\&=-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C.\end{aligned}$$

5. 计算不定积分 $\int\dfrac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

答案：$-\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{1}{x}+C$.

解析：$\displaystyle\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x=-\int\ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C.$

题型四　换元积分法和分部积分法的综合问题

例 1　求不定积分 $\displaystyle\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

解析：设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x&=\int t\cdot\sin t\cdot 2t\mathrm{d}t=-2\int t^2\mathrm{d}(\cos t)=-2t^2\cos t+4\int t\cos t\mathrm{d}t\\&=-2t^2\cos t+4\int t\mathrm{d}(\sin t)=-2t^2\cos t+4t\sin t-4\int\sin t\mathrm{d}t\\&=-2t^2\cos t+4t\sin t+4\cos t+C=-2x\cos\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+4\cos\sqrt{x}+C.\end{aligned}$$

【注】　本题综合性强，先做变量代换，被积函数化成幂函数与三角函数乘积的形式，幂函数是二次方幂，故两次利用分部积分公式，降幂，直至被积函数化成能用基本积分公式的形式.

例 2　求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解析：令 $\arctan x=t$，则 $\tan t=x$，$\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^t\sec^2 t}{\sec^3 t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$，而对于 $\displaystyle\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t$ 来说，利用前文例题的结论，有

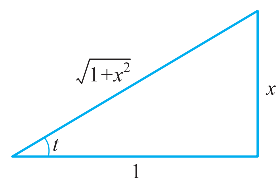

图 3-2

$\displaystyle\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+C$，根据 $\tan t=x$ 作辅助三角形，如图 3-2，有 $\sin t=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$\cos t=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，则上式 $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)+C=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\arctan x}\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}+C$.

例 3　求不定积分 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解析：令 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=\int\frac{\arcsin t}{t}\cdot 2t\mathrm{d}t=2\int\arcsin t\mathrm{d}t\\&=2\left[t\arcsin t-\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right]=2\left[t\arcsin t+\int\frac{\mathrm{d}(1-t^2)}{2\sqrt{1-t^2}}\right]\\&=2(t\arcsin t+\sqrt{1-t^2})+C=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C.\end{aligned}$$

举一反三

1. 求不定积分 $\displaystyle\int\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$.

答案：$2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)+C$.

解析：设$\sqrt{x+1}=t,x=t^2-1,dx=2tdt$，于是

$$\int e^{\sqrt{x+1}}dx=2\int e^t tdt=2(te^t-e^t)+C=2e^{\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}-1)+C.$$

2. 求不定积分$\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.

答案：$x\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2 x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$.

解析：
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx&=\int\frac{(x^2+1-1)\arctan x}{1+x^2}dx=\int\arctan x dx-\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx\\&=x\arctan x-\int x\cdot\frac{dx}{1+x^2}-\int\arctan x d(\arctan x)\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\arctan^2 x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

3. 设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，且当$x\geqslant 0$时，$f(x)F(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知$F(0)=1,F(x)>0$，试求$f(x)$.

答案：$\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.

解析：$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，所以$F'(x)=f(x)$，由已知$f(x)F(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，

即 $F'(x)F(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，两边积分，有

$$F^2(x)=\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=-\int xe^x d\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{1}{1+x}d(xe^x)=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C,$$

则有$F^2(x)=\frac{e^x}{1+x}+C,F(0)=1\Rightarrow C=0$，则 $F^2(x)=\frac{e^x}{1+x}$，又因 $F(x)>0$，所以

$$F(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}=\frac{e^{\frac{x}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}},f(x)=F'(x)=\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x}=\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

三、 典型真题

1. 求不定积分$\int\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$.

解析：$\int\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx=-\int\ln(1+x^2)d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+\int\frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+2\cdot\arctan x+C.$$

2. 求不定积分 $\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx$.

解析：$\int\frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x d(\sin x)}{1+4\sin^2 x}=\frac{1}{4}\int\frac{4\sin^2 x+1-1}{1+4\sin^2 x}d(\sin x)$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{1+4\sin^2 x}\right)d\sin x=\frac{1}{4}\left[\sin x-\frac{1}{2}\arctan(2\sin x)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{8}\arctan(2\sin x)+C.$$

3. 计算不定积分 $\int\frac{e^x}{1+e^x}dx$.

解析：令 $e^x=t,x=\ln t,dx=\frac{1}{t}dt$，则

$$\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{t}{1+t}\cdot\frac{1}{t}dt=\int\frac{dt}{1+t}=\ln|1+t|+C=\ln(1+e^x)+C.$$

4. 求不定积分 $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$.

解析：令$\sqrt{x}=t,x=t^2,dx=2tdt$，则

$$\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx=\int\frac{t+\ln t^2}{t^2}\cdot 2tdt=2\int\frac{t+\ln t^2}{t}dt=2\int\frac{t+2\ln t}{t}dt=2\left(t+2\frac{\ln^2 t}{2}\right)+C$$

$$=2t+2\ln^2 t+C=2\sqrt{x}+2\ln^2\sqrt{x}+C.$$

5. 计算 $\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx$.

解析：$\int\frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x}dx=\int\ln(\cos x)\sec^2 xdx=\int\ln(\cos x)d(\tan x)$

$$=\tan x\ln(\cos x)+\int\tan x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}dx=\tan x\ln(\cos x)+\int\tan^2 xdx$$

$$=\tan x\ln(\cos x)+\int(\sec^2-1)dx=\tan x\ln(\cos x)+\tan x-x+C.$$

四、 同步练习

1. 不定积分 $\int\sin^3 x\cos xdx=$________.

答案：$\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

解析：$\int\sin^3 x\cos xdx=\int\sin^3 xd(\sin x)=\frac{\sin^4 x}{4}+C$.

2. $\int\frac{x}{1+x^4}dx=$________.

答案：$\frac{1}{2}\arctan x^2+C$.

解析：$\int\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{1+(x^2)^2}=\frac{1}{2}\arctan(x^2)+C$.

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int\cos xf(\sin x)dx=(\quad)$.

A. $F(\cos x)+C$　　B. $F(\sin x)+C$　　C. $-F(\cos x)+C$　　D. $-F(\sin x)+C$

答案：B.

解析：$\int\cos xf(\sin x)dx=\int f(\sin x)d(\sin x)=F(\sin x)+C$，选 B.

4. $\int f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx$ 的结果是（　　）.

A. $f\left(-\frac{1}{x}\right)+C$　　B. $-f\left(-\frac{1}{x}\right)+C$　　C. $f\left(\frac{1}{x}\right)+C$　　D. $-f\left(\frac{1}{x}\right)+C$

答案：D.

解析：$\int f'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx=-\int f'\left(\frac{1}{x}\right)d\left(\frac{1}{x}\right)=-f\left(\frac{1}{x}\right)+C$，故选 D.

5. $\int x\sqrt{1+x}\,dx=(\quad)$.

A. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$　　B. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

C. $-\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}$　　D. $\frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

答案：B.

解析：$\int x\sqrt{1+x}\,dx=\int(x+1-1)\sqrt{1+x}\,dx=\int(x+1)^{\frac{3}{2}}dx-\int(x+1)^{\frac{1}{2}}dx$

$$=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\text{，故选 B.}$$

6. 求不定积分 $\int\frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

答案：$-\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin^2x}{2}+C$.

解析：$\int\frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}+\int\arcsin x\,d(\arcsin x)$$

$$=-\sqrt{1-x^2}+\frac{\arcsin^2x}{2}+C.$$

7. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}dx\ (x>2)$.

答案：$\dfrac{1}{4}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}+C$.

解析：设 $x=2\sec t$，$\mathrm{d}x=2\sec t\tan t\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}x=\int\frac{2\sec t\tan t\mathrm{d}t}{4\sec^2 t\cdot 2\tan t}=\frac{1}{4}\int\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\sin t+C=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+C.$$

8. 求不定积分 $\int x\cos x\sin x\mathrm{d}x$.

答案：$-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+\dfrac{1}{8}\sin 2x+C$.

解析：

$$\begin{aligned}\int x\cos x\sin x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int x\sin 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int x\mathrm{d}(-\cos 2x)=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{4}\int\cos 2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x+C.\end{aligned}$$

9. 求不定积分 $\int\dfrac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x$.

答案：$2x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-4\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-2\ln\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C$.

解析：设 $\mathrm{e}^x=t$，$x=\ln t$，$\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$，于是

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x=\int\frac{t\ln t}{\sqrt{t+1}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{t}=2\int\ln t\mathrm{d}\sqrt{t+1}=2\sqrt{t+1}\ln t-2\int\sqrt{t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

对于 $\int\sqrt{t+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ 部分，设 $\sqrt{t+1}=u$，$t=u^2-1$，$\mathrm{d}t=2u\mathrm{d}u$，则

$$\int\sqrt{t+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int\frac{u}{u^2-1}\cdot 2u\mathrm{d}u=2\int\frac{u^2-1+1}{u^2-1}\mathrm{d}u=2u+\ln\frac{u-1}{u+1}+C_1=2\sqrt{t+1}+\ln\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}+C_1,$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}\mathrm{d}x&=2\sqrt{t+1}\ln t-2\left(2\sqrt{t+1}+\ln\frac{\sqrt{t+1}-1}{\sqrt{t+1}+1}+C_1\right)\\&=2x\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-4\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}-1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}+1}+C\text{，其中 }2C_1=C.\end{aligned}$$

考点三　有理函数不定积分的求法

一、考试要求

会求有理函数的不定积分.

二、典型例题

题型　求有理函数的不定积分

解题依据：所谓有理函数，就是两个多项式之商.

$\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$所表示的函数，其中 m,n 为非负整数，各次幂前的系数都是实数且 $a_0\neq0,b_0\neq0$，这里 $P(x),Q(x)$ 为 x 的不可约多项式.如果 $n\geqslant m$，称有理函数为假分式，若 $n<m$，称有理函数为真分式.例如$\dfrac{x^2+1}{x}$为假分式，$\dfrac{x}{x^2+1}$为真分式.利用多项式除法，总可以将一个假分式化成一个多项式与一个真分式的和的形式.

例 1　计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x$.

解析：$\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+1+2}{x+1}=1+\dfrac{2}{x+1}$，于是

$$\int\frac{x+3}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x+1}\right)\mathrm{d}x=x+\ln(1+x)^2+C.$$

例 2　计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x$.

解析：$\dfrac{x^3}{x+1}=\dfrac{x^3+1-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$，于是

$$\int\frac{x^3}{x+1}\mathrm{d}x=\int\left(x^2-x+1-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C.$$

例 3　计算不定积分 $\displaystyle\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x$.

解析：$\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\dfrac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$，而

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

设 $4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$，利用取特殊值法，分别取 $x=0,x=2,x=-2$ 得 $A=2$；$B=5$；$C=-3$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\mathrm{d}x&=\int\left(x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.\end{aligned}$$

【注】 上述三个例题中的被积函数都是有理假分式,方法均为首先化为多项式与真分式之和,然后将真分式分解为最简分式,再积分.

例 4 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解析:$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$,于是

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-3|-\ln|x-2|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$$

例 5 计算不定积分 $\int \frac{x^4+1}{1+x^6}\mathrm{d}x$.

解析:$1+x^6=1+(x^2)^3=(1+x^2)(1-x^2+x^4)$,

$$\int \frac{x^4+1}{1+x^6}\mathrm{d}x=\int \frac{x^4-x^2+1+x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^6}=\arctan x+\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}x^3}{1+(x^3)^2}$$

$$=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan x^3+C.$$

举一反三

1. 求不定积分 $\int \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x$.

