

# 非稳态热传导的计算

许多工程实际问题需要确定物体内部的温度场随时间的变化，或确定其内部温度到达某一限定值所需的时间。例如钢制工件的热处理是一个典型的非稳态导热过程，掌握工件中温度变化的速率是控制工件热处理质量的重要因素。可见，非稳态导热是个有很大实际意义的课题。

本章首先简述非稳态导热的基本概念，然后由简单到复杂依次介绍零维问题、一维问题、半无限大物体以及多维问题的导热微分方程的分析解法，并总

结求解非稳态导热问题的一般策略以及应用实例。最后简要介绍非傅里叶导热问题。

与稳态导热问题类似，学习非稳态导热主要掌握基本概念、确定物体瞬时温度场的方法和在一时间段内物体所传导热量的计算方法。

## 3.1 非稳态导热的基本概念

### 3.1.1 非稳态导热过程的类型及特点

物体的温度随时间而变化的导热过程称为非稳态导热 (unsteady heat conduction)。根据物体温度随时间的推移而变化的特性,非稳态导热可以区分为两类:物体的温度随时间的推移逐渐趋近于恒定的值及物体的温度随时间而做周期性的变化。在周期性的非稳态导热过程中,物体中各点的温度及热流密度都随时间做周期性的变化。例如,由于太阳辐射的周期性变化而引起的房屋的墙壁、屋顶等的温度场随时间的变化(以 24 h 为周期),地球表面层的温度由于季节更替而引起的周期性变化(以 1 年为周期),等等。本书不讨论周期性非稳态导热问题,对此有兴趣的读者可参阅文献 [1]。

工程上几种典型的非稳态导热过程温度变化率的数量级示于图 3-1 中。在该图坐标的高端,即极高速非稳态导热区域(例如短脉冲、高强度激光处理)应当考虑非傅里叶导热的影响。

非稳态导热过程中在热量传递方向上不同位置处的导热量是不同的;不同位置间导热量的差别用于(或来自)该两个位置间的物体内能随时间的变化,这是区别于稳态导热的一个特点。因此,对非稳态导热一般不能用热阻的方法来作问题的定量分析。

为定性说明非稳态导热过程中物体内各处温度变化的基本趋势,先来考察一个简单的例子。图 3-2 中示出了一复合平壁,左侧为金属壁,右侧为保温层,层间接触良好,两种材料的导热系数、密度及比热容均为常数,初始温度为  $t_0$ 。然后,复合壁左侧表面温度突然升高到  $t_1$ ,并保持不变,而右侧仍与温度为  $t_0$  的空气接触。这可以作为热机(例如汽轮机)启动的一种简化分析模型。在这种条件下,金属壁及保温层中的温度经历了以下变化过程:

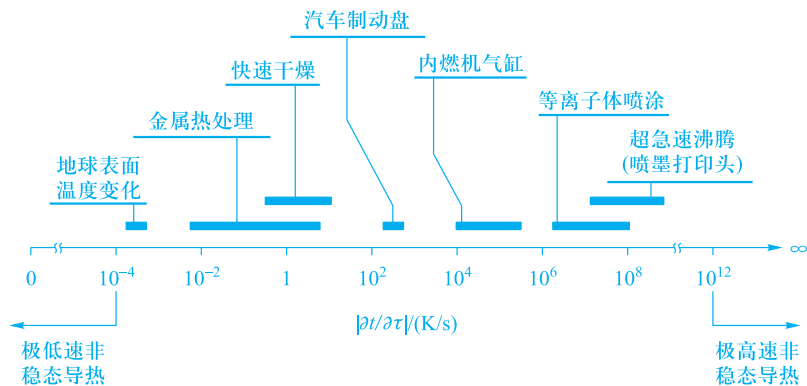


图 3-1 几种典型非稳态导热过程的温度变化率

首先金属壁中紧挨高温表面部分的温度很快上升，而其余部分则仍保持原来的温度  $t_0$ ，温度分布如图中曲线  $P-B-L$  所示。随着时间的推移，温度上升所波及的范围不断扩大，经历了一段时间后金属壁与保温层界面的温度也受到影响，如图中曲线  $P-D-I$  所示。随过程的进一步深入，保温层中温度也缓慢地上升，图中曲线  $P-E-J$ 、 $P-F-K$  及  $P-G-L$  示意性地表示了这种变化过程。最后到达稳态时，金属壁与保温层中的温度分布各自为直线  $PH$  与  $HM$ 。图中金属壁与保温层的接触面的条件就是第 2 章式 (2-19) 所示的界面连续条件，保温层的温度曲线  $HM$  的倾斜程度大于金属壁中的曲线  $PH$ ，这定性上反应了金属导热系数远大于保温层的这一事实。

进一步分析图 3-2 所示的温度变化曲线可以看出，物体中温度的分布可以区分为两种类型：以金属壁中的温度分布为例，在初始阶段，金属壁中的温度分布主要受初始温度分布的影响，如图中曲线  $P-B-I$ 、 $P-C-I$ 。也就是说，这一阶段中的温度分布主要受初始温度分布的控制，称为非正规状况阶段 (non-regular regime)。当过程进行到一定深度时，物体初始温度分布的影响逐渐消失，此后不同时刻的温度分布主要受热边界条件的影响，如图中曲线  $PD$ 、 $PE$ 、 $PF$ 、 $PG$  及  $PH$ 。这个阶段的非稳态导热称为正规状况阶段 (regular regime)。后面将会看到，正规状况阶段的温度分布计算要比非正规状况阶段简单得多。一般地说，物体的整个非稳态导热过程主要处于正规状况阶段，因此正规状况阶段的温度变化规律是本章的主要讨论内容。存在着有区别的两个不同的导热阶段是这一类非稳态导热区别于周期性非稳态导热的一个特点。

前已指出，在非稳态导热过程中，热量传递方向上的不同位置的导热量是不同的。对于上面讨论的复合壁的情形，不同时刻左、右表面的导热量随时间的变化定性地示于图 3-3 中。其中  $\Phi_1$  为从左侧面导入金属壁的热流量，而  $\Phi_2$  为从保温层导出的热流量。在整个非稳态导热过程中这两个热流量是不相等的，但随着过程的进行，其差别逐渐减小，直到进入稳态阶段两者达到平衡。图中有阴影线的部分代表了复合壁在升温过程中所积聚的能量。

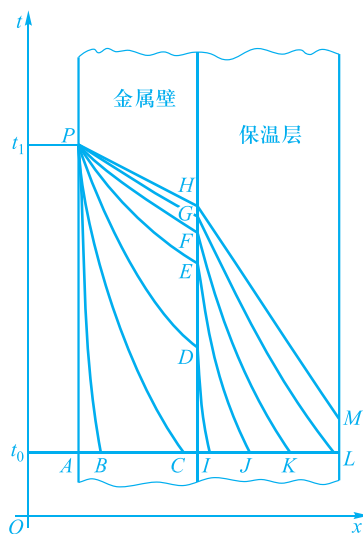


图 3-2 非稳态导热过程中复合壁温度的变化

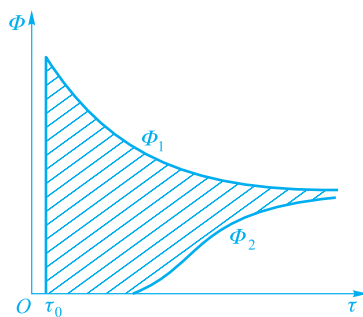


图 3-3 平板非稳态导热过程中两侧表面上导热量随时间的变化

### \*3.1.2 导热微分方程解的唯一性定律

第2章已经指出, 导热微分方程式连同初始条件及边界条件一起, 完整地描写了一个特定的非稳态导热问题。非稳态导热问题的求解, 实质上归结为在规定的初始条件及边界条件下求解导热微分方程式。这是本章的主要任务。

本章讨论中假定物体的热物理特性参数均为常数。三个坐标系中的导热微分方程, 即式(2-7)、(2-12)、(2-13)可以用矢量的形式统一表示成为

$$\rho c_p \frac{\partial t}{\partial \tau} = \text{div}(\lambda \text{grad } t) + \dot{\Phi} \quad (3-1a)$$

式中, 当 $\lambda$ 为常数时,  $\text{div}(\text{grad } t)$ 是温度的拉普拉斯(Laplace)算子 $\nabla^2 t$ 。在 $\rho c_p$ 及 $\lambda$ 均为常数的条件下, 引入热扩散率 $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ , 于是有

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c_p} \quad (3-1b)$$

初始条件的一般形式是

$$t(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \quad (3-2a)$$

一个实用上经常遇到的简单特例是初始温度均匀, 即

$$t(x, y, z, 0) = t_0 \quad (3-2b)$$

边界条件的表示方式已在第2章中讨论过。鉴于第三类边界条件比较常见, 本章将着重讨论物体处于恒温介质中的第三类边界条件的非稳态导热, 即:

$$-\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_w = h(t_w - t_f) \quad (3-3)$$

这里要再次强调,  $n$ 是换热表面的外法线,  $h$ 、 $t_f$ 是已知的, 而 $t_w$ 、 $\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_w$ 是未知的。式(3-3)无论对物体被加热或冷却均适用。