答案:$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

解析:$\frac{1}{x(x-1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}$,$\int \frac{1}{x(x-1)}\mathrm{d}x=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$.

2. 求不定积分 $\int \frac{x}{(x-1)^3}\mathrm{d}x$.

答案:$-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C$.

解析:$\frac{x}{(x-1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}\Rightarrow\begin{cases}A=0,\\B=1,\\C=1,\end{cases}$于是

$$\int \frac{x}{(x-1)^3}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+C.$$

3. 求不定积分 $\int \frac{1}{(1+x^2)(x^2-x)}\mathrm{d}x$.

答案:$\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan x+C$.

解析:$\frac{1}{(1+x^2)(x^2-x)}=\frac{1}{(1+x^2)x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{1+x^2}$,得到等式

$$A(x-1)(x^2+1)+Bx(x^2+1)+(Cx+D)x(x-1)=1,\Rightarrow\begin{cases}A+B+C=0,\\-A-C+D=0,\\A+B-D=0,\\-A=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1,\\B=\dfrac{1}{2},\\C=\dfrac{1}{2},\\D=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$\dfrac{1}{(1+x^2)(x^2-x)}=\dfrac{1}{(1+x^2)x(x-1)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{1+x^2}$,所以

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+x^2)(x^2-x)}\mathrm{d}x&=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\arctan x+C.\end{aligned}$$

三、典型真题

1. 不定积分 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 的结果为(　　).

A. $\ln\left|\dfrac{x+1}{x}\right|+C$　　B. $\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$　　C. $\ln\dfrac{x+1}{x}+C$　　D. $\ln\dfrac{x}{x+1}+C$

解析:$\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$,所以有 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|+C$,选 B.

2. 求不定积分 $\int\dfrac{x-3}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

解析:
$$\begin{aligned}\int\frac{x-3}{x^2+1}\mathrm{d}x&=\int\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x-3\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}-3\arctan x\\&=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-3\arctan x+C.\end{aligned}$$

四、同步练习

1. 求不定积分 $\int\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

答案:$\dfrac{x^2}{2}+\arctan x+C$.

解析:$\int\dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(x+\dfrac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}+\arctan x+C$.

2. 求不定积分 $\int\dfrac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

答案:$\ln\left|\dfrac{x}{x-1}\right|-\dfrac{1}{x-1}+C$.

解析：$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}\Rightarrow A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx=1$，比较系数，解得 $A=1,B=-1,C=1$，于是，

$$\int\frac{1}{x(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+\int\frac{1}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C=\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C.$$

3. 求不定积分 $\int\frac{3x^2-2}{x^3-2x+1}\mathrm{d}x$.

答案：$\ln|x^3-2x+1|+C$.

解析：$\int\frac{3x^2-2}{x^3-2x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^3-2x+1)}{x^3-2x+1}=\ln|x^3-2x+1|+C$.

4. 求不定积分 $\int\frac{x^2}{(x-1)^{10}}\mathrm{d}x$.

答案：$-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}+C$.

解析：设 $\frac{1}{x-1}=t,x=\frac{t+1}{t},\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{(x-1)^{10}}\mathrm{d}x&=\int\frac{t^{10}\cdot(t+1)^2}{t^2}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right)=-\int t^6(t^2+2t+1)\mathrm{d}t=-\int(t^8+2t^7+t^6)\mathrm{d}t\\&=-\frac{t^9}{9}-\frac{t^8}{4}-\frac{t^7}{7}+C=-\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}+C.\end{aligned}$$

5. 求不定积分 $\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{1}{5}\left[\ln\frac{(1+2x)^2}{1+x^2}+\arctan x\right]+C$.

解析：$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$，$1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)$，

利用取特殊值法，令 $x=-\frac{1}{2}$，得 $A=\frac{4}{5}$，令 $x=0$，得 $C=\frac{1}{5}$，令 $x=1$，得 $B=-\frac{2}{5}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}\mathrm{d}x&=\frac{4}{5}\int\frac{1}{1+2x}\mathrm{d}x+\frac{1}{5}\int\frac{-2x+1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{5}\ln|1+2x|-\frac{1}{5}\ln|1+x^2|+\frac{1}{5}\arctan x+C\\&=\frac{1}{5}\left[\ln\frac{(1+2x)^2}{1+x^2}+\arctan x\right]+C.\end{aligned}$$

6. 求不定积分 $\int\frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}x+C$.

解析：$\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$，得

$$A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=1\Rightarrow\begin{cases}A+B=0,\\A-B+C=0,\\A-C=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\dfrac{1}{2},\\B=-\dfrac{1}{2},\\C=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^3-1}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\mathrm{d}x+\int\frac{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{3}{4}\left\{1+\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}}\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)+C.\end{aligned}$$

考点四　定积分的性质和应用

一、考试要求

1. 了解定积分的概念.
2. 理解定积分的几何意义.
3. 了解函数可积的条件.
4. 掌握定积分的基本性质.

二、典型例题

题型　利用定积分的性质求解定积分问题

解题依据：定积分是个和式极限，$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，式中，$\xi_i$ 表示子区间$[x_{i-1},x_i]$上任意一点，$\Delta x=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$ 表示最大子区间的长度.

例 1 估计积分值 $\int_1^3 (x+1)\mathrm{d}x$ 的取值范围为(　　).

A. $[6,15]$　　B. $[1,4]$　　C. $[2,4]$　　D. $[4,8]$

解析:$f(x)=x+1$ 在区间$[1,3]$上单调递增,最小值、最大值分别为 2 和 4,区间长度等于 2,故 $4=2\times2\leqslant\int_1^3(x+1)\mathrm{d}x\leqslant4\times2=8$,于是 $4\leqslant\int_1^3(x+1)\mathrm{d}x\leqslant8$,故选 D.

例 2 设 $f(x)=\mathrm{e}^x+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $f(x)=$________.

解析:定积分是一个常数,不妨设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$,则两边从 0 到 1 积分,得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\mathrm{e}^x+ax^3)\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^x+\frac{a}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\mathrm{e}-1+\frac{a}{4}=a,$$

解得 $a=\dfrac{4}{3}(\mathrm{e}-1)$.

例 3 积分 $\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cos x\mathrm{d}x$ 的值(　　).

A. 与 a 无关且恒为正　　B. 与 a 无关且恒为负

C. 恒为 0　　D. 与 a 有关

解析:被积函数为以 2π 为周期的函数且积分区间长度为 2π,所以根据定积分的性质,有

$$\begin{aligned}\int_a^{a+2\pi}\ln(2+\cos x)\cos x\mathrm{d}x&=\int_{-\pi}^{\pi}\ln(2+\cos x)\mathrm{d}(\sin x)\\&=\sin x\ln(2+\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x\\&=0-0+2\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x>0,\end{aligned}$$

故选 A.

例 4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

解析:本题考查定积分的定义,将区间$[0,1]$ n 等分,则每个小区间长度为$\dfrac{1}{n}$,则定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 表示以$\dfrac{1}{n}$为底,$f(x)$为高的矩形面积和的极限值,所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=[\arctan x]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

例 5　设 $\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}dx=m$，$\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}dx=($　　$)$.

A. $b-a-m$　　B. $b+a-m$　　C. $b-a+m$　　D. $m-b+a$

解析：本题考查定积分的性质：两个函数和的定积分等于其定积分的和，即 $\int_a^b \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}dx=\int_a^b dx=\int_a^b \frac{f(x)}{f(x)+g(x)}dx+\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}dx=m+\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}dx=b-a$，则 $\int_a^b \frac{g(x)}{f(x)+g(x)}dx=b-a-m$，故选 A.

举一反三

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx=$________.

答案：0.

解析：奇函数在对称区间上的积分等于 0.

2. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=($　　$)$.

A. $\frac{1}{4}\pi a^2$　　B. πa^2　　C. $\frac{1}{2}\pi a^2$　　D. $\frac{3}{4}\pi a^2$

答案：A.

解析：利用定积分的几何含义知 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=$表示圆点在圆心，半径为 a 的圆面积的 $\frac{1}{4}$，所以 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{\pi a^2}{4}$，故选 A.

3. 估计积分值 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx($　　$)$.

A. $-1\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx\leqslant 0$　　B. $1\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx\leqslant 2$

C. $\frac{1}{2}\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx\leqslant 3$

答案：C.

解析：设 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}$，在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，$x<\tan x$，$f'(x)<0$，$\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}\leqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故选 C.

4. 函数 $\sqrt{4-x^2}$ 在区间 $[-2,2]$ 上的平均值为（　　）.

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 2π

答案：A.

解析：$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}4\pi=2\pi$，函数 $\sqrt{4-x^2}$ 在区间 $[-2,2]$ 上的平均值为 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故

选 A.

5. 积分值 $I_1=\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x, I_2=\int_1^2 (\ln x)^2\mathrm{d}x$,则它们之间的大小关系是(　　).

A. $I_1\leqslant I_2$　　B. $I_1\geqslant I_2$　　C. $I_1=I_2$　　D. 无法判断

答案:B.

解析:在区间[1,2]上,$\ln x\geqslant(\ln x)^2$,所以有 $I_1\geqslant I_2$,故选 B.

三、 典型真题

1. 已知 $f(x)$ 在[0,1]上连续,$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,　则 $\int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x=$________.

解析: 利用偶函数在对称区间上的积分性质,得 $\int_{-1}^1 f(|x|)\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)=2$.

2. 若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=2$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=1$,则 $\int_a^b [3f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x=$________.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解析: $\int_a^b [3f(x)-2g(x)]\mathrm{d}x=3\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=3\times2-2\times1=4$.

故选 D.

3. 函数 $f(x)=\ln x$ 在区间[1,3]连续,并在该区间上的平均值是 6,则 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=$________.

解析:因为 $6=\dfrac{\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x}{2}$, 所以 $\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=12$.

四、 同步练习

1. 设 $f(x)$ 连续,且 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$________.

答案:$-\dfrac{1}{2}$.

解析:设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$, 由 $f(x)=x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 等式两边从 0 到 1 积分,有 $a=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1 2a\mathrm{d}x$, $a=\dfrac{1}{2}+2a$,故 $a=-\dfrac{1}{2}$.

2. 已知 $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=3$, $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=7$,则 $\int_4^3 f(x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. 4　　B. -4　　C. 2　　D. 6

答案:B.

解析: $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x+\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=3+\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=7$, 得 $\int_3^4 f(x)\mathrm{d}x=4$, 所以

$\int_{4}^{3} f(x)\mathrm{d}x=-4$，故选 B.

3. 已知 $f(x)$ 为奇函数，且 $\int_{0}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x=3$，试计算 $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$ 的值.

答案：0.

解析：奇函数在关于原点对称区间上的积分等于 0，考生不要被题目给的条件 $\int_{0}^{1}|f(x)|\mathrm{d}x=3$ 迷惑.

考点五　变上限积分函数的求导公式及牛顿-莱布尼茨公式

一、考试要求

1. 理解变限积分函数的概念.
2. 熟练掌握变限积分函数的导数.
3. 熟练掌握牛顿-莱布尼茨公式.

二、典型例题

解题依据：（1）设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，对任意 $x\in[a,b]$，$P(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的积分上限 x 的函数，称为变上限积分函数. 同理，$Q(x)=\int_{x}^{b}f(t)\mathrm{d}t$ 为定义在 $[a,b]$ 上的积分下限 x 的函数，称为变下限积分函数.

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $P(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $P'(x)=f(x), x\in[a,b]$.

（3）积分变上、下限积分函数求导公式：

$$\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]'=f[\beta(x)]\beta'(x)-f[\alpha(x)]\alpha'(x).$$

题型一　利用变上限积分函数求导公式求极限

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{2x}^{0}\sin t^{2}\mathrm{d}t}{x^{3}}$.

解析：这是“$\dfrac{0}{0}$”型未定式的极限，利用洛必达法则，原式极限等于分子与分母的导函数的极限，而分子的导数就是一个变下限积分函数的导数.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{2x}^{0}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_{2x}^{0}\sin t^2\mathrm{d}t\right)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(2x)^2\cdot(2x)'}{3x^2}$$
$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x^2}{x^2}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2}=-\frac{8}{3}.$$

例 2 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t}{\sin^2 x}$.

解析:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t\right)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

例 3 设$f(x)=\begin{cases}\int_0^{2x}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$求当$A$为何值时,$f(x)$在$x=0$处可导,并求$f'(0)$.

解析:本题是一个综合题,既考查函数在某一点处导数的定义,又考查变上限函数的求导法则.由导数的定义知$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t-A}{x}$,分母的极限为0,导数存在,分子的极限必为0,则有$\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{2x}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t-A=0$,得$A=0$,这是“$\dfrac{0}{0}$”型的未定式,满足洛必达法则使用条件,所以$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{2x}(\mathrm{e}^{t^2}-1)\mathrm{d}t-A}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^{4x^2}-1)\cdot 2=0$.

举一反三

1. $F(x)=\int_1^{x^2}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$,则$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=$________.

答案:$\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^6}}$.

解析:$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\left(\int_1^{x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+t^3}}\mathrm{d}t\right)'=\dfrac{(x^2)'}{\sqrt{1+x^6}}=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^6}}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\ln(t^2+1)\mathrm{d}t=$(　　).

A. $\ln(t^2+1)$　　B. $\ln(x^2+1)$　　C. $2x\ln(x^2+1)$　　D. $2t\ln(t^2+1)$

答案:B.

解析:$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\ln(t^2+1)\mathrm{d}t=\ln(x^2+1)$.故选 B.

3. $F(x)=\int_0^x\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t$,则$F(x)$在$[0,\pi]$上有(　　).

A. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$为极大值,$F(0)$为最小值　　B. $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$为极大值,但无最小值

C. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$为极小值,但无最大值　　D. $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$为最小值,$F(0)$为最大值

答案:A.

解析:$F'(x)=\left(\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt\right)'=e^{-x}\cos x$,令 $F'(x)=0\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$,

$$F''(x)=(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\cos x+\sin x),$$

$F''\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, $x=\frac{\pi}{2}$是$F(x)$的极大值. 当 $x\in[0,\pi]$,$F(0)$为最小值 $F(0)=0$.故选 A.

4. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{\sin^2 x}$.

答案:$\frac{1}{2}e^{-1}$.

解析:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1}e^{-t^2}dt}{x^2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}(-\cos x)'}{(x^2)'}=e^{-1}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}e^{-1}$.

5. 设由方程 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$ 所确定的 y 是 x 的函数,求 dy.

答案:$-\frac{\cos x}{e^y}dx$.

解析:方程两边对 x 求导数,有 $e^y y'+\cos x=0, y'=-\frac{\cos x}{e^y}$, 从而 $dy=-\frac{\cos x}{e^y}dx$.

题型二　利用牛顿-莱布尼茨公式计算定积分

例 1　计算 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

解析:由于 $\arcsin x$ 是$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的一个原函数,所以

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=(\arcsin x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

例 2　计算 $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx$.

解析:$x<0$ 时,$\frac{1}{x}$的一个原函数是 $\ln|x|$, 所以

$$\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x}dx=(\ln|x|)\Big|_{-2}^{-1}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2.$$

例 3　计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$.

解析:$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\,dx=\int_0^{\pi}\sin x|\cos x|\sqrt{\sin x}\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\mathrm{d}(\sin x)$$

$$=\left(\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{2}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)=\frac{4}{5}.$$

【注】 本题中在 0 到 π 区间上 $\cos x$ 的符号是不同的,必须分开讨论,根据定积分对区间的可加性,把区间分成 0 到 $\frac{\pi}{2}$,$\frac{\pi}{2}$到 π 两个区间.

例 4 $\int_{-1}^{1}\min\{x,x^2\}\mathrm{d}x$.

解析:$\min\{x,x^2\}$在区间$[-1,1]$上取值不同,是个分段函数,

$$\min\{x,x^2\}=\begin{cases}x, & -1\leqslant x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}$$

所以

$$\int_{-1}^{1}\min\{x,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

【注】 最大值函数、最小值函数都是分段函数,计算定积分时必须根据积分区间及被积函数分别计算各区间内定积分的值.

例 5 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解析:第一部分$\frac{\sin x}{x^8+1}$是关于原点对称区间上的奇函数,所以不用计算可知其积分值等于 0,第二部分$\sqrt{x^2}=|x|$为偶函数,所以 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sin x}{x^8+1}+\sqrt{x^2}\right)\mathrm{d}x=0+2\int_0^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$.

例 6 设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geqslant 0,\\ \mathrm{e}^x & x<0,\end{cases}$计算 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$.

解析:令 $x-1=t$,当 $x:0\to 2$ 时,$t:-1\to 1$,则

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1}+\ln 2.$$

例 7 积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{\sin x+(\arctan x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.

解析:考生看到这种积分区间关于原点对称的题目,应想到本题可能考查的是奇偶函数在对称区间上的定积分的性质。第一部分$\frac{\sin x}{1+x^2}$是奇函数,在关于原点对称区间上的积分等于 0,第二部分$\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}$是偶函数,于是原式

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\sin x+(\arctan x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=0+2\int_{0}^{1}\frac{(\arctan x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=2\int_{0}^{1}(\arctan x)^2\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{2}{3}(\arctan x)^3\Big|_0^1=\frac{\pi^3}{96}.$$

举一反三

1. $\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. $\frac{4}{15}(2+\sqrt{2})$　　B. $-\frac{4}{15}(2+\sqrt{2})$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{5}$　　D. $-\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{8\sqrt{2}}{5}$

答案：A.

解析：

$$\int_0^2\sqrt{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 x^{\frac{1}{2}}|x-1|\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x^{\frac{1}{2}}(x-1)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^2$$
$$=\frac{8}{15}+\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{15}(2+\sqrt{2}),$$

故选 A.

2. $\int_{-1}^{1}x(x+x^{2023})(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=$________.

答案：0.

解析：本题被积函数是三个奇函数的积，仍为奇函数，利用奇函数在关于原点对称区间上的积分等于 0 的性质可知，积分值为 0.

3. 计算定积分 $\int_0^1(\mathrm{e}^x-1)^4\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{(\mathrm{e}-1)^5}{5}$.

解析：$\int_0^1(\mathrm{e}^x-1)^4\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)=\left[\frac{(\mathrm{e}^x-1)^5}{5}\right]\Big|_0^1=\frac{(\mathrm{e}-1)^5}{5}$.

4. 计算定积分 $\int_a^b|2x-(a+b)|\mathrm{d}x\ (a<b)$.

答案：$\frac{1}{2}(a-b)^2$.

解析：$\int_a^b|2x-(a+b)|\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[(a+b)-2x]\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}[2x-(a+b)]\mathrm{d}x$

$$=[(a+b)x]\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}-(x^2)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}}+(x^2)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}-[(a+b)x]\Big|_{\frac{a+b}{2}}^{b}=\frac{1}{2}(a-b)^2.$$

5. 计算定积分 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1.\end{cases}$

答案：$\frac{5}{6}$.

解析：$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x+\int_1^2 (x-1)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right]\Bigg|_1^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-0=\frac{5}{6}$.

三、 典型真题

1. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{\sin x^3}$.

解析：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{\sin x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x (\mathrm{e}^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

2. 函数$f(x)$连续，且$\int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t=1+x^3$，则$f(8)=$________.

解析：$\int_0^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t=1+x^3$，两边同时对$x$求导，有$2f(2x)=3x^2$，$f(2x)=\frac{3}{2}x^2$，令$2x=8$，得$x=4$，代入，有$f(8)=\frac{3}{2}\times16=24$.

3. 设某产品在时刻t总产量的变化率为$f(t)=100+12t-0.6t^2$（单位：小时），求：从$t=2$到$t=4$这两个小时的总产量是多少？

解析：$F(t)=\int_2^4 (100+12t-0.6t^2)\,\mathrm{d}t=(100t+6t^2-0.2t^3)\big|_2^4$

$=200+6(16-4)-0.2(64-8)=260.8$.

4. 设$f(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求$f(x)$的极值.

解析：方程两边对x求导，有$f'(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$，令$f'(x)=0$，得$x=0$. 当$x>0$时，$f'(x)>0$，当$x<0$时，$f'(x)<0$，所以$x=0$为$f(x)$的极小值点，极小值$f(0)=0$.

四、 同步练习

1. 设$f(x)=\begin{cases}1, & -2\leqslant x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 2x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 则$\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

答案：$\frac{13}{2}$.

解析：$\int_{-2}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^0 \mathrm{d}x+\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x+\int_1^2 2x\,\mathrm{d}x=2+\frac{(x+1)^2}{2}\Bigg|_0^1+x^2\big|_1^2$

$=2+2-\frac{1}{2}+3=\frac{13}{2}$.

2. 已知当$x\to0$时，$\int_0^{\sin x} t^3\mathrm{d}t$与$x^\alpha$是同阶无穷小量，则常数$\alpha=$________.

答案：4.

解析：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^{\sin x}t^3\mathrm{d}t}{x^{\alpha}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^3x\cdot\cos x}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{\alpha x^{\alpha-1}}$，$\alpha-1=3$，$\alpha=4$.

3. $F(x)=\int_{x^2}^{x^3}te^{t^2+t}\mathrm{d}t$，则$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=$________.

答案：$3x^5\mathrm{e}^{x^6+x^3}-2x^3\mathrm{e}^{x^4+x^2}$.

解析：$\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=x^3\mathrm{e}^{x^6+x^3}(x^3)'-x^2\mathrm{e}^{x^4+x^2}(x^2)'=3x^5\mathrm{e}^{x^6+x^3}-2x^3\mathrm{e}^{x^4+x^2}$.

4. 设$f(x)$为连续函数，且$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=a^{2x}(a>0$ 且 $a\neq1)$，则$f(x)=($　　$)$.

A. $2a^{2x}$　　B. $a^{2x}\ln a$　　C. $2xa^{2x}$　　D. $2a^{2x}\ln a$

答案：D.

解析：等式两边对 x 求导，有$f(x)=(a^{2x})'=2a^{2x}\ln a$，故选 D.

5. 设 $y=f(x)$满足 $\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，且$f(0)=2$，则$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=($　　$)$.

A. $\dfrac{3\pi}{8}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{3\pi}{4}-2$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

答案：B.

解析：$\Delta y=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x+o(\Delta x)$，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$，

$$f(x)=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C,f(0)=2\Rightarrow C=1,$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+1)\mathrm{d}x=(x\arcsin x)\Big|_0^1-\int_0^1 x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x+1$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}+1=\frac{3\pi}{4},$$

故选 B.

6. 若连续函数$f(x)$满足$\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，则$f(7)=($　　$)$.

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{12}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

答案：C

解析：$\int_0^{x^3-1}f(t)\mathrm{d}t=x$，等式两边同时对 x 求导，有$f(x^3-1)\cdot3x^2=1$，将 $x=2$ 代入，有 $f(7)=\dfrac{1}{3x^2}\Big|_{x=2}=\dfrac{1}{12}$，故选 C.

7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right]=($　　$)$.

A. $\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$　　B. $4x^4\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt + x\sqrt{1+x^4}$ D. $x\sqrt{1+x^4}$

答案:C.