数学上可以证明<sup>[2]</sup>, 如果某一函数 $t(x, y, z, \tau)$ 满足方程(3-1a)或(3-1b)(其中 $\dot{\Phi}$ 可以是坐标 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 及时间 $\tau$ 的函数)以及一定的初始与边界条件, 则此函数就是这一特定导热问题的唯一解。换言之, 不可能同时存在两个都满足导热微分方程及同一定解条件的不同的解。这个结论称为解的唯一性定律。本章所介绍的各种分析解都是满足特定问题的唯一解。

### 3.1.3 第三类边界条件下 $Bi$ 数对平板中温度分布的影响

为了说明第三类边界条件下非稳态导热时物体中的温度变化特性与边界条件参数的关系, 下面来分析一下简单情形。设有一块厚为 $2\delta$ 的金属平板, 初始温度为 $t_0$ , 突然将它置

于温度为  $t_\infty$  的流体中进行冷却，表面传热系数为  $h$ ，平板的导热系数为  $\lambda$ 。根据平板导热热阻  $\delta/\lambda$  与表面对流传热热阻  $1/h$  的相对大小的不同，平板中温度场的变化会出现以下三种情形（图 3-4）。

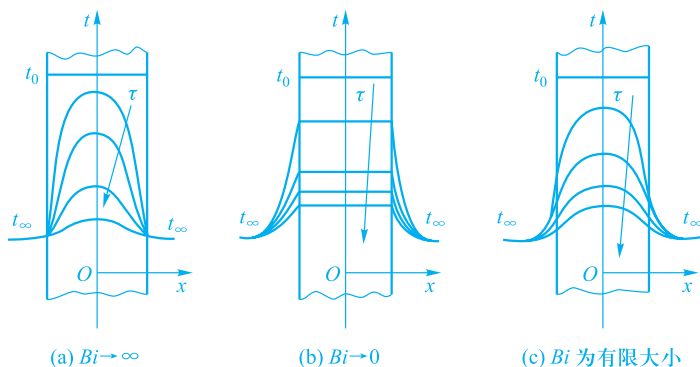


图 3-4  $Bi$  数对平板中温度分布的影响

(1)  $1/h \ll \delta/\lambda$

这时，由于表面对流换热热阻  $1/h$  几乎可以忽略，因而过程一开始平板的表面温度就被冷却到  $t_\infty$ 。随着时间的推移，平板内部各点的温度逐渐下降而趋近于  $t_\infty$ ，如图 3-4a 所示。

(2)  $1/h \gg \delta/\lambda$

这时，平板内部导热热阻  $\delta/\lambda$  几乎可以忽略，因而任一时刻平板中各点的温度接近均匀，并随着时间的推移整体地下降，逐渐趋近于  $t_\infty$ ，如图 3-4b 所示。

(3)  $1/h$  与  $\delta/\lambda$  的数值比较接近

这时，平板中不同时刻的温度分布介于上述两种极端情况之间，如图 3-4c 所示。

由此可见，上述两个热阻的相对大小对于物体中非稳态导热的温度场的变化具有重要影响。表征这两个热阻比值的无量纲量或无量纲数就是毕渥（Biot）数

$$Bi = \frac{\delta/\lambda}{1/h} = \frac{\delta h}{\lambda} \quad (3-4)$$

像毕渥数、雷诺数这一类表征某一类物理现象或物理过程特征的无量纲数称为特征数（characteristic number），习惯上又称准则数。出现在特征数定义式中的几何尺度称为特征长度（characteristic length），一般用符号  $l$  表示。在这里以平板的半厚作为特征长度，即取  $l = \delta$ 。在接触一个新的特征数时，读者除了应熟悉其定义外还应掌握它的基本物理意义。

J. W. Biot (1774—1862), 法国物理学家。他先于 Fourier 研究了固体的导热问题, 并已经认识到应当将表面的对流传热考虑到导热问题的分析中, 但未能获得分析解。后 Fourier 阅读了 Biot 的著作, 找出了解决问题的方法。Biot 还在光的偏振研究方面有所贡献, 并因此获得皇家学会奖。



下面首先讨论固体内部导热热阻相对于表面换热热阻很小 ( $Bi \rightarrow 0$ ) 时的情形, 然后介绍毕渥数为有限大小时一维及多维非稳态导热的分析解, 并着重于正规状况阶段的计算。

## 3.2 零维问题的分析法——集中参数法

当固体内部的导热热阻远小于其表面的换热热阻时, 任何时刻固体内部温度都趋于一致, 以致可以认为整个固体在同一瞬间均处于同一温度下。这时所求解的温度仅是时间  $\tau$  的一元函数而与空间坐标无关, 好像该固体原来连续分布的质量与热容量汇总到一点上, 而只有一个温度值那样。这种忽略物体内部导热热阻的简化分析方法称为集中参数法 (lumped parameter method)。显然, 如果物体的导热系数相当大, 或者几何尺寸很小, 或表面传热系数极低, 则其非稳态导热都可能属于这一类型的问题。例如, 测量变化着的温度的热电偶就是个典型的实例。

### 3.2.1 集中参数法温度场的分析解

设有一任意形状的固体, 其体积为  $V$ , 表面积为  $A$ , 并具有均匀的初始温度  $t_0$ 。在初始时刻, 突然将它置于温度恒为  $t_\infty$  的流体中, 设  $t_\infty > t_0$ , 固体与流体间的表面传热系数  $h$  及固体的物性参数均保持常数, 试求物体温度随时间的依变关系。此问题可应用集中参数法分析。

非稳态、有内热源的导热微分方程式 (2-8) 适用于本问题, 即

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \nabla^2 t + \frac{\dot{\Phi}}{\rho c_p}$$

由于物体的内部热阻可以忽略, 温度与空间坐标无关, 所以式中温度的二阶导数项为零。于是上式简化成为

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{\Phi}}{\rho c} \quad (\text{a})$$

其中  $\dot{\phi}$  应看成广义热源。与分析肋片的导热问题相类似，这里发生热交换的边界不是计算边界（零维问题，无几何边界），因而界面上交换的热量应折算成整个物体的体积热源

$$\dot{\phi}V = Ah(t_{\infty} - t) \quad (b)$$

将式 (b) 确定的  $\dot{\phi}$  代入式 (a)，有

$$\rho cV \frac{dt}{d\tau} = -hA(t - t_{\infty}) \quad (3-5a)$$

这就是适用于本题的导热微分方程式，读者也可以通过对物体作热平衡得出上述结果。

引入过剩温度  $\theta = t - t_{\infty}$ ，则上式变成

$$\rho cV \frac{d\theta}{d\tau} = -hA\theta \quad (3-5b)$$

以过剩温度表示的初始条件为

$$\theta(0) = t_0 - t_{\infty} = \theta_0 \quad (3-5c)$$

式 (3-5b)、(3-5c) 构成对所研究问题完整的数学描写。

下面对此进行分析求解。将式 (3-5b) 分离变量，得

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{hA}{\rho cV} d\tau \quad (c)$$

将式 (c) 对  $\tau$  从 0 到  $\tau$  积分，有

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} &= -\int_0^{\tau} \frac{hA}{\rho cV} d\tau \\ \ln \frac{\theta}{\theta_0} &= -\frac{hA}{\rho cV} \tau \\ \frac{\theta}{\theta_0} &= \frac{t - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = \exp\left(-\frac{hA}{\rho cV} \tau\right) \end{aligned} \quad (3-6)$$

注意到  $V/A$  具有长度的量纲，并定义

$$l_c = \frac{V}{A} \quad (3-7)$$

则式 (3-6) 右端的指数项可做如下变化：

$$\frac{hA}{\rho cV} \tau = \frac{hl_c}{\lambda} \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\tau}{l_c^2} = \frac{hl_c}{\lambda} \frac{a\tau}{l_c^2} = Bi \cdot Fo \quad (3-8)$$

式中  $Bi$  是以  $l_c$  为特征长度的毕渥数， $Fo$  称为傅里叶数，这里也以  $l_c$  作为其特征长度。这样

式(3-6)又可以表示成为

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \exp(-Bi \cdot Fo) \quad (3-9)$$

### 3.2.2 导热量计算式、时间常数与傅里叶数

#### 1. 导热量计算式

采用集中参数法分析时,从初始时刻到某一瞬间为止的时间间隔内,导热物体与流体间所交换的热量可由瞬时热流量对时间做积分而得。导热物体的瞬时热流量为

$$\Phi = \rho c V \frac{dt}{d\tau} = hA(t_\infty - t) = (t_\infty - t_0) \rho c V \left( \frac{t_\infty - t}{t_\infty - t_0} \right) = (t_\infty - t_0) \rho c V \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right)$$

从  $\tau = 0$  到  $\tau$  时刻之间所交换的总热量为

$$Q_\tau = \int_0^\tau \Phi d\tau = (t_\infty - t_0) \int_0^\tau hA \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right) d\tau = (t_\infty - t_0) \rho c V \left[ 1 - \exp\left(-\frac{hA}{\rho c V} \tau\right) \right] \quad (3-10)$$