解析:本题是求两个函数乘积的导数,可利用导数乘法的运算性质,$\frac{d}{dx}\left[x\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt\right] = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,dt + x\sqrt{1+x^4}$.故选 C.

8. 计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\sin^3 x+\cos^3 x)\,dx$.

答案:$\frac{3\pi}{8}$.

解析:
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(\sin^3 x+\cos^3 x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1-2\cos 2x+\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right]dx$$
$$= \left(\frac{3}{4}x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{16}\sin 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

考点六 定积分的换元积分法和分部积分法

一、 考试要求

熟练掌握定积分的换元积分法和分部积分法.

二、 典型例题

题型一 换元积分法

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,函数 $x=\phi(t)$ 满足:

(1) $\phi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 $\phi'(t)$;

(2) 当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时,$a\leqslant\phi(t)\leqslant b$,且 $\phi(\alpha)=a$,$\phi(\beta)=b$;则有
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,dt.$$

【注】 (1) 定积分换元时,不仅被积函数要变换,积分上、下限也要随之变换;

(2) 求出 $f[\phi(t)]\phi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后,不必像计算不定积分那样再把 $\Phi(t)$ 变换成原变量 x 的函数,而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 然后相减即可.

例 1　若 $f(x)$ 有连续二阶导数,且 $f'(a)=b, f'(b)=a$,则 $\int_a^b f'(x)f''(x)\,dx=(\quad)$.

解析: $\int_a^b f'(x)f''(x)\,dx=\int_a^b f'(x)\,df'(x)=\left.\frac{[f'(x)]^2}{2}\right|_a^b=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$.

例 2　计算 $\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}dx$.

解析:设 $\sqrt{2x+1}=t$,则 $x=\frac{t^2-1}{2}$, $dx=t\,dt$,当 $x:0\to4$ 时, $t:1\to3$,于是

$$\int_0^4 \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+1}{t}t\,dt=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+1)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+t\right)\Bigg|_1^3=\frac{16}{3}.$$

例 3　计算 $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

解析:此类问题一般的解法是通过三角换元去掉根式,设 $x=\sin t$, $dx=\cos t\,dt$,当 x: $0\to1$ 时, $t:0\to\frac{\pi}{2}$.于是

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt=\frac{1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,d(4t)=\frac{\pi}{16}.$$

例 4　证明:若 $f(x)$ 连续,则 $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx$.

证明:令 $\pi-x=t$,则 $dx=-dt$,当 $x:0\to\pi$ 时, $t:\pi\to0$.

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\int_\pi^0 (\pi-t)f[\sin(\pi-t)]\,d(-t)=\int_0^\pi (\pi-t)f(\sin t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi \pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\pi\int_0^\pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx,$$

移项整理后原式成立,得证.

举一反三

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,且 $\int_a^b f(x)\,dx=m$,则 $\int_a^b f(a+b-x)\,dx=$________.

答案: m.

解析: $\int_a^b f(a+b-x)\,dx=-\int_a^b f(a+b-x)\,d(a+b-x)$.

令 $x=a+b-t$,则原式 $=-\int_b^a f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx=m$.

2. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{3}t^4}dt$,则 $f(x)$ 为________函数(填奇或偶).

答案：奇.

解析：$f(-x)=\int_0^{-x}e^{-\frac{1}{3}t^4}dt\xlongequal{u=-t}\int_0^{x}e^{-\frac{1}{3}u^4}d(-u)=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数.

3. 求定积分 $\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$.

答案：$4-2\arctan 2$.

解析：设 $\sqrt{x-1}=t$，$x=t^2+1$，$dx=2tdt$，当 $x:1\to5$ 时，$t:0\to2$，于是

$$\int_1^5\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int_0^2\frac{t}{t^2+1}\cdot 2tdt=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\,(t-\arctan t)\Big|_0^2=4-2\arctan 2.$$

4. 求定积分 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

答案：$2-\frac{\pi}{2}$.

解析：设 $\sqrt{e^x-1}=t$，$x=\ln(t^2+1)$，$dx=\frac{2tdt}{t^2+1}$，当 $x:0\to\ln 2$ 时，$t:0\to1$，于是

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_0^1 t\cdot\frac{2tdt}{t^2+1}=2\,(t-\arctan t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

5. 已知 $f(x)=e^{x^2}$，求 $\int_0^1 f'(x)f''(x)dx$.

答案：$2e^2$.

解析：$f'(x)=e^{x^2}\cdot 2x$，$f'(1)=2e$，$f'(0)=0$，

$$\int_0^1 f'(x)f''(x)dx=\int_0^1 f'(x)df'(x)=\frac{1}{2}[f'(x)]^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(2e)^2=2e^2.$$

题型二　分部积分法

设函数 $u(x)$，$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导数，则 $\int_a^b u\,dv=(uv)\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$.

【注】 定积分的分部积分公式的适用范围及使用方法与不定积分的分部积分过程类似.应用公式的关键是 u 函数的选择次序仍然是反三角函数、对数函数、幂函数、指数函数、三角函数(简记为“反、对、幂、指、三”).

例 1 计算 $\int_0^1\arctan x\,dx$.

解析：$$\int_0^1\arctan x\,dx=(x\arctan x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 2 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx$.

解析：被积函数是三角函数与幂函数乘积的形式，所以根据 u 函数的选取原则，将幂函数选做 u 函数，于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(\sin x)=(x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1.$$

例 3　计算 $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$.

解析: 被积函数是反三角函数与幂函数乘积的形式,所以根据 u 函数的选取原则,将反三角函数选为 u 函数,于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x\mathrm{d}\frac{x^2}{2}&=\left(\frac{x^2}{2}\arctan x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1+x^2-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-\arctan x)\Big|_0^1\\&=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例 4　计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x$.

解析: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}(e^x)=(e^x\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}(\sin x)=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}(e^x)$

$=e^{\frac{\pi}{2}}-\left[(e^x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\mathrm{d}(\cos x)\right]=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x$,

移项后整理可得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$.

【注】 形如这种三角函数与指数函数乘积的定积分,需两次应用分部积分公式.

例 5　如果 $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$,试计算 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)\mathrm{d}x$.

解析: $f(x)$ 的一个原函数是 $\frac{\sin x}{x}$,即 $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}+C$,等式两边对 x 求导,得

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2},$$

于是

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)\mathrm{d}x&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\mathrm{d}f(x)=[xf(x)]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\left(x\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left(\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\\&=(\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left(2\frac{\sin x}{x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-1-2\left(0-\frac{2}{\pi}\right)=\frac{4}{\pi}-1.\end{aligned}$$

举一反三

1. 已知 $f(0)=1,f(1)=2,f'(1)=3$,则 $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

答案: C.

解析: $\int_0^1 xf''(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}f'(x)=[xf'(x)]\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x$

$=f'(1)-f(1)+f(0)=3-2+1=2.$

2. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$.

解析：$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\mathrm{d}(\tan x) = (x\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}-(\ln\sec x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}$.

3. 求定积分 $\int_1^{e^2}\frac{2}{\sqrt{x}}\ln^2 x\mathrm{d}x$.

答案：$16e-32$.

解析：$\int_1^{e^2}\frac{2}{\sqrt{x}}\ln^2 x\mathrm{d}x = 4\int_1^{e^2}\ln^2 x\mathrm{d}\sqrt{x} = 4(\sqrt{x}\ln^2 x)\Big|_1^{e^2} - 8\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$=16e-16\int_1^{e^2}\ln x\mathrm{d}\sqrt{x} = 16e-16(\sqrt{x}\ln x)\Big|_1^{e^2} + 16\int_1^{e^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

$=16e-32e+32\sqrt{x}\Big|_1^{e^2} = 16e-32e+32e-32 = 16e-32$.

4. 求定积分 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\mathrm{d}x$.

答案：$2-\frac{2}{e}$.

解析：$\int_{\frac{1}{e}}^{1}(-\ln x)\mathrm{d}x+\int_1^e\ln x\mathrm{d}x = (-x\ln x+x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\Big|_1^e = 1-\frac{2}{e}+1 = 2-\frac{2}{e}$.

题型三　积分法综合应用

例 1　计算定积分 $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=(\quad)$.

A. 2　　B. 3　　C. 8　　D. 10

解析：设 $\sqrt{x}=t, x=t^2$，则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，当 $x:0\to1$ 时，$t:0\to1$. 于是

$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 te^t\mathrm{d}t = 2(te^t)\big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t\mathrm{d}t = 2e-2e^t\big|_0^1 = 2$.

例 2　计算定积分 $\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x$.

解析：设 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，当 $x:1\to e$ 时，$t:0\to1$，于是 $\int_1^e\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t$，由 $\int e^t\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)$，有

$$\int_0^1 e^t\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e\sin 1-e\cos 1+1).$$

本题利用对数代换，将被积函数化成三角函数与指数函数乘积的形式.

举一反三

1. 求定积分 $\int_1^{e}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

答案：$2(\sqrt{2}-1)$.

解析：设 $\ln x=t, x=e^t, dx=e^t dt$，当 $x:1\to e$ 时，$t:0\to 1$，于是

$$\int_1^{e}\frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx=\int_0^1\frac{e^t dt}{e^t\sqrt{1+t}}=2\int_0^1\frac{d(t+1)}{2\sqrt{1+t}}=2\sqrt{1+t}\ \Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1).$$

2. 求定积分 $\int_{-1}^{1}|x|\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

答案：0.

解析：对于函数 $g(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，显然

$$g(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{-1}{-x-\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-g(x),$$

所以 $|x|\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数，在关于原点对称的区间上积分值等于 0.

三、典型真题

1. 求定积分 $\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}dx$.

解析：设 $\sqrt{2x-1}=t$，则 $x=\frac{t^2+1}{2}$，$dx=tdt$，当 $x:1\to 5$ 时，$t:1\to 3$，于是

$$\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}dx=\int_1^3 e^t\cdot tdt=\int_1^3 tde^t=(te^t)\ \Big|_1^3-\int_1^3 e^t dt=3e^3-e-(e^t)\ \Big|_1^3=3e^3-e-(e^3-e)=2e^3.$$

2. 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos x dx$.

解析：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x-1)\cos xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x-\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd(\sin x)-(\sin x)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(x\sin x)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx-1=\frac{\pi}{2}+(\cos x)\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-1$$
$$=\frac{\pi}{2}-1+(0-1)=\frac{\pi}{2}-2.$$

3. 求定积分 $\int_1^4\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

解析：设 $\sqrt{x}=t$，则 $x=t^2$，$dx=2tdt$，当 $x:1\to 4$ 时，$t:1\to 2$，于是

$$\int_1^4\frac{1+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{1+2\ln t}{t}\cdot 2tdt=2\int_1^2(1+2\ln t)dt=2+4\int_1^2\ln tdt$$
$$=2+4\left[(t\ln t)\ \Big|_1^2-\int_1^2 t\cdot\frac{1}{t}dt\right]$$

$$=2+8\ln 2-4=8\ln 2-2.$$

4. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$.求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

解析：由 $f(x)=\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}dt$ 知 $f(1)=0$，两边同时对 x 求导，有 $f'(x)=\frac{2\sin x^2}{x}$，则

$$\int_0^1 f(x)d\frac{x^2}{2}=\left[\frac{x^2}{2}f(x)\right]\Bigg|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)dx=-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2\sin x^2}{x}dx$$

$$=-\int_0^1 x\sin x^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin x^2dx^2$$

$$=\frac{1}{2}(\cos x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}(\cos 1-1).$$

四、 同步练习

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xe^{\sin x}dx=$________.

答案：e−1.

解析：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xe^{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}d(\sin x)=(e^{\sin x})\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=e-1.$

2. $\int_{-1}^1\frac{x^2+x^5\sin x^2}{1+x^2}dx=$________.

答案：$2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

解析：$\int_{-1}^1\frac{x^2+x^5\sin x^2}{1+x^2}dx=\int_{-1}^1\frac{x^2dx}{1+x^2}=2\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^2}=2(x-\arctan x)\Big|_0^1=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^8\sin x^3}{\sqrt{1+x^6}}dx=$________.

答案：0.

解析：奇函数在关于原点对称的区间上的积分值等于0.

4. 已知 $\int_0^x f(t^2)dt=x^3$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$(　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

答案：C.

解析：$\int_0^x f(t^2)dt=x^3$，等式两边同时对 x 求导，有 $f(x^2)=3x^2$，即 $f(x)=3x$，$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 3xdx=\frac{3}{2}$，故选 C.

5. $y=\int_0^x(t-1)^2(t+2)dt$，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$(　　).

A. -2　　B. 2　　C. -1　　D. 1

答案：B.

解析：$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=(x-1)^2(x+2)\big|_{x=0}=2$，故选 B.

6. 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$，$\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=-3$，试计算下列积分.

(1) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$；(2) $\int_0^2 6f(u)\mathrm{d}u$；(3) $\int_0^2[2g(x)-3f(x)]\mathrm{d}x$；(4) $\int_0^{-2} f(-x)\mathrm{d}x$；

答案：(1) -2；(2) 12；(3) -12；(4) -2.

解析：(1) $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2-4=-2$；

(2) $\int_0^2 6f(u)\mathrm{d}u=6\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=6\times2=12$；

(3) $\int_0^2[2g(x)-3f(x)]\mathrm{d}x=2\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x-3\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2\times(-3)-3\times2=-12$；

(4) $\int_0^{-2} f(-x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 } t=-x}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}(-t)=-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=-2$.

7. 若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

答案：$\frac{\pi}{4-\pi}$.

解析：设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=a$，对原方程两边从 0 到 1 积分，有 $a=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+a\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$，所以 $a=\frac{\pi}{4}+a\frac{\pi}{4}$，$a=\frac{\pi}{4-\pi}$.

8. 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arctan x\mathrm{d}x$.

答案：$-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}$.

解析：
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arctan x\mathrm{d}x&=-\int_0^{\frac{1}{2}}\arctan x\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}\\&=-\left(\sqrt{1-x^2}\arctan x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{2}+\int_0^1\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},\end{aligned}$$

对于 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，设 $x=\sin t$，$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，当 $x:0\to1$ 时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$，

$$\begin{aligned}\int_0^1\sqrt{1-x^2}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2t\mathrm{d}t}{1+\sin^2t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2t-1+1}{1+\sin^2t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{1+\sin^2t}-1\right)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{1+\sin^2t}\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\sin^2t+\cos^2t+\sin^2t}\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\cos^2 t(2\tan^2 t+1)}\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}(\sqrt{2}\tan t)}{2\tan^2 t+1}\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}$$

$$=\left[\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan t)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2},$$

所以原式 $=-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{1}{2}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}$.

考点七　计算平面图形的面积

一、考试要求

掌握直角坐标系下用定积分计算平面图形面积的方法.

二、典型例题

求平面图形面积的步骤如下：

第 1 步　画出平面图形，求出必要的交点坐标；

第 2 步　选择积分变量，并确定积分区间；

第 3 步　写出面积的定积分表达式，并计算定积分.

题型一　计算由 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b(a<b)$，x 轴围成平面图形的面积

计算公式：由曲线 $y=f(x)$，$x=a$，$x=b(a<b)$，x 轴围成平面图形的面积公式为 $S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.

特别的，(1) 若 $f(x)\geqslant 0$（如图 3-3），则面积公式可化为 $S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若 $f(x)\leqslant 0$（如图 3-4），则面积公式可化为 $S=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

(3) 若 $f(x)$ 符号不定（如图 3-5），则面积公式可化为

$$S=\int_a^{c_1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{c_1}^{c_2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b}f(x)\mathrm{d}x.$$

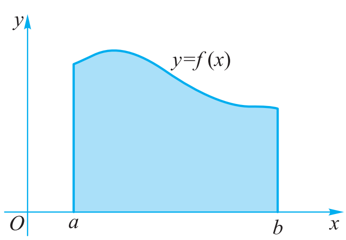

图 3-3

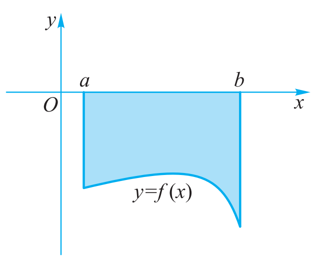

图 3-4

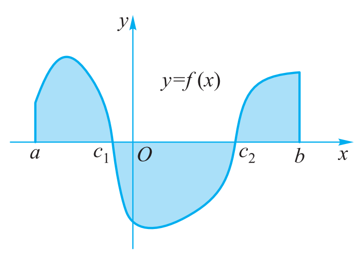

图 3-5

例 1　求 $y=\sin x, x\in[0,2\pi]$ 与 x 轴围成平面图形的面积.

解析：画出函数 $y=\sin x$ 在 $x\in[0,2\pi]$ 的图像，如图 3-6；$y=\sin x$ 与 x 轴的交点坐标分别为 $(0,0)$，$(\pi,0)$，$(2\pi,0)$.

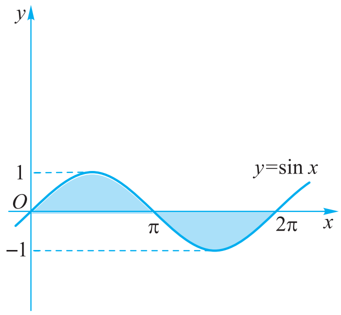

图 3-6

方法 1　当 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 时，$\sin x\geqslant 0$；当 $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时，$\sin x\leqslant 0$.

则

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=2+2=4.$$

或

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4.$$

方法 2　由图形的对称性可得

$$S=2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=-2\cos x\Big|_0^{\pi}=4.$$

【注】　通过方法 1 与方法 2 的对比，不难发现，利用图形的对称性可简化运算.

例 2　曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=0$，$x=4$ 所围成的平面图形的面积为________.

解析：在同一坐标系内画出 $y=\sqrt{x}$ 和 $x=4$ 的图像，如图 3-7，$y=\sqrt{x}$ 与 $y=0$ 的交点为 $(0,0)$，$y=\sqrt{x}$ 与 $x=4$ 的交点为 $(4,2)$，$y=0$ 与 $x=4$ 的交点为 $(4,0)$.

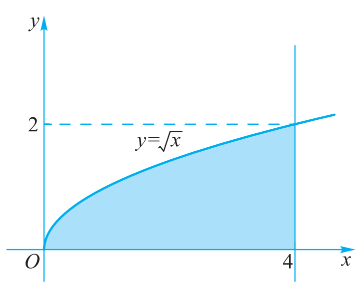

图 3-7

方法 1　选择积分变量为 x，则 $S=\displaystyle\int_0^4\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=\frac{16}{3}$.

方法 2　选择积分变量为 y，则 $S=\displaystyle\int_0^2(4-y^2)\mathrm{d}y=\left(4y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^2=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$.

举一反三

1. 求由 $y=-x^2-1$，$x=1$，x 轴和 y 轴围成平面图形的面积.

答案：$\dfrac{4}{3}$.

解析：因为 $y=-x^2-1<0$，所以 $S=-\int_0^1(-x^2-1)\mathrm{d}x=\int_0^1(x^2+1)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\dfrac{4}{3}$.

2. 求由 $y=\ln x$ 与直线 $y=0$，$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$x=\mathrm{e}$ 所围平面图形的面积.

答案：$2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

解析：$S=\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}}|\ln x|\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}\ln x\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x$

$$=(-x\ln x)\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}+\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}x\mathrm{d}(\ln x)+(x\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x\mathrm{d}(\ln x)$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{e}}+\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1}1\mathrm{d}x+\mathrm{e}-\int_1^{\mathrm{e}}1\mathrm{d}x=2-\frac{2}{\mathrm{e}}.$$

题型二　计算由 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$，$x=b(a<b)$ 围成平面图形的面积

计算公式：由 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$x=a$，$x=b(a<b)$ 围成平面图形的面积公式为

$$S=\int_a^b|g(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$$

特别地：(1) 若 $g(x)\geqslant f(x)$（如图 3-8），则面积公式可化为

$$S=\int_a^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x;$$

(2) 若 $f(x)$，$g(x)$ 大小不定（如图 3-9），则面积公式可化为

$$S=\int_a^c[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x+\int_c^b[g(x)-f(x)]\mathrm{d}x.$$

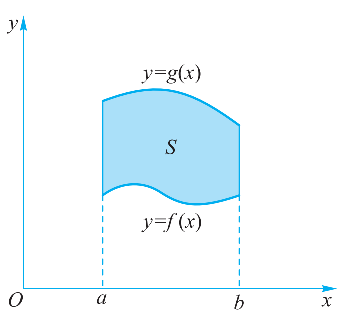

图 3-8

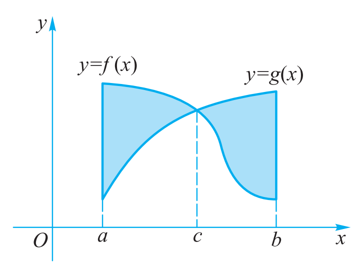

图 3-9

例 1　求由曲线 $y=\mathrm{e}^x$，$y=\mathrm{e}^{-x}$，$x=1$ 围成区域的面积.

解析：围成的平面图形如图 3-10 中阴影部分所示，选择积分变量为 x，且 $0\leqslant x\leqslant 1$，故其面积为

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}-2.$$

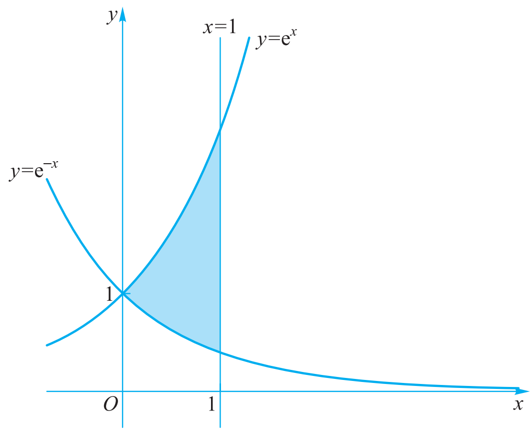

图 3-10

例 2　求由抛物线 $y=x^2$ 及其在点 $(1,1)$ 处的法线围成的平面图形的面积.

解析：由 $y'=2x$，得切线斜率为 $y'(1)=2$，法线斜率为 $-\frac{1}{2}$，法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)，即\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

在同一坐标系内画出抛物线与法线的图像，则其所围图形如图 3-11 中阴影部分所示，联立 $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=x^2 \end{cases}$，可得交点为 $(1,1)$，$\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right)$，选择积分变量为 x，则 $-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 1$，故所求面积为

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{1}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}-x^2\right)dx=\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-\frac{3}{2}}^{1}=\frac{125}{48}.$$

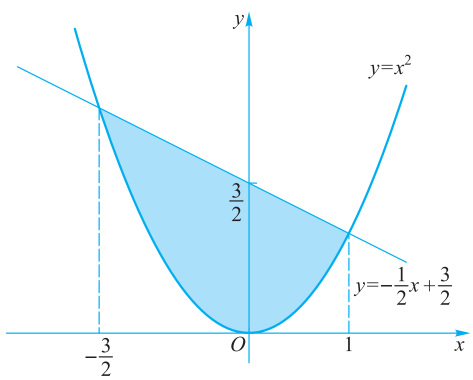

图 3-11

例 3　求曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{1+x^2}$ 和直线 $x=-\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$ 围成平面图形的面积.