虽然,上述各式是对物体被加热的情况而导出的,但同样适用于被冷却的场合,只是为使换热量恒取正值应将式中的  $t_\infty - t_0$  改为  $t_0 - t_\infty$ 。物体内部导热热阻可以忽略时的加热或冷却,有时又称牛顿加热或牛顿冷却。

#### 2. 时间常数

式(3-6)或式(3-9)表明,当采用集中参数法分析时,物体中的过剩温度随时间成指数曲线关系变化。在过程的开始阶段温度变化很快,随后逐渐减慢,如图3-5所示。

在式(3-6)的指数函数中,  $hA/\rho c V$  具有与  $1/\tau$  相同的量纲。如果时间  $\tau = \rho c V/(hA)$ , 则有

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \exp(-1) = 0.386 = 36.8\%$$

$\rho c V/(hA)$  称为时间常数 (time constant), 记为  $\tau_c$ 。当时间  $\tau = \tau_c$  时, 物体的过剩温度已经降低到了初始过剩温度值的 36.8%。在用热电偶测定流体温度的场合, 热电偶的时间常数是说明热电偶对流体温度变动响应快慢的指标。显然, 时间常数越小, 热电偶越能迅速反映出流体温度的变动。时间常数不仅取决于热电偶的几何参数  $V/A$ 、物理性质  $\rho$ 、 $c$ , 还同换热条件

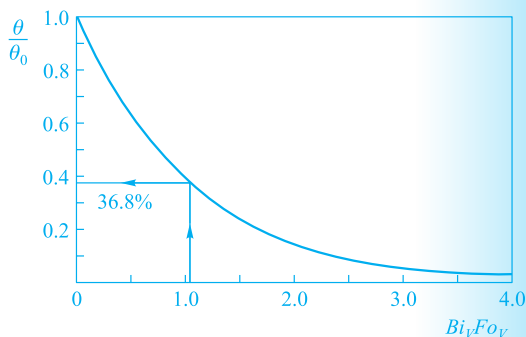


图 3-5 用集中参数法分析时物体无量纲过剩温度的变化曲线

( $h$ ) 有关。从物理意义上来说, 热电偶对流体温度变化反应的快慢取决于其自身的热容量  $\rho cV$  及表面换热条件 ( $hA$ )。热容量越大, 温度变化得越慢; 表面换热条件越好 ( $hA$  越大), 单位时间内传递的热量越多, 则越能使热电偶的温度迅速接近被测流体的温度。 $\rho cV$  与  $hA$  的比值反映了这两种影响的综合结果。

### 3. 傅里叶数的物理意义

上节中已指出,  $Bi$  数是固体内部单位导热面积上的导热热阻与单位表面积上的换热热阻 (即外部热阻) 之比  $[Bi = (l/\lambda)/(1/h)]$ 。 $Bi$  数越小, 意味着内热阻越小或外热阻越大, 这时采用集中参数法分析的结果就越接近实际情况。例如, 对于用热电偶测定流体温度的场合,  $Bi$  数的值大概只有 0.001 (或更小) 的数量级。试验证实, 这时式 (3-6) 同实测结果符合得很好。

现在来讨论  $Fo$  数的物理意义。傅里叶数的物理意义可以理解为两个时间间隔相除所得的无量纲时间, 即  $Fo = \tau/(l_c^2/a)$ , 分子  $\tau$  是从边界上开始发生热扰动的时刻起到所计算时刻为止的时间间隔, 分母  $l_c^2/a$  可以视为使边界上发生的有限大小的热扰动穿过一定厚度的固体层扩散到  $l_c^2$  的面积上所需的时间。因此,  $Fo$  数可以看成是表征非稳态过程进行深度的无量纲时间。在非稳态导热过程中, 这一无量纲时间越大, 热扰动就越深入地传播到物体内部, 因而物体各点的温度越接近周围介质的温度。

### 3.2.3 集中参数法的适用范围及应用举例

前面的定性分析表明, 当  $Bi$  数很小时可以采用集中参数法。那么究竟小到什么程度才适合应用集中参数法呢? 这取决于问题本身对计算精度的需要。由后面的一维问题分析解可知, 对于平板、圆柱与球中的一维非稳态第三类边界条件下的导热问题, 当按特征长度

$$\left. \begin{aligned} l &= \delta, \text{ 厚度为 } 2\delta \text{ 的平板} \\ l &= R, \text{ 圆柱} \\ l &= R, \text{ 球} \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

定义的  $Bi$  数满足

$$Bi = \frac{hl}{\lambda} \leq 0.1 \quad (3-12)$$

时, 物体中最大与最小的过余温度之差小于 5%, 对于一般工程计算, 此时已经足够精确地可以认为整个物体温度均匀。按照这样要求, 由于  $l_c = V/A$  对圆柱与球分别是半径的 1/2 与

1/3, 因而如果以  $l_c$  作为  $Bi$  数的特征长度, 则该  $Bi$  数对平板、圆柱与球应该分别小于 0.1、0.05 和 0.033。

但是, 考虑到对流传热表面传热系数计算中 20%~25% 的误差是很正常的<sup>[3, 4]</sup>, 同时零维问题的分析方法简单, 对许多工程问题都可以得出有用的结果, 并且对于形状复杂的问题还无法得出分析解, 因此对某些情形也不妨将集中参数法的适用条件放宽到

$$Bi = \frac{hl_c}{\lambda} \leq 0.1 \quad (3-13)$$

对于球, 此时最大与最小的过剩温度相差约 13%, 对圆柱相差约 9%。当计算精度要求不是很高时, 这样的结果也是可以接受的。这一情况说明, 分析工程问题时要根据问题的实际条件、便于获得分析方法等情况灵活处理, 不能墨守成规。

**例题 3-1** 一直径为 5 cm 的钢球, 初始温度为 450°C, 突然被置于温度为 30°C 的空气中。设钢球表面与周围环境间的表面传热系数为 24 W/(m<sup>2</sup>·K), 试计算钢球冷却到 300°C 所需的时间。已知钢球的  $c = 0.48$  kJ/(kg·K),  $\rho = 7753$  kg/m<sup>3</sup>,  $\lambda = 33$  W/(m·K)。

**题解**

**假设:** (1) 钢球冷却过程中与空气及四周冷表面发生对流与辐射传热, 随着表面温度的降低辐射换热量减少。这里取一个平均值, 表面传热系数按常数处理; (2) 常物性。

**计算:** 首先检验是否可用集中参数法。为此计算  $Bi$  数:

$$\begin{aligned} Bi &= \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{h \times \frac{4}{3}\pi R^3}{\lambda (4\pi R^2)} = \frac{hR}{\lambda} \\ &= \frac{24 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times \frac{0.025 \text{ m}}{3}}{33 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.00606 < 0.0333 \end{aligned}$$

可以采用集中参数法。

$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{24 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 4\pi \times (0.025 \text{ m})^2}{7753 \text{ kg}/\text{m}^3 \times 480 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times (0.025 \text{ m})^3} = 7.74 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

据式 (3-9) 有

$$\frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{300^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}}{450^\circ\text{C} - 30^\circ\text{C}} = \exp(-7.74 \times 10^{-4} \tau)$$

由此解得

$$\tau = 570 \text{ s} = 0.158 \text{ h}$$

**讨论:** 本例是在已知表面传热系数的条件下计算的, 所设定数值的大小对计算结果影响很大。如果为了获得金属球与冷却液体间的表面传热系数, 在已知  $c$ 、 $\rho$  和几何尺寸的情况下, 你能否设计出一种方法, 以通过测定金属球非稳态导热过程中的温度变化而获得所需的表面传热系数  $h$  之值。

例题 3-2 一温度计的水银泡呈圆柱形，长 20 mm，内径为 4 mm，初始温度为  $t_0$ ，今将其插入到温度较高的储气罐中测量气体温度。设水银泡同气体间的对流传热表面传热系数为  $11.63 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，水银泡一层薄玻璃的作用可以忽略不计，试计算此条件下温度计的时间常数，并确定插入 5 min 后温度计读数的过剩温度为初始过剩温度的百分之几？水银的物性参数如下： $c = 0.138 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ， $\rho = 13\ 110 \text{ kg}/\text{m}^3$ ， $\lambda = 10.36 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

题解

假设：(1) 以水银泡部分作为分析对象，略去玻璃柱体部分的影响；(2) 常物性。

计算：首先检验是否可用集中参数法。考虑到水银泡柱体的上端面不直接受热，故

$$\frac{V}{A} = \frac{\pi R^2 l}{2\pi R l + \pi R^2} = \frac{Rl}{2(l + 0.5R)} = \frac{0.002 \text{ m} \times 0.02 \text{ m}}{2 \times (0.020 \text{ m} + 0.001 \text{ m})} = 0.953 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{11.63 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.953 \times 10^{-3} \text{ m}}{10.36 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 1.07 \times 10^{-3} < 0.05$$