解析：在同一坐标系内画出曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$，$y=\frac{1}{1+x^2}$，直线 $x=-\sqrt{3}$，$x=\sqrt{3}$，则所围平面

图形如图 3-12 中阴影部分所示,联立$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x^2, \\ y=\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$得交点坐标为$\left(-1,\dfrac{1}{2}\right),\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

由于图形关于 y 轴对称,故所求面积为第一象限内图形面积的 2 倍.选择积分变量为 x,第一象限内 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$,积分区域从 $x=1$ 处分为两个区域,于是

$$\begin{aligned} S &= 2\left[\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx+\int_1^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx\right] \\ &= 2\left[\left(\arctan x-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^3}{6}-\arctan x\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}\right] \\ &= \frac{1}{3}(\pi+3\sqrt{3}-2). \end{aligned}$$

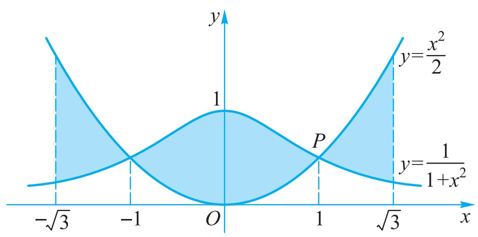

图 3-12

举一反三

1. 求由 $y=x^2+1,y=5$ 围成的平面图形的面积.

答案:$\dfrac{32}{3}$.

解析:$S=2\int_0^2[5-(x^2+1)]dx=2\left(4x-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\dfrac{32}{3}$.

2. 计算由曲线 $y=2^x$ 和直线 $x+2y=2,x=2$ 所围成的平面图形的面积.

答案:$\dfrac{3}{\ln 2}-1$.

解析:画图求出交点坐标:(0,1),(2,0),(2,4).选择 x 为积分变量,则

$$S=\int_0^2\left[2^x-\left(1-\frac{x}{2}\right)\right]dx=\left(\frac{2^x}{\ln 2}-x+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{3}{\ln 2}-1.$$

题型三　计算由 $x=\varphi(y),y=c,y=d(c<d),y$ 轴围成平面图形的面积

计算公式:由曲线 $x=\varphi(y),y=c,y=d(c<d),y$ 轴围成平面图形的面积公式为

$$S=\int_c^d|\varphi(y)|dy.$$

在具体计算时,也是先去掉绝对值,例如当 $\varphi(y)\geqslant 0$ 时(如图 3-13),面积公式可化为 $S=\int_c^d\varphi(y)dy$.当 $\varphi(y)\leqslant 0$ 时,面积公式可化为:$S=-\int_c^d\varphi(y)dy$.

例　求由 $y=\ln x, y=1, x$ 轴, y 轴围成的平面图形的面积.

解析:在同一坐标系内画出 $y=\ln x, y=1$,则所围成图形如图 3-14 中阴影部分所示,选择积分变量为 y,且 $0\leqslant y\leqslant 1$,并将 $y=\ln x$ 化为 $x=\mathrm{e}^y$,故根据面积公式可得面积为 $S=\int_0^1 \mathrm{e}^y \mathrm{d}y=\mathrm{e}^y\big|_0^1=\mathrm{e}-1$.

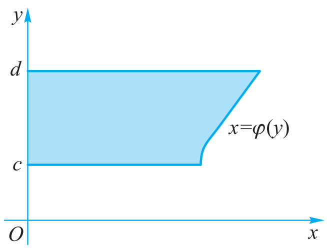

图 3-13

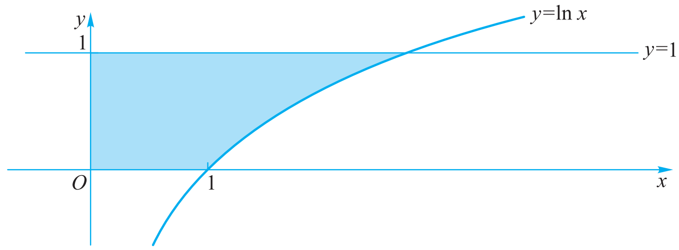

图 3-14

【注】　若选择积分变量为 x,则积分区域以 $x=1$ 处折分成两个区域,即

$$S=\int_0^1 1\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}}(1-\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1,$$

计算量相对较大,所以在计算围成图形面积时,选择积分变量很重要.

举一反三

1. 求 $y=x^2$ 与直线 $y=1, y=4$ 所围成的平面图形的面积.

答案:$\frac{28}{3}$.

解析:选择积分变量为 y,由 $y=x^2\Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$,又因为图形关于 y 轴对称,所求面积是第一象限($x=\sqrt{y}$)面积的 2 倍,即

$$S=2\int_1^4\sqrt{y}\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\bigg|_1^4=\frac{28}{3}.$$

2. 求由曲线 $y=\mathrm{e}^x, y=\mathrm{e}, x=0$ 围成区域的面积.

答案:1.

解析:方法 1　选择积分变量为 y,由 $y=\mathrm{e}^x\Rightarrow x=\ln y$,且 $1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}$,故

$$S=\int_1^{\mathrm{e}}\ln y\mathrm{d}y=(y\ln y-y)\big|_1^{\mathrm{e}}=1.$$

方法 2　选择积分变量为 x,交点为 $(0,1),(1,\mathrm{e})$,知 $0\leqslant x\leqslant 1$,故

$$S=\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=(\mathrm{e}x-\mathrm{e}^x)\big|_0^1=1.$$

题型四　计算由 $x=\varphi(y), x=\psi(y), y=c, y=d\,(c<d)$ 围成平面图形的面积

计算公式:由 $x=\varphi(y), x=\psi(y), y=c, y=d\,(c<d)$ 围成平面图形的面积公式为

$$S=\int_c^d|\psi(y)-\varphi(y)|\mathrm{d}y.$$

特别地:(1) $\psi(y)\geqslant\varphi(y)$ 时(如图 3-15),面积公式可化为

$$S=\int_c^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

（2）若 $\psi(y)$，$\varphi(y)$ 大小不定（如图 3−16），则面积公式可化为

$$S=\int_c^a[\varphi(y)-\psi(y)]\mathrm{d}y+\int_a^d[\psi(y)-\varphi(y)]\mathrm{d}y.$$

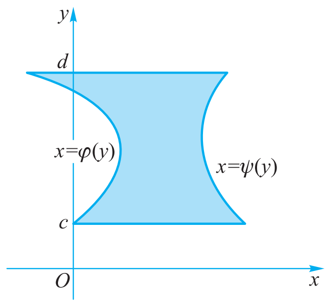

图 3−15

例 1　求由曲线 $y=x^2$，$y=4x^2$，直线 $y=1$ 围成平面图形的面积.

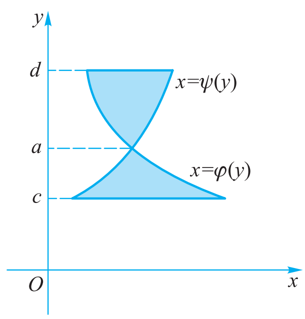

图 3−16

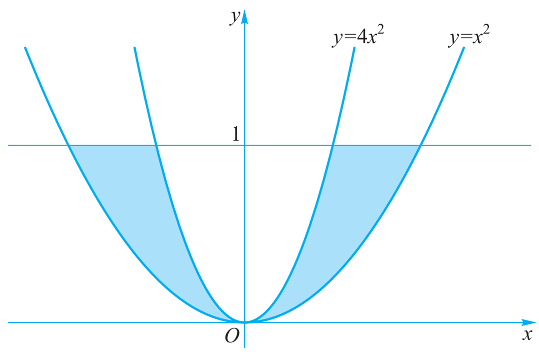

图 3−17

解析：在同一坐标系内画出 $y=4x^2$，$y=x^2$ 和 $y=1$，则围成的平面图形如图 3−17 中阴影部分所示，由于平面图形关于 y 轴对称，故所求面积为 y 轴右侧阴影区域面积的 2 倍.

选择积分变量为 y，在第一象限内，由

$y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}$；$y=4x^2\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}\sqrt{y}$. 且 $0\leqslant y\leqslant 1$，故

$$S=2\int_0^1\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\sqrt{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}.$$

例 2　求由抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 围成平面图形的面积.

解析：在同一坐标系内画出 $y^2=2x$，$y=x-4$，则所围成的平面图形如图 3−18 中阴影部分所示. 联立 $\begin{cases}y^2=2x,\\ y=x-4\end{cases}$ 可得交点为 $A(8,4)$，

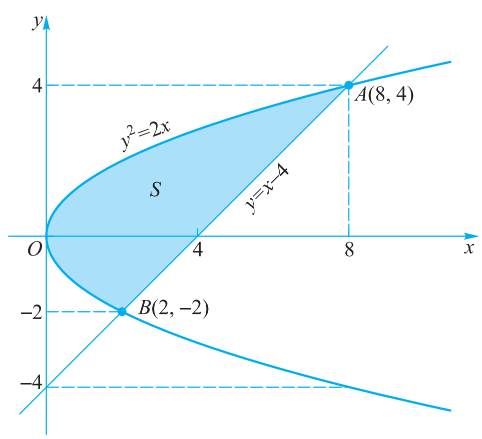

图 3−18

$B(2,-2)$.选择积分变量为 y,将 x 视为 y 的函数:$x=\frac{y^2}{2}$ 与 $x=y+4$,则

$$S=\int_{-2}^{4}\left[(y+4)-\frac{1}{2}y^2\right]\mathrm{d}y=\left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{4}=18.$$

【注】 本例中如果选择 x 作为积分变量,则需过点 $B(2,-2)$ 作 x 轴垂线,将图形分割成两个部分来求面积,此时所求面积为

$$S=\int_0^2[\sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})]\mathrm{d}x+\int_2^8[\sqrt{2x}-(x-4)]\mathrm{d}x,$$

计算起来较麻烦.可见,在求平面图形的面积时,选择恰当的积分变量可以起到简化运算的作用.

举一反三

1. 求 $y^2=x$ 与 $x-y-2=0$ 围成平面图形的面积.

答案:$\frac{9}{2}$.

解析:联立 $\begin{cases}y^2=x,\\x-y-2=0\end{cases}$ 可得交点为 $(1,-1),(4,2)$,选择 y 作为积分变量,$-1\leqslant y\leqslant 2$,将 x 视为 y 的函数:右边界函数为 $x=y+2$,左边界函数为 $x=y^2$.所求的面积为

$$S=\int_{-1}^{2}(y+2-y^2)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

2. 求由曲线 $y=x^2,y=9x^2,y=9$ 围成平面图形的面积.

答案:24.

解析:由于平面图形关于 y 轴对称,故所求面积为第一象限面积的 2 倍.选 y 作为积分变量,在第一象限内,将 x 视为 y 的函数:$x=\sqrt{y}$,$x=\frac{1}{3}\sqrt{y}$.所求面积为

$$S=2\int_0^9\left(\sqrt{y}-\frac{1}{3}\sqrt{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{8}{9}y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^9=24.$$

三、 典型真题

1. 求 $y=x^2$ 在点 $(2,4)$ 处的切线与 $y=-x^2+4x+1$ 所围图形的面积.

解析:因 $y'=2x$,故切线斜率为 $k=2x\big|_{x=2}=4$,切线方程为 $y-4=4(x-2)$,即 $y=4x-4$,如图 3-19.

由 $\begin{cases}y=4x-4,\\y=-x^2+4x+1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=-\sqrt{5},\\y=-4\sqrt{5}-4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\sqrt{5},\\y=4\sqrt{5}-4,\end{cases}$ 故所求面积为

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}[(-x^2+4x+1)-(4x-4)]\mathrm{d}x=2\int_0^{\sqrt{5}}(-x^2+5)\mathrm{d}x\\&=2\left(-\frac{1}{3}x^3+5x\right)\Bigg|_0^{\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

2. 求由曲线 $y=\sin x$ 和直线 $y=2x$ 及 $x=\pi$ 所围成图形的面积.

解析：在同一坐标系内画出 $y=\sin x$，$y=2x$ 与 $x=\pi$ 的图像，则所围图形如图 3-20 阴影部分.

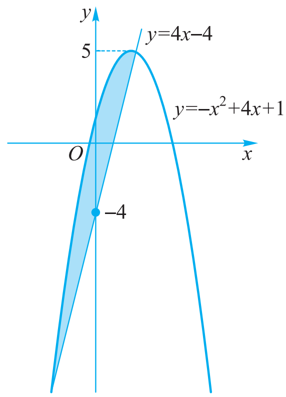

图 3-19

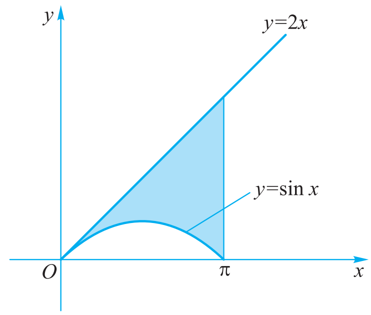

图 3-20

由 $\begin{cases} y=\sin x, \\ y=2x \end{cases}$ 得交点 $(0,0)$，且 $\sin x<x<2x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$. 故面积为

$$S=\int_0^{\pi}(2x-\sin x)\,\mathrm{d}x=(x^2+\cos x)\Big|_0^{\pi}=\pi^2-2.$$

3. 在抛物线 $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$ 上找一点 P，使过点 P 的水平直线与抛物线以及直线 $x=0$，$x=1$ 所围成的图形面积最小.

解析：如图 3-21 设 P 点坐标为 (t,t^2)，则所围的两部分图形面积之和为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^t (t^2-x^2)\,\mathrm{d}x+\int_t^1 (x^2-t^2)\,\mathrm{d}x \\ &=\left(t^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^t+\left(\frac{x^3}{3}-t^2x\right)\Bigg|_t^1=\frac{4}{3}t^3-t^2+\frac{1}{3}(0\leqslant t\leqslant 1). \end{aligned}$$

$S'(t)=\left(\dfrac{4}{3}t^3-t^2+\dfrac{1}{3}\right)'=4t^2-2t$，令 $S'(t)=0$，得驻点 $t=\dfrac{1}{2}$ 或 $t=0$.

又因为 $S(0)=\dfrac{1}{3}$，$S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$，$S(1)=\dfrac{2}{3}$，比较这三点处的面积大小可知，当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，所围面积最小，故 $P\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right)$ 即为所求的点.

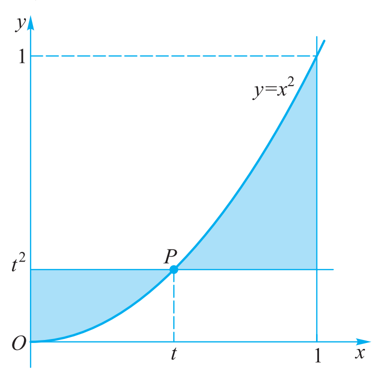

图 3-21

四、同步练习

1. 设由曲线 $y=x^2$ 与 x 轴,直线 $x=a(a>0)$ 围成图形的面积为 9,求 a 的值.

答案:$a=3$.

解析:由 $9=\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a=\frac{a^3}{3}$,可得 $a=3$.

2. 求由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=x,y=2x$ 围成平面图形的面积.

答案:$\frac{7}{6}$.

解析:由 $y=x^2$ 与 $y=x$ 交于(1,1)点可知,需从 $x=1$ 处拆分成两个区域,所求面积是两个区域面积的和,即

$$S=\int_0^1(2x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2(2x-x^2)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1+\left.\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right|_1^2=\frac{7}{6}.$$

3. 求由 $y=\frac{1}{2}x$ 与 $x=3-y^2$ 围成平面图形的面积.

答案:$\frac{32}{3}$.

解析:联立$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x,\\x=3-y^2\end{cases}$求出交点坐标为:(2,1),(−6,−3),选择 y 为积分变量,故所求面积为

$$S=\int_{-3}^1(3-y^2-2y)\mathrm{d}y=\left.\left(3y-\frac{y^3}{3}-y^2\right)\right|_{-3}^1=\frac{32}{3}.$$

考点八　计算旋转体的体积

一、考试要求

会求平面图形绕坐标轴旋转所生成的旋转体的体积.

二、典型例题

题型　用积分计算旋转体的体积

1. 计算公式

(1) 由 $y=f(x),x=a,x=b(a<b)$,x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体

(如图 3-22)的体积公式为 $V_x=\pi\int_a^b y^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$(记为公式①).

(2) 由 $x=\varphi(y)$, $y=c$, $y=d(c<d)$, y 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转体(如图 3-23)的体积公式为 $V_y=\pi\int_c^d x^2\mathrm{d}y=\pi\int_c^d \varphi^2(y)\mathrm{d}y$(记为公式②).

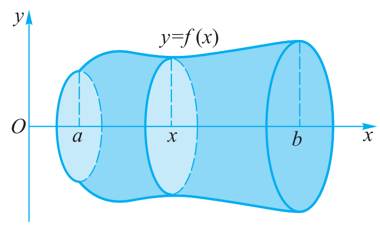

图 3-22

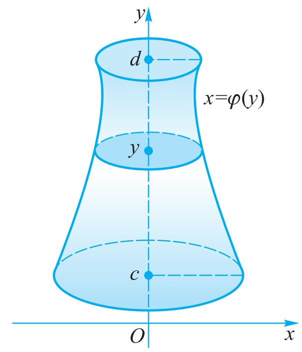

图 3-23

(3) 由 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b(a<b, f(x)\leqslant g(x))$围成的图形(如图 3-24)绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积公式为 $V_x=\pi\int_a^b[g^2(x)-f^2(x)]\mathrm{d}x$(记为公式③).

(4) 由 $x=\varphi(y)$, $x=\psi(y)$, $y=c$, $y=d(c<d, \psi(y)\leqslant\varphi(y))$围成的图形(如图 3-25)绕 y 轴旋转一周形成的旋转体的体积为 $V_y=\pi\int_c^d[\varphi^2(y)-\psi^2(y)]\mathrm{d}y$(记为公式④).

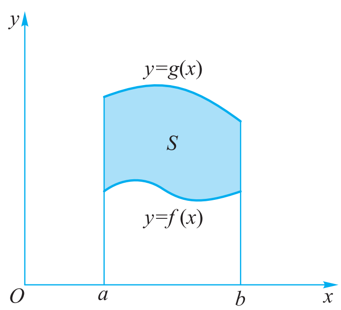

图 3-24

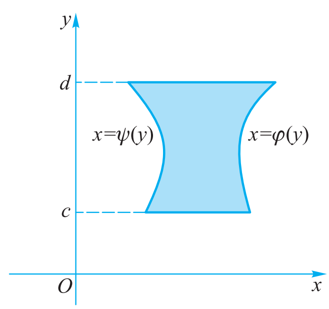

图 3-25

2. 计算旋转体体积的步骤

第 1 步 画出平面图形,求出必要的交点坐标;

第 2 步 选择积分变量,并确定积分区间;

第 3 步 写出体积的定积分表达式,计算定积分.

例 1 求由 $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=0$ 围成的图形绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积.

解析: $y=\cos x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$与 $y=0$ 所围成的平面图形如图 3-26,根据公式①,结合对称性可得

$$V=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{2}\mathrm{d}x=2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\pi\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^{2}}{2}.$$

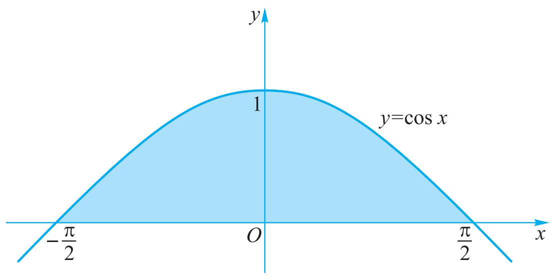

图 3-26

例 2　求由曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=1$ 及 x 轴,y 轴围成图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转体的体积.

解析:所围平面图形如图 3-27 中阴影部分所示,选择积分变量为 y,且 $0\leqslant y\leqslant 1$,由 $y=\ln x$ 可得 $x=\mathrm{e}^{y}$.根据公式②可得所求的体积为

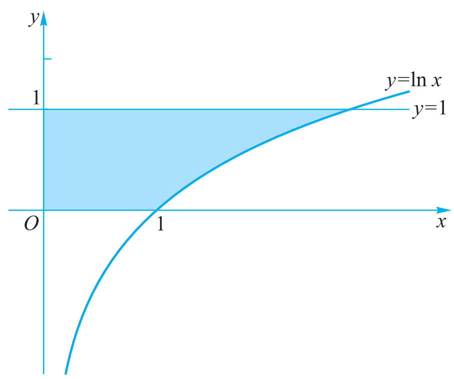

图 3-27

$$V=\pi\int_{0}^{1}(\mathrm{e}^{y})^{2}\mathrm{d}y=\pi\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{2y}\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{2}-1).$$

【注】　在利用公式②计算体积时,要把曲线方程化为以 y 为自变量,以 x 为因变量(即 $x=\varphi(y)$)的显函数的形式.

例 3　求由 $y=x^{2}$,$y=0$,$x=2$ 围成图形分别绕 x 轴、y 轴旋转形成的旋转体的体积.

解析:平面图形如图 3-28 阴影部分所示,其中 $0\leqslant x\leqslant 2$.根据公式①可得,绕 x 轴旋转所得旋转体的体积为

$$V_{x}=\pi\int_{0}^{2}(x^{2})^{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}x^{5}\Bigg|_{0}^{2}=\frac{32\pi}{5}.$$

平面图形绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积有两种解法.