可以采用集中参数法。时间常数为

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{hA} = \frac{13\ 110 \text{ kg}/\text{m}^3 \times 138 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times 0.953 \times 10^{-3} \text{ m}}{11.63 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})} = 148 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} Fo &= \frac{a\tau}{(V/A)^2} = \frac{\lambda}{c\rho} \frac{\tau}{(V/A)^2} \\ &= \frac{10.36 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{13\ 110 \text{ kg}/\text{m}^3 \times 138 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})} \times \frac{5 \times 60 \text{ s}}{(0.953 \times 10^{-3} \text{ m})^2} \\ &= 1.89 \times 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta_0} &= \exp(-Bi \cdot Fo) = \exp(-1.07 \times 10^{-3} \times 1.89 \times 10^3) \\ &= \exp(-2.02) = 0.133 \end{aligned}$$

即经 5 min 后温度计读数的过剩温度是初始过剩温度的 13.3%。也就是说，在这段时间内温度计的读数上升了这次测定中温度跃升（从  $t_0$  上升到流体温度  $t_\infty$ ）的 86.7%。

讨论：由此可见，当用水银温度计测量流体温度时必须在被测流体中放置足够长的时间，以使温度计与流体之间基本达到热平衡。对于稳态的过程，这是可以允许的。但对于非稳态的流体温度场的测定，水银温度计的热容量过大时将无法跟上流体温度的变化，即其响应特性很差。这时需要采用时间常数很小的感温元件，直径很小的热电偶（如  $d = 0.05 \text{ mm}$ ）是常见的用于动态测量的感温元件。请读者从式（3-6）出发分析采用小直径热电偶能减少时间常数的原因。

例题 3-3 一直径为 5 cm、长 30 cm 的钢圆柱，初始温度为  $30^\circ\text{C}$ ，将其放入炉温为  $1\ 200^\circ\text{C}$  的加热炉中加热，升温到  $800^\circ\text{C}$  方可取出。设钢圆柱与烟气间的复合换热表面传热系数为  $140 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，钢的物性参数与例题 3-1 一样，问需多长时间才能达到要求。

题解

假设：(1) 表面复合传热系数为常数；(2) 常物性。

计算：首先检验是否可用集中参数法。为此计算  $Bi$ ：

$$Bi = \frac{h(V/A)}{\lambda} = \frac{h[(\pi d^2 l/4)/(\pi dl + 2\pi d^2/4)]}{\lambda} = \frac{h}{\lambda} \frac{dl/4}{l+d/2}$$

$$= \frac{140 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})}{33 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} \times \frac{0.05 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}/4}{0.3 \text{ m} + 0.025 \text{ m}} = 0.049 < 0.05$$

可以采用集中参数法。因

$$\frac{hA}{\rho c V} = \frac{h}{\rho c} \left(\frac{V}{A}\right)^{-1} = \frac{h}{\rho c} \frac{4(l+d/2)}{dl} = \frac{140 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 4 \times 0.325 \text{ m}}{7753 \text{ kg}/\text{m}^3 \times 480 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times 0.05 \text{ m} \times 0.3 \text{ m}}$$

$$= 0.326 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$$

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{800^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}}{30^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}} = 0.342$$

据式(3-6)有

$$0.342 = \exp(-0.326 \times 10^{-2} \tau)$$

由此解得  $\tau = 329 \text{ s}$ 。

讨论：本例中以  $l_c$  作为特征长度的  $Bi$  数已达到 0.049，如果按 0.05 来估算，则柱体表面的过剩温度与中心的过剩温度之比为 0.95。设经过 329 s 后柱体表面温度已达  $800^\circ\text{C}$ ，则其中心温度可据  $(800^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}) / (t_m - 1200^\circ\text{C}) = 0.95$  加以估计，其值约为  $779^\circ\text{C}$ 。在需要较准确地预测中心温度达到  $800^\circ\text{C}$  所需时间的情况下应采用一维问题的分析解。这将在下一节讨论。

### 3.3 典型一维物体非稳态导热的分析解

本节介绍平板、圆柱与球的一维非稳态导热温度场的分析解。所谓一维是指：对平板，温度仅沿厚度方向变化；对圆柱与球，温度仅沿半径方向变化。重点是解的应用，而求解过程本身可参见文献 [5, 6]。假定导热物体的热物性均为常数。

#### 3.3.1 三种几何形状物体的温度场分析解

以平板为例说明物理问题及温度场数学描写的建立过程。设有一块厚为  $2\delta$  的无限大平板，初始温度为  $t_0$ 。在初始瞬间将它放置于温度为  $t_\infty$  的流体中，设平板两边对称受热，板内温度分布必以其中心截面为对称面。因此，只要研究厚为  $\delta$  的半块平板的情况即可。将  $x$  轴的原点置于板的中心截面上，如图 3-6 所示。对于  $x \geq 0$  的半块平板，可以列出下列导热微分方程式及定解条件：

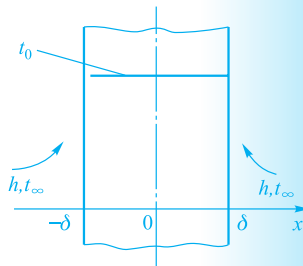


图 3-6 平板第 3 类边界条件

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} (0 < x < \delta, \tau > 0) \quad (3-14)$$

$$t(x, 0) = t_0 (0 \leq x \leq \delta) \quad (3-15)$$

$$\left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3-16a)$$

$$h[t(\delta, \tau) - t_\infty] = -\lambda \left. \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta} \quad (3-16b)$$

引入过余温度

$$\theta = t(x, \tau) - t_\infty \quad (3-17)$$

则以上四式化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} (0 < x < \delta, \tau > 0) \quad (3-18)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0 (0 \leq x \leq \delta) \quad (3-19)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (3-20a)$$

$$h\theta(\delta, \tau) = -\lambda \left. \frac{\partial \theta(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta} \quad (3-20b)$$

式(3-18)~(3-20)是所研究问题的数学描写。对于圆柱和球可以列出类似的数学描写。采用分离变量法,可得无量纲温度的分析解,见表3-1。

表 3-1 平板、圆柱、球在第 3 类边界条件下非稳态导热无量纲温度的分析解

几何形状	无量纲温度分析解	$\mu_n$ 是下列超越方程的根 (eigengvalue)	$\eta$	$Fo$	$Bi$
平板	$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 Fo) \cos(\mu_n \eta)$ $C_n = \frac{2 \sin(\mu_n)}{\mu_n + \cos(\mu_n) \sin(\mu_n)}$	$\tan(\mu_n) = \frac{Bi}{\mu_n}, n=1, 2, \dots$	$\frac{x}{\delta}$	$\frac{a\tau}{\delta^2}$	$\frac{h\delta}{\lambda}$
圆柱	$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 Fo) J_0(\mu_n \eta)$ $C_n = \frac{2}{\mu_n} \frac{J_1(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)}$	$\mu_n \frac{J_1(\mu_n)}{J_0(\mu_n)} = Bi, n=1, 2, \dots$	$\frac{r}{R}$	$\frac{a\tau}{R^2}$	$\frac{hR}{\lambda}$

几何形状	无量纲温度分析解	$\mu_n$ 是下列超越方程的根 (eigengvalue)	$\eta$	$Fo$	$Bi$
球	$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\mu_n^2 Fo) \frac{1}{\mu_n \eta} \sin(\mu_n \eta)$ $C_n = 2 \frac{\sin(\mu_n) - \mu_n \cos(\mu_n)}{\mu_n - \sin(\mu_n) \cos(\mu_n)}$	$1 - \mu_n \cot(\mu_n) = Bi, n = 1, 2, \dots$	$\frac{r}{R}$	$\frac{a\tau}{R^2}$	$\frac{hR}{\lambda}$

由表 3-1 可见, 平板、圆柱与球中的无量纲过余温度  $\theta/\theta_0$  与  $Fo$  数、 $Bi$  数及无量纲距离  $\eta$  有关, 即:

$$\frac{\theta_0}{\theta} = \frac{t(\eta, \tau) - t_{\infty}}{t_0 - t_{\infty}} = f(Fo, Bi, \eta)$$

### 3.3.2 非稳态导热正规状况阶段分析解的简化

#### 1. 非稳态导热正规状况阶段的物理概念与数学含义

在第 3-1 节中已经指出, 非周期性的非稳态导热过程在进行到一定深度后, 初始条件对物体中无量纲温度分布的影响基本消失, 温度分布主要取决于边界条件的影响。非稳态导热的这一阶段称为正规状况阶段。

现在从分析解的数学表达式来揭示正规状况阶段的数学含义。三个解的特征值都是  $Bi$  数的函数, 在一定的  $Bi$  数下  $\mu_n$  之值随  $n$  的增加而迅速增加。例如, 对平板, 在  $Bi = 1.0$  时前 4 个根分别为 0.860 3、3.425 6、6.437 3、9.529 3。由三个分析解中反映时间影响的部分 [  $\exp(-\mu_n^2 Fo)$  ] 可见, 无穷级数第一项以后的各项, 会随着  $Fo$  数的增加而迅速衰减。数值计算表明, 当  $Fo$  数大于 0.2 以后, 略去无穷级数中第二项及以后各项所得的计算结果与按完整级数计算结果的偏差小于 1%。这相当于将无穷级数解中的系数  $C_n$  ( $n \geq 2$ ) 取为零。因为  $C_n$  的无穷系列值是为了使分析解满足初始条件而引入的, 这样的处理就意味着初始条件的影响已经消失, 所以三个分析解无穷级数的第一项就是正规状况阶段温度场的解。对于非周期性的非稳态导热过程, 从过程的开始到温度分布趋近于稳态分布的时间间隔中, 初始条件影响基本消失的阶段占了极大部分的比例, 故称这一阶段为“正规状况”。

#### 2. 正规状况阶段三个分析解的简化表达式

$$\text{平板} \quad \frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo) \cos(\mu_1 \eta) \quad (3-21)$$

$$\text{圆柱} \quad \frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \frac{2}{\mu_1} \frac{J_1(\mu_1)}{J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)} \exp(-\mu_1^2 Fo) J_0(\mu_1 \eta) \quad (3-22)$$

$$\text{球} \quad \frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = \frac{2(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1 - \sin \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo) \frac{\sin(\mu_1 \eta)}{\mu_1 \eta} \quad (3-23)$$

以平板的解式(3-21)为例,正规状况阶段的任何时刻,平板中任意处( $\eta$ )与平板中心( $\eta = 0.0$ )处的过余温度之比为

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta(0, \tau)} = \frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_m(\tau)} = \cos(\mu_1 \eta) \quad (3-24)$$

可见这一比值与时间无关,只取决于特征值 $\mu_1$ ,即取决于边界条件,这是与“正规状况”4个字的含义相一致的。

三种几何形状 $\mu_1$ 随 $Bi$ 的变化如图3-7所示。

### 3. 一段时间间隔内所传导的热量计算式

从初始时刻到平板与周围介质处于热平衡这一过程中所传递的热量为

$$Q_0 = \rho c V (t_0 - t_\infty) \quad (3-25)$$

这是非稳态导热过程中所能传递的最大热量,从

初始时刻到某一时刻 $\tau$ 这一阶段中所传递的热量 $Q$ 与 $Q_0$ 之比为

$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{\rho c \int_V [t_0 - t(x, \tau)] dV}{\rho c V (t_0 - t_\infty)} = \frac{1}{V} \int_V \frac{(t_0 - t_\infty) - (t - t_\infty)}{t_0 - t_\infty} dV \\ &= 1 - \frac{1}{V} \int_V \frac{t - t_\infty}{t_0 - t_\infty} dV = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \end{aligned} \quad (3-26)$$

对上述三种物体,当 $Fo > 0.2$ 后,将式(3-21)、(3-22)、(3-23)代入,分别可得:

$$\text{平板} \quad \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin \mu_1}{\mu_1} \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (3-27)$$

$$\text{圆柱} \quad \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1} \frac{2}{\mu_1} \frac{J_1(\mu_1)}{J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)} \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (3-28)$$

$$\text{球} \quad \frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1^3} \frac{2(\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1)}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1} \exp(-\mu_1^2 Fo) \quad (3-29)$$

仔细分析式(3-21)~(3-23),以及式(3-27)~(3-29)可见,三种几何形状物体

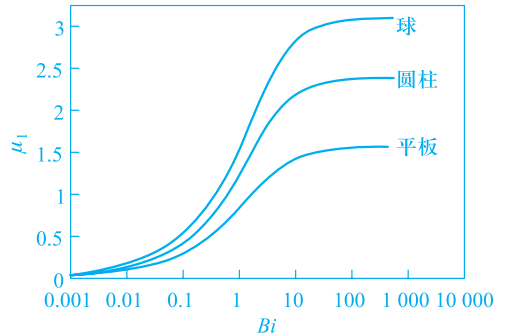


图3-7 平板、圆柱、球分析解特征值 $\mu_1$ 随 $Bi$ 的变化

的正规状况阶段温度场与导热量的计算式可以统一表示为:

$$\frac{\theta(\eta, \tau)}{\theta_0} = A \exp(-\mu_1^2 Fo) f(\mu_1 \eta) \quad (3-30)$$

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - A \exp(-\mu_1^2 Fo) B \quad (3-31)$$

三种形状物体的  $A$ 、 $B$ 、 $f(\mu_1 \eta)$  的表示式列于表 3-2 中。

表 3-2  $A$ 、 $B$ 、 $f(\mu_1 \eta)$  的表示式

几何形状	$A$	$B$	$f(\mu_1 \eta)$
平板	$2 \frac{\sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$\frac{\sin \mu_1}{\mu_1}$	$\cos(\mu_1 \eta)$
圆柱	$2 \frac{J_1(\mu_1)}{\mu_1 [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]}$	$2 \frac{J_1(\mu_1)}{\mu_1}$	$J_0(\mu_1 \eta)$
球	$2 \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1 - \sin \mu_1 \cos \mu_1}$	$3 \frac{\sin \mu_1 - \mu_1 \cos \mu_1}{\mu_1^3}$	$\frac{\sin(\mu_1 \eta)}{\mu_1 \eta}$

### 3.3.3 非稳态导热正规状况阶段的工程计算方法

利用上述公式计算时, 需要根据不同的  $Bi$  数查出相应的特征值  $\mu_1$ , 并且要涉及贝塞尔 (Bessel) 函数等的计算, 不甚方便。在传热学的发展史上先后提出了两种简化计算手续的方法, 即由海斯勒 (Heisler) 等提出的诺谟图 (nomogram) 方法<sup>[7, 8]</sup> 以及由坎坡 (Campo) 提出的近似拟合公式方法<sup>[9]</sup>, 现分别介绍如下。

#### 1. 图线法

历史上曾广泛采用按分析解的级数第一项而绘制的用以确定温度分布的曲线, 称为海斯勒图。以无限大平板为例, 它首先根据式 (3-21) 给出  $\theta_m/\theta_0$  随  $Fo$  及  $Bi$  变化的曲线 (此时  $x/\delta = 0$ ), 随后再根据式 (3-24) 确定  $\theta/\theta_m$  之值, 于是平板中任意一点的  $\theta/\theta_0$  值便为

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta}{\theta_m} \quad (3-32)$$

同样, 对于初始时刻到时刻  $\tau$  物体与环境间所交换的热量, 可以利用式 (3-27) ~ (3-29) 作出  $Q/Q_0 = f(Fo, Bi)$  的图线<sup>[10]</sup>。

#### 2. 近似拟合公式法

文献 [9] 对三种几何形状的第一特征值  $\mu_1$ , 以及式 (3-30)、(3-31) 中的  $A$ 、 $B$  和零

阶贝塞尔函数  $J_0(x)$  提出了以下拟合公式:

$$\mu_1^2 = \left( a + \frac{b}{Bi} \right)^{-1} \quad (3-33a)$$

$$A = a + b(1 - e^{-cBi}) \quad (3-33b)$$

$$B = \frac{a + cBi}{1 + bBi} \quad (3-33c)$$

$$J_0 = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (3-33d)$$

式 (3-33a) ~ (3-33d) 中的常数列出于表 3-3、表 3-4 中。

表 3-3 式 (3-33a) ~ (3-33c) 中的常数

计算的量		无限大平板	无限长圆柱	球
特征值 $\mu_1$	$a$	0.402 2	0.170 0	0.098 8
	$b$	0.918 8	0.434 9	0.277 9
系数 $A$	$a$	1.010 1	1.004 2	1.000 3
	$b$	0.257 5	0.587 7	0.985 8
	$c$	0.427 1	0.403 8	0.319 1
系数 $B$	$a$	1.006 3	1.017 3	1.029 5
	$b$	0.547 5	0.598 3	0.648 1
	$c$	0.348 3	0.257 4	0.195 3

表 3-4 计算  $J_0(x)$  的常数

$a$	$b$	$c$	$d$
0.996 7	0.035 4	-0.325 9	0.057 7

在表 3-2 中的第一类一阶贝塞尔函数  $J_1(x)$  可根据递推公式  $J_1(x) = -J_0'(x)$  来确定, 这里  $J_0'(x)$  表示  $J_0(x)$  对  $x$  的一阶导数。

值得指出, 虽然图线法有简捷、方便的优点, 但是计算的准确度受到图线分辨率的限制。近似拟合公式的方法便于用计算机求解, 计算准确度不亚于图线法, 而且对采用图线法需要迭代计算的问题, 采用拟合公式法时可免去迭代。本书正文中给出了一维平板的图线 (图 3-8、图 3-9、图 3-10), 圆柱与球的图线在附录中给出。