方法 1　选择积分变量为 y,且 $0\leqslant y\leqslant 4$,由 $y=x^{2}$ 可得 $x=\sqrt{y}$,根据公式④可得,平面图形绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积为

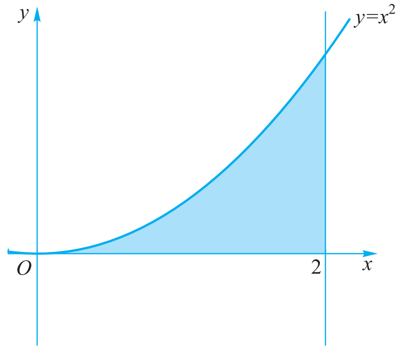

图 3-28

$$V_y=\pi\int_0^4[2^2-(\sqrt{y})^2]\mathrm{d}y=\pi\left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^4=8\pi.$$

方法 2　选择积分变量为 x，且 $0\leqslant x\leqslant 2$. 利用公式：$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$，可得

$$V_y=2\pi\int_0^2 x\cdot x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi x^4\Big|_0^2=8\pi.$$

【注】　本题中方法 2 显然更简单. 一般地，由曲线 $y=f(x)\geqslant 0$，直线 $x=a,x=b$ $(a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形（本题中的曲边三角形可视为上底为 0 的曲边梯形），绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积为 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

例 4　设 D 是由直线 $x+y=4$ 与曲线 $xy=3$ 所围成的图形，求（1）D 的面积 S；（2）D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

解析：（1）所围成的平面图形如图 3-29 所示，选积分变量为 x，将 $x+y=4$ 和 $xy=3$ 分别化为显函数的形式为：$y=4-x$ 和 $y=\dfrac{3}{x}$，联立方程可求得直线与曲线的交点为 $(1,3)$，$(3,1)$，故

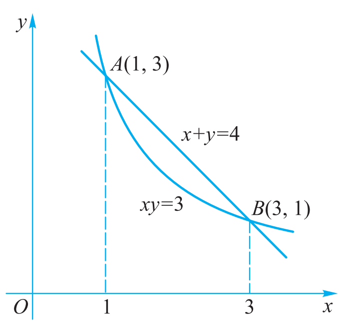

图 3-29

$$S=\int_1^3\left[(4-x)-\frac{3}{x}\right]\mathrm{d}x=\left(4x-\frac{x^2}{2}-3\ln x\right)\Big|_1^3=4-3\ln 3.$$

（2）所求旋转体的体积等于由 $x+y=4$，$x=1$，$x=3$ 和 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积，减去由 $xy=3$，$x=1$，$x=3$ 和 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积，故

$$V=\pi\int_1^3(4-x)^2\mathrm{d}x-\pi\int_1^3\left(\frac{3}{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]\Big|_1^3+\frac{9\pi}{x}\Big|_1^3=\frac{8}{3}\pi.$$

或直接利用公式③：$V=\pi\displaystyle\int_1^3\left[(4-x)^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{(x-4)^3}{3}+\frac{9}{x}\right]\Big|_1^3=\frac{8}{3}\pi.$

举一反三

1. 求由 $y=x^2,y=1,x=0$ 围成图形绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积.

答案：$\frac{\pi}{2}$.

解析：由 $y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}$，且 $0\leqslant y\leqslant 1$，根据公式②可得

$$V=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}.$$

2. 求由 $y=x^3,y=0,x=2$ 围成图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转形成的旋转体的体积.

答案：$\frac{128\pi}{7},\frac{64\pi}{5}$.

解析：根据公式①可得，绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V_x=\pi\int_0^2(x^3)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{7}x^7\Big|_0^2=\frac{128\pi}{7}.$$

方法 1　选择积分变量为 y，根据公式④可得，绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积为

$$V_y=\pi\int_0^8\left[2^2-(y^{\frac{1}{3}})^2\right]\mathrm{d}y=32\pi-\frac{3\pi}{5}y^{\frac{5}{3}}\Big|_0^8=\frac{64\pi}{5}.$$

方法 2　选择积分变量为 x，则

$$V_y=2\pi\int_0^2x\cdot f(x)\mathrm{d}x=2\pi\int_0^2x\cdot x^3\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{5}x^5\Big|_0^2=\frac{64\pi}{5}.$$

三、典型真题

1. 用定积分求由 $y=x^2+1,y=0,x=1,x=0$ 所围成的图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解析：根据公式①可得旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1(x^2+1)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)\mathrm{d}x\\&=\pi\left(\frac{1}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=\frac{28}{15}\pi.\end{aligned}$$

2. 求由直线 $x+y=2$，曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 y 轴所围成图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解析：联立 $\begin{cases}x+y=2,\\y=\sqrt{x}\end{cases}$ 可得交点为 $(1,1)$，利用公式③，得旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1\left[(2-x)^2-(\sqrt{x})^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^1(x^2-5x+4)\mathrm{d}x\\&=\pi\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x\right)\Big|_0^1=\frac{11}{6}\pi.\end{aligned}$$

四、 同步练习

1. 过曲线 $y=x^2(x>0)$ 上一点 $M(1,1)$ 作切线 l，平面图形 D 是由曲线 $y=x^2$，切线 l 及 x 轴围成，(1) 求平面图形 D 的面积；(2) D 绕 x 轴旋转一周形成的旋转体的体积.

答案：(1) $\frac{1}{12}$；(2) $\frac{\pi}{30}$.

解析：(1) 切线 l 的方程为 $y=2x-1$. 由图形看出，选择积分变量为 y 计算简单，故平面图形 D 的面积为

$$S=\int_0^1\left(\frac{y+1}{2}-\sqrt{y}\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^2}{4}+\frac{y}{2}-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{12}.$$

(2) 切线 $y=2x-1$ 与 x 轴的交点横坐标为 $\frac{1}{2}$，所求的体积是由抛物线 $y=x^2(x>0)$，直线 $x=1$ 及 x 轴围成图形绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积，减去由切线 $y=2x-1$ 直线 $x=1$ 及 x 轴围成图形绕 x 轴旋转形成的锥体体积. 故

$$V=\pi\int_0^1(x^2)^2\mathrm{d}x-\frac{1}{3}\pi\times 1^2\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{30}.$$

2. 求由直线 $x+y=2$ 与直线 $x=1$，x 轴围成图形绕 y 轴旋转一周形成的旋转体的体积.

答案：$\frac{4\pi}{3}$.

解析：方法 1　选择 y 作为积分变量，且 $0\leqslant y\leqslant 1$，函数为 $x=2-y$，$x=1$，利用公式④得，所求体积为

$$V=\pi\int_0^1[(2-y)^2-1^2]\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi.$$

方法 2　选择 x 作为积分变量，且 $1\leqslant x\leqslant 2$，$y=2-x$，代入 $V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ 中，则

$$V=2\pi\int_1^2 x(2-x)\mathrm{d}x=2\pi\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_1^2=\frac{4}{3}\pi.$$

3. 求由曲线 $y=\ln x$ 及过曲线上的点 $(\mathrm{e},1)$ 的切线和 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积.

答案：$\left(2-\frac{2\mathrm{e}}{3}\right)\pi$.

解析：曲线 $y=\ln x$ 在点 $(\mathrm{e},1)$ 的切线方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$，故

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}x\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_1^{\mathrm{e}}(\ln x)^2\mathrm{d}x\\&=\pi\left(\frac{x^3}{3\mathrm{e}^2}\right)\Bigg|_0^{\mathrm{e}}-\pi(x\ln^2x-2x\ln x+2x)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\left(2-\frac{2\mathrm{e}}{3}\right)\pi.\end{aligned}$$

4. 设 D 是由 $y=\ln x$，$x=\mathrm{e}$ 与 x 轴围成的图形. 求 D 的面积和 D 绕 y 轴旋转形成的旋转体的体积.

答案：$1,\dfrac{e^2+1}{2}\pi$.

解析：$S=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x=(x\ln x)\big|_1^e-\int_1^e x\cdot\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=1$.

选择 y 作为积分变量，且 $0\leqslant y\leqslant 1$，函数为 $x=e^y$，$x=e$，利用公式④得：

$$V=\pi\int_0^1[e^2-(e^y)^2]\mathrm{d}y=\frac{e^2+1}{2}\pi.$$

考点九　广义积分

一、考核要求

1. 了解无穷区间广义积分的概念.
2. 掌握无穷区间广义积分的计算方法.

二、典型例题

题型　求解广义积分问题

无穷区间广义积分的计算，类似定积分，多了一步求极限的过程. 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则有

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-\lim_{a\to-\infty}F(a),$$

或

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a),$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^b=F(b)-F(-\infty).$$

例 1　计算 $\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x$.

解析：$\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}(-e^{-x}\big|_0^b)=\lim_{b\to+\infty}(1-e^{-b})=1$.

例 2　计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解析：$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\lim_{a\to-\infty}(-\arctan a)+\lim_{b\to+\infty}(\arctan b)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

例 3 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解析: 当 $p=1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\ln x\big|_1^b)=+\infty$,

当 $p\neq 1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \frac{1}{p-1}, & p>1.\end{cases}$

综上所述, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$ 当 $p\leqslant 1$ 时发散,当 $p>1$ 时收敛,收敛到$\frac{1}{p-1}$.

例 4 计算 $\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$,

解析: $\int_{-\infty}^0 x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^0 -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2)=\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Big|_{-\infty}^0=-\frac{1}{2}(1-0)=-\frac{1}{2}$.

例 5 计算 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

解析: 令 $\sqrt{x-1}=t$,由 $x:2\to+\infty$,则 $t:1\to+\infty$,于是

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}=\int_1^{+\infty}\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2+1)\cdot t}=2\arctan t\big|_1^{+\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

举一反三

1. $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=(\quad)$.

A. $\frac{1}{\ln 2}$　　B. $\ln 2$　　C. 2　　D. $+\infty$

答案: A.

解析: $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2}$.

2. 设函数 $\int_1^{+\infty}x^{2p-2}\mathrm{d}x$ 收敛,则 p 应满足________.

答案: $p<\frac{1}{2}$.

解析: 当 $2p-2<-1$ 时收敛,解得 $p<\frac{1}{2}$.

3. 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$.

答案: π.

解析: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$.

三、典型真题

1. 下列广义积分中发散的是(　　).

A. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$　　B. $\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx$　　C. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3}\sqrt{x}}$　　D. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{2}x}$

答案:A.

解析:对于选项 A,$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_{e}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=[\ln(\ln x)]\Big|_{e}^{+\infty}=+\infty$,发散;对于选项 B,$\int_{-\infty}^{0}e^{x}dx=e^{x}\Big|_{-\infty}^{0}=1$,收敛;对于选项 C,$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{3}\sqrt{x}}=\frac{-2}{5}x^{-\frac{5}{2}}\Big|_{1}^{+\infty}=\frac{2}{5}$,收敛;对于选项 D,$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^{2}x}=\int_{2}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^{2}x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{2}^{+\infty}=0+\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}$,收敛,故选 A.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_{0}^{x}(1+t^{2})e^{t^{2}-x^{2}}dt}{x}$.

答案:$\frac{1}{2}$.

解析:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{0}^{x}(1+t^{2})e^{t^{2}-x^{2}}dt}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\int_{0}^{x}(1+t^{2})e^{t^{2}}dt\right]'}{(xe^{x^{2}})'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x^{2})e^{x^{2}}}{e^{x^{2}}+2x^{2}e^{x^{2}}}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^{2}}{1+2x^{2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

四、同步练习

1. 计算 $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^{2}}dx$.

答案:$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

解析:此无穷区间上的积分可转化成二重积分计算,
$\left(\int_{0}^{+\infty}e^{-x^{2}}dx\right)^{2}=\int_{0}^{+\infty}e^{-x^{2}}dx\int_{0}^{+\infty}e^{-y^{2}}dy=\iint\limits_{D}e^{-(x^{2}+y^{2})}dxdy$,其中 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$.
$\iint\limits_{D}e^{-(x^{2}+y^{2})}dxdy=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{+\infty}e^{-r^{2}}rdr=\frac{\pi}{4}$,于是 $\int_{0}^{+\infty}e^{-x^{2}}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. 计算 $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}dx$.

答案:1.

解析:$\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}dx=\int_{1}^{+\infty}\ln x\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=-\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\Big|_{1}^{+\infty}+\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}d(\ln x)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}-\frac{1}{x}\Bigg|_1^{+\infty}=0-(-1)=1.$$

3. 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $y=0$ 之间位于第一象限内的平面图形的面积 S 及此平面图形绕 x 轴旋转而得的旋转体的体积 V.

答案: $\frac{\pi}{2}$.

解析: 根据题意, $S=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$; $V=\pi\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-x})^2\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\pi\mathrm{e}^{-2x}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$.