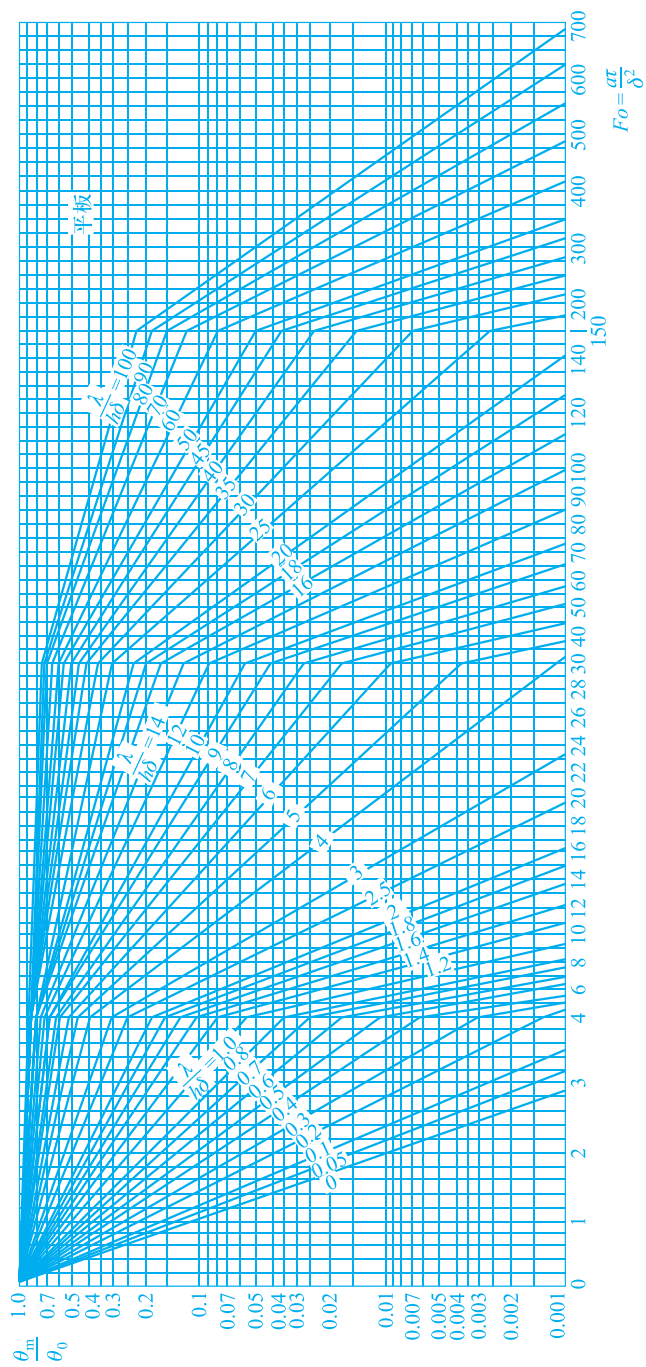


图 3-8 无限大平板中心温度的诺谟图

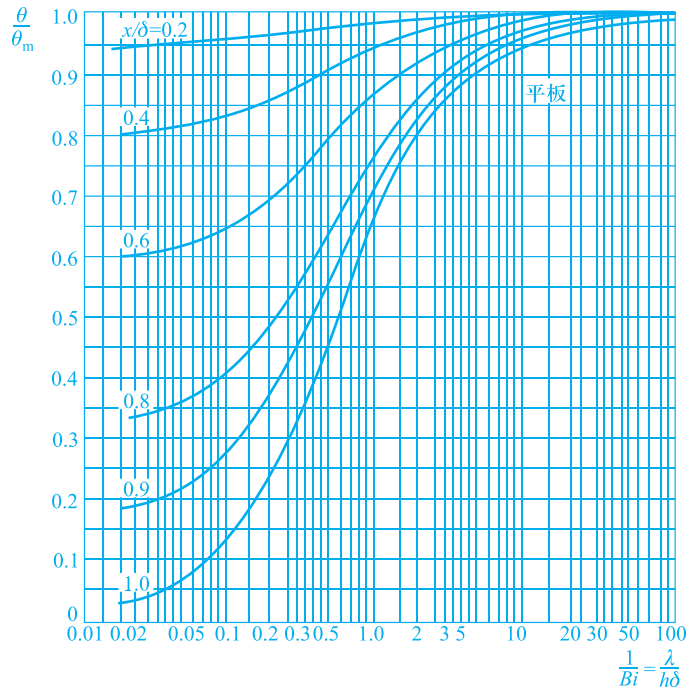


图 3-9 无限大平板的  $\frac{\theta}{\theta_m}$  曲线

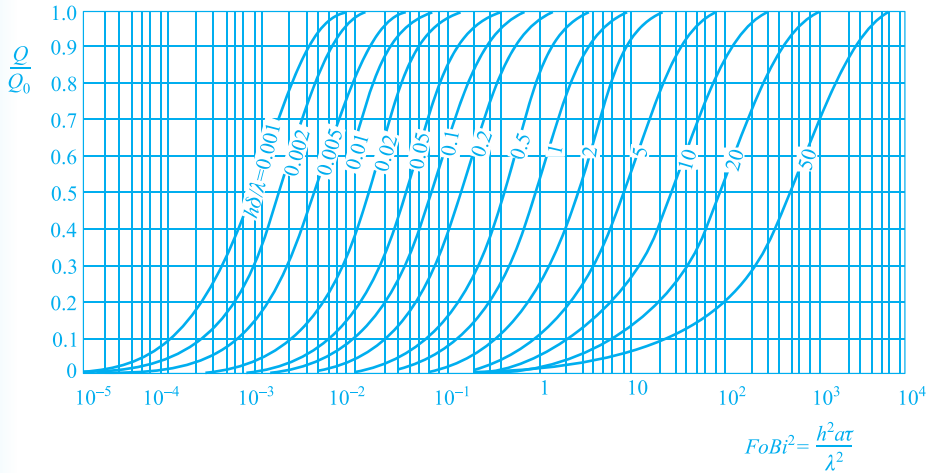


图 3-10 无限大平板的  $Q/Q_0$  曲线

### 3.3.4 分析解应用范围的推广及 $Fo$ 、 $Bi$ 对过程影响的讨论

上述分析解无论对物体被加热或冷却都是适用的。对于一维平板，在热边界条件方面还可以应用于以下两种情形：（1）平板一侧绝热，另一侧为第三类边界条件；（2）平板两侧面均为第一类边界条件且维持在相同的温度。读者可自行分析这样推广的理由。

下面讨论  $Fo$  数及  $Bi$  数对温度场的影响。

表 3-1 所示分析解及诺谟图清楚地表明, 物体中各点的过余温度随时间  $\tau$  增加而减小。因为  $Fo$  数与  $\tau$  成正比, 所以物体中各点的过余温度亦随  $Fo$  数的增加而减小。 $Bi$  数的影响则可以从两个方面来说明。一方面, 从图 3-8 可以看出, 在相同  $Fo$  数的条件下,  $Bi$  数越大 (即  $1/Bi$  越小),  $\theta_m/\theta_0$  的值越小。因为  $Bi$  数越大, 意味着表面上的换热条件越强, 导致物体的中心温度越能迅速地接近周围介质的温度。在极限情况下,  $Bi \rightarrow \infty$ , 这相当于在过程开始瞬间物体表面就达到了周围介质的温度, 物体中心温度的变化当然也最迅速。所以, 诺谟图中  $1/Bi = 0$  的线实质上就代表壁温保持恒定的第一类边界条件的解。另一方面,  $Bi$  数的大小还决定了物体中温度趋于均匀的程度。例如对平板, 从诺谟图 3-9 中可以看到, 当  $1/Bi > 10$  (即  $Bi < 0.1$ ) 时, 截面上的过余温度差值已小于 5%。若采用忽略物体内部热阻的简化分析, 即前面已介绍过的集中参数法, 误差也不大。在海斯勒图上, 为得到更高的计算准确度,  $Bi$  数的下限一直推到 0.01, 这时分析解与集中参数法的结果相差极微。由此可见: 介质温度恒定的第三类边界条件下的分析解, 在  $Bi \rightarrow \infty$  的极限情况下转化为第一类边界条件下的解, 而在  $Bi \rightarrow 0$  的极限情况下则与集中参数法的解相同。

**例题 3-4** 一块厚 100 mm 的钢板放入温度为 1 000°C 的炉中加热, 钢板一面受热, 另一面可近似地认为是绝热的。钢板初始温度  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ 。求钢板受热表面的温度达到 500°C 时所需的时间, 并计算此时剖面上的最大温差。取加热过程中的平均表面传热系数  $h = 174 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 钢板的  $\lambda = 34.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $a = 0.555 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。已知:  $Bi = 0.1$  时,  $\mu_1 = 0.311 1 \text{ rad}$ ;  $Bi = 0.5$  时,  $\mu_1 = 0.653 3 \text{ rad}$ ;  $Bi = 1.0$  时,  $\mu_1 = 0.860 3 \text{ rad}$ 。

**题解**

假设: (1) 一维问题; (2) 热物性为常数; (3) 加热过程表面传热系数为常数。

分析: 这一问题相当于厚 200 mm 平板对称受热的情形, 故可以应用一维平板的分析解。

计算: 对于此平板

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{174 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.1 \text{ m}}{34.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.5$$

$$\frac{x}{\delta} = 1.0$$

从图 3-9 查得, 在平板表面上  $\theta_w/\theta_m = 0.8$ 。另一方面, 根据已知条件, 表面上的无量纲过余温度为

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{t_w - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{500^\circ\text{C} - 1000^\circ\text{C}}{20^\circ\text{C} - 1000^\circ\text{C}} = 0.51$$

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{\theta_m}{\theta_0} \frac{\theta_w}{\theta_m}$$

故得

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{\theta_w}{\theta_0} / \frac{\theta_w}{\theta_m} = 0.51/0.8 = 0.637$$

据  $\theta_m/\theta_0$  及  $Bi$  数之值, 从图 3-8 查得  $Fo = 1.2$ , 故得

$$\tau = 1.2 \frac{\delta^2}{a} = 1.2 \times \frac{(0.1 \text{ m})^2}{0.555 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 2.16 \times 10^3 \text{ s} = 0.6 \text{ h}$$

另外, 由  $\theta_m = 0.637\theta_0$  得

$$t_m = 0.637\theta_0 + t_\infty = 0.637 \times (20^\circ\text{C} - 1000^\circ\text{C}) + 1000^\circ\text{C} = 376^\circ\text{C}$$

故得剖面上的最大温差为

$$\Delta t_{\max} = 500^\circ\text{C} - 376^\circ\text{C} = 124^\circ\text{C}$$

讨论: 下面利用式 (3-21) 计算  $Fo$  之值。据已知  $Bi = 0.5$  时,  $\mu_1 = 0.6533 \text{ rad} = 37.43^\circ$ , 故有

$$0.51 = \frac{2 \sin 37.43^\circ}{0.6533 + \sin 37.43^\circ \cos 37.43^\circ} \times \exp(-0.6533^2 Fo) \times \cos(37.43^\circ \times 1)$$

$$0.51 = 1.0701 \times \exp(-0.4268 Fo) \times 0.7981$$

得  $Fo = 1.196$ 。

由此例可见, 当在海斯勒图上有所需要的  $Bi$  数的曲线时, 由查图得出的结果与分析解是相当一致的。

例题 3-5 有一直径为 400 mm 的钢锭, 初温  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , 将它置于炉温为  $900^\circ\text{C}$  的炉中加热, 试计算加热到表面温度为  $750^\circ\text{C}$  时所需的加热时间。假定钢锭可近似地视为无限长的圆柱, 并取  $h = 174 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。钢锭的  $\lambda = 34.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $a = 0.695 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

题解

假设: (1) 一维问题; (2) 热物性为常数; (3) 加热过程的表面传热系数为常数。

计算:

$$Bi = \frac{hR}{\lambda} = \frac{174 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.20 \text{ m}}{34.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 1.0$$

$$\frac{r}{R} = 1.0$$

从附录查得,  $\theta_w/\theta_m = 0.65$ 。根据已知条件, 表面上的无量纲过余温度为

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \frac{t_w - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{750^\circ\text{C} - 900^\circ\text{C}}{20^\circ\text{C} - 900^\circ\text{C}} = 0.17$$

故得

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{\theta_w}{\theta_0} / \frac{\theta_w}{\theta_m} = 0.17/0.65 = 0.262$$

据  $Bi = 1.0$  及  $\theta_m/\theta_0 = 0.262$ , 由附录查得  $Fo = 0.96$ , 故得

$$\tau = 0.96 \frac{R^2}{a} = 0.96 \times \frac{(0.2 \text{ m})^2}{0.695 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}} = 5525 \text{ s} = 1.535 \text{ h}$$

讨论: 如果采用拟合公式 (3-33) 来计算, 则有

$$\mu_1^2 = \left( 0.1700 + \frac{0.4349}{1} \right)^{-1}, \mu_1 = 1.2858 \text{ rad}$$

$$A = 1.0042 + 0.5877 \times [1 - \exp(-0.4038 \times 1)] = 1.1994$$

$$J_0(\mu, \eta) = 0.9967 + 0.0354 \times 1.2858 - 0.3259 \times 1.2858^2 + 0.0577 \times 1.2858^3 = 0.6261$$

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \frac{\theta_w}{\theta_0} \frac{\theta_w}{\theta_m} = 0.17 / 0.65 = 0.262$$

所以  $Fo = 0.898 \approx 0.9$ 。

这一结果与查海斯勒图得到的数值基本一致。钢锭的直径实际上常常可以与其长度比较，因而更合理的计算应把它当作二维物体来处理，3.5 节中将讨论这一类问题。

### 3.4 半无限大物体的非稳态导热

半无限大物体 (semi-infinite body) 可以看成是一维平板的一种特殊情况。所谓半无限大物体，是指几何上如图 3-11 所示的那样的物体，其特点是从  $x = 0$  的界面开始可以向正向以及上、下方向上无限延伸，而在每一个与  $x$  坐标垂直的截面上物体的温度都相等。现实世界中不存在这样的半无限大物体，但是在研究物体中非稳态导热的初始阶段时，则有可能把实际物体当作半无限大的物体来处理。例如，假设有一块几何上为有限厚度的平板，起初具有均匀的温度，然后其一侧表面突然受到热扰动，如壁温突然升高到一定值并保持不变，或者突然受到恒定的热流密度加热，或者受到温度恒定的流体的加热或冷却。当扰动的影响还局限在表面附近而尚未深入到平板内部中去时，就可有条件地把该平板视为一“半无限大物体”。工程导热问题中有不少情形可按半无限大物体处理。

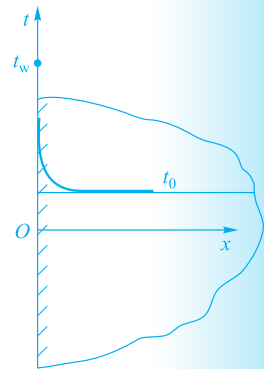


图 3-11 半无限大物体图示

本节中将介绍三种边界条件下温度场的分析解，重点是解的应用及理解其所包含的物理概念，求解过程可参见文献 [5, 11]。

#### 3.4.1 三种边界条件下半无限大物体温度场的分析解

如图 3-11 所示，有一半无限大物体，初始温度均匀为  $t_0$ 。在  $\tau = 0$  时刻， $x = 0$  的侧面突然受到热扰动，这种情况可以归纳为以下三种边界条件：(1) 表面温度突然变化到  $t_w$ ，并保持恒定（第一类）；(2) 受到恒定的热流密度加热（第二类）；(3) 与温度为  $t_\infty$  的流体进行热交换（第三类）。这三类边界条件定性示于图 3-12 中。假定物体的热物性为常数，没有内热源。

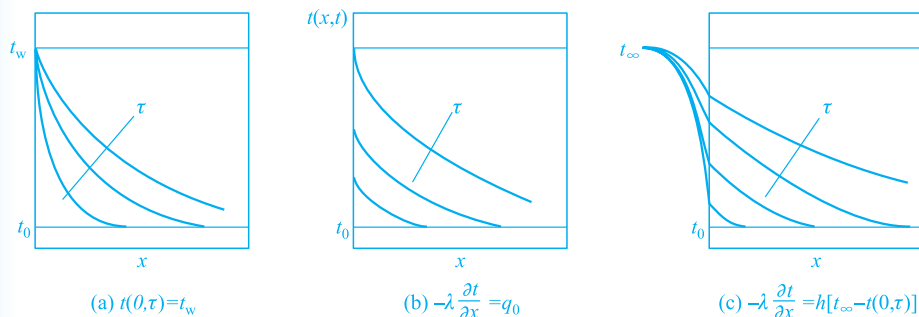


图 3-12 三种边界条件的图示

上述条件下物体中温度的控制方程和定解条件为

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty$$

$$\tau = 0, \quad t(x, \tau) = t_0 \quad (3-34)$$

$$x \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow t_0$$

$x = 0$ , 图 3-11 所示的三种条件之一

温度场的分析解为

$$\text{第一类边界条件} \quad \frac{t(x, \tau) - t_w}{t_0 - t_w} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \quad (3-35)$$

第二类边界条件

$$t(x, \tau) - t_0 = \frac{2q_0\sqrt{a\tau}}{\lambda} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) - \frac{q_0x}{\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \quad (3-36)$$

第三类边界条件

$$\frac{t(x, \tau) - t_0}{t_\infty - t_0} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) - \exp\left(\frac{hx}{\lambda} + \frac{h^2a\tau}{\lambda^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \frac{h\sqrt{a\tau}}{\lambda}\right) \quad (3-37)$$

其中  $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$  称为误差函数,  $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$  称为余误差函数。误差函数的部分数值在书末的附录中给出。

### 3.4.2 导热量计算

下面以上述第一种边界条件为例, 来导出从初始时刻到某一指定时刻  $\tau$  之间半无限大物体表面与外界的换热量 (亦即半无限大物体内的导热量)。

通过任意截面  $x$  处的热流密度

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = -\lambda(t_0 - t_w) \frac{\partial \operatorname{erf} \eta}{\partial x}, \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$$

$$= \lambda \frac{t_w - t_0}{\sqrt{\pi a \tau}} \exp[-x^2/(4a\tau)] \quad (3-38)$$

在表面上 ( $x=0$ ) 的导热量为

$$Q = A \int_0^\tau q_w d\tau = A \int_0^\tau \frac{\lambda(t_w - t_0)}{\sqrt{\pi a \tau}} d\tau = 2A \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \sqrt{\rho c \lambda} (t_w - t_0) \quad (3-39)$$

由以上两式可见, 表面上的瞬时热流密度与时间的平方根成反比, 而总的导热量为与时间的平方根成正比。此外,  $Q$  还与物体的  $\sqrt{\rho c \lambda}$  成正比 (注意: 在稳态导热中, 导热量为与  $\rho c$  无关, 而只与  $\lambda$  成正比)。在材料成形工业中称  $\sqrt{\rho c \lambda}$  为吸热系数 (heat absorption coefficient), 它的大小代表了物体向与其接触的高温物体吸热的能力。在选择造型材料与冷铁时, 吸热系数是一个重要指标, 它关系到物体 (如铸件) 的冷却速度。

### 3.4.3 分析解的讨论

上述三种边界条件下的解都包含有一个无量纲参数  $\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}$ , 以及误差函数  $\operatorname{erf} \eta$ , 这是半无限大物体分析解的一个共同特点。下面以第一类边界条件的分析解式 (3-35) 为例来进一步分析这一参数所代表的物理意义。

首先看误差函数  $\operatorname{erf} \eta$  随  $\eta$  的变化趋势, 如图 3-13 所示。由书末的附表可知, 当  $\eta = 2$  时有  $\theta/\theta_0 = 0.9953$  这说明, 当  $\eta \geq 2$ , 即  $\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \geq 2$  时, 该  $x$  处的温度可以认为仍等于  $t_0$  (无量纲过余温度的变化小于 0.5%)。由此可以得出两个重要结论:

(1) 从几何位置上说, 如果  $\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \geq 2$ , 则在  $\tau$  时刻  $x$  处的温度可以认为尚未发生变化。因而对一块初始温度均匀的厚  $2\delta$  的平板, 当其一个侧面的温度突然变化到另一恒定温度时, 如果其半厚度  $\delta \geq 4\sqrt{a\tau}$ , 则在  $\tau$  时刻之前该平板中瞬时温度场的计算均可采用半无限大物体的模型。

(2) 从时间上看, 如果  $\tau \leq \frac{x^2}{16a}$ , 则此时  $x$  处的温度可认为完全不变, 因而可以把  $\frac{x^2}{16a}$  视为惰性时间 (inertia time), 即当  $\tau < \frac{x^2}{16a}$  时  $x$  处的温度可认为等于

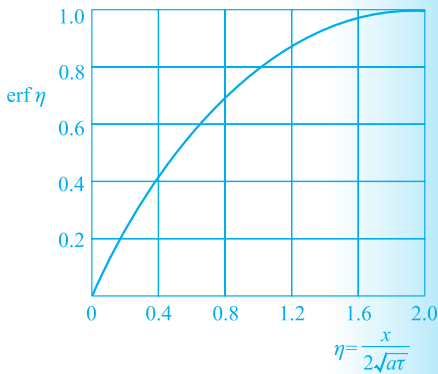


图 3-13 误差函数曲线

$t_0$ 。或者说，当它的局部  $Fo$  数  $\frac{a\tau}{x^2} < \frac{1}{16} \approx 0.06$  时，物体中的非稳态导热可以作为半无限大

物体处理。

**例题 3-6** 一块大平板型钢铸件在地坑中浇铸，浇铸前型砂温度为  $20^\circ\text{C}$ （图 3-14）。设在很短时间内浇铸完成，并且浇铸后铸件的表面温度一直维持在其凝固温度  $1450^\circ\text{C}$ ，试计算离铸件底面  $80 \text{ mm}$  处浇铸后  $2 \text{ h}$  的温度。型砂的热扩散率  $a = 0.89 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

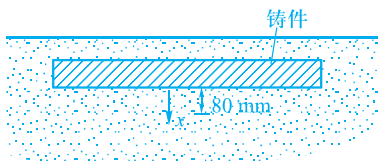


图 3-14 例题 3-6 示意图

**题解**

**假设：**（1）将铸件底面以下砂型中的非稳态导热按第一种边界条件的半无限大物体处理；（2）物性为常数。

**计算：**

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = \frac{80 \times 10^{-3} \text{ m}}{2\sqrt{0.89 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \times 2 \times 3600 \text{ s}}} = 0.5$$

由附录查得

$$\text{erf } 0.5 = 0.5205$$

所以

$$t = t_w + \text{erf } 0.5(t_0 - t_w) = 1450^\circ\text{C} + 0.5205 \times (20^\circ\text{C} - 1450^\circ\text{C}) = 705.7^\circ\text{C}$$

**讨论：**物体表面与发生相变的物质紧密接触是形成第一类边界条件的常见例子。本例中，在铸件内部基本凝固之前，假设铸件表面仍处于相变温度不失为一个可接受的近似处理。

**例题 3-7** 地面下的埋管是常见的工程与生活设施。考虑埋管深度的一个重要因素是在当地的气候条件下，埋管处的温度不会导致管内流体冻结或凝固。以输送工业及民用水的埋管为例，埋管处的温度不能低于  $0^\circ\text{C}$ 。设某地冬天地表面温度为  $10^\circ\text{C}$ ，后突然受冷空气侵袭，地表温度下降到  $-15^\circ\text{C}$ ，并维持  $45$  天不变。试确定此种条件下  $45$  天后地面下温度为  $0^\circ\text{C}$  处的位置。

**题解**

**假设：**（1）采用第一种边界条件的半无限大非稳态导热模型；（2）物性为常数。

**计算：**土壤的物性取  $c = 1840 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ， $\rho = 2050 \text{ kg}/\text{m}^3$ ， $\lambda = 0.52 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，于是  $a = \lambda/(\rho c) = 0.138 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。利用式（3-35）可写出

$$\frac{t - t_w}{t_0 - t_w} = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

即

$$\frac{0^\circ\text{C} - (-15^\circ\text{C})}{10^\circ\text{C} - (-15^\circ\text{C})} = 0.6 = \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)$$

由附录查得  $\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \approx 0.6$ ，于是

$$x = 1.2\sqrt{a\tau} = 1.2 \times \left(0.138 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s} \times 3600 \text{ s} \times 45 \times 24\right)^{1/2} = 0.88 \text{ m}$$

**讨论：**土壤的热物性参数受许多因素的影响，也与各地的地质条件有关，而本例计算结果的准确性在很大程度上取决于热扩散率之值。例如， $a$  值增加一倍，将使所需最小埋管深度增加  $41\%$ 。因此，与其他传热问题的计算一样，为了获得较准确的结果应尽量选用可靠的物性数据。还应指出，第一类边界条件下

半无限大物体非稳态导热只是本问题的一个较粗略的模型，因为地表的温度并不是均匀的，地表面温度阶跃性的变化也只是一种理想化的处理。考虑这些复杂因素时分析解已无能为力，应求助于数值计算。但作为一种工程估算，本题的结果仍有其参考意义。

### 3.5 简单几何形状物体多维非稳态导热的分析解

在多维导热问题中，几种简单几何形状物体的非稳态导热问题的分析解，可以用几个相应的一维非稳态导热分析解相乘得出，称为乘积解法（solution product method）。方形截面的二维柱体、短圆柱体以及立方体是这类几何形状物体的典型例子。本节中介绍获得无量纲温度场的乘积解法，重点是其应用（确定温度场及导热热量）。通过计算例题还可以进一步体会到采用拟合公式方法计算的优点。

#### 3.5.1 获得无量纲温度场的乘积解法

设有如图 3-15a、b、c 所示的三种固体。其中：图 a 所示为方形截面的二维导热物体，沿着  $z$  方向物体温度没有变化；图 b 所示为短圆柱体，物体温度在半径及轴向发生变化；图 c 所示是立方体，温度在三个坐标方向均改变。这三种固体在几何上可以分别看成是由两块平板、一块平板与一个圆柱以及三块平板相贯而成，如图 3-15d、e、f 所示。假设三个物体的初始温度都是均匀的，记为  $t_0$ ，然后与周围介质之间发生对流传热，流体温度为  $t_\infty$ ，表面传热系数为  $h$ 。在这样的条件下，三个固体中的无量纲温度场可以由其几何上的相贯体的一维分析解相乘而得：

$$\text{二维柱体} \quad \Theta = \frac{\theta(x, y, \tau)}{\theta_0} = \Theta_{p1}(x, \tau) \cdot \Theta_{p2}(y, \tau) \quad (3-40)$$

$$\text{短圆柱} \quad \Theta = \frac{\theta(x, r, \tau)}{\theta_0} = \Theta_p(x, \tau) \cdot \Theta_c(r, \tau) \quad (3-41)$$

$$\text{立方体} \quad \Theta = \frac{\theta(x, y, z, \tau)}{\theta_0} = \Theta_{p1}(x, \tau) \cdot \Theta_{p2}(y, \tau) \cdot \Theta_{p3}(z, \tau) \quad (3-42)$$

其中  $\Theta_p$ 、 $\Theta_c$  分别表示一维平板及圆柱在第三类边界条件下无量纲温度的分析解。以上三式就是适用于图 3-15 所示三种几何形状物体的乘积解法的表示式。

需要强调指出：乘积解法只适用于第三类边界条件，并且：（1）物体初始温度均匀；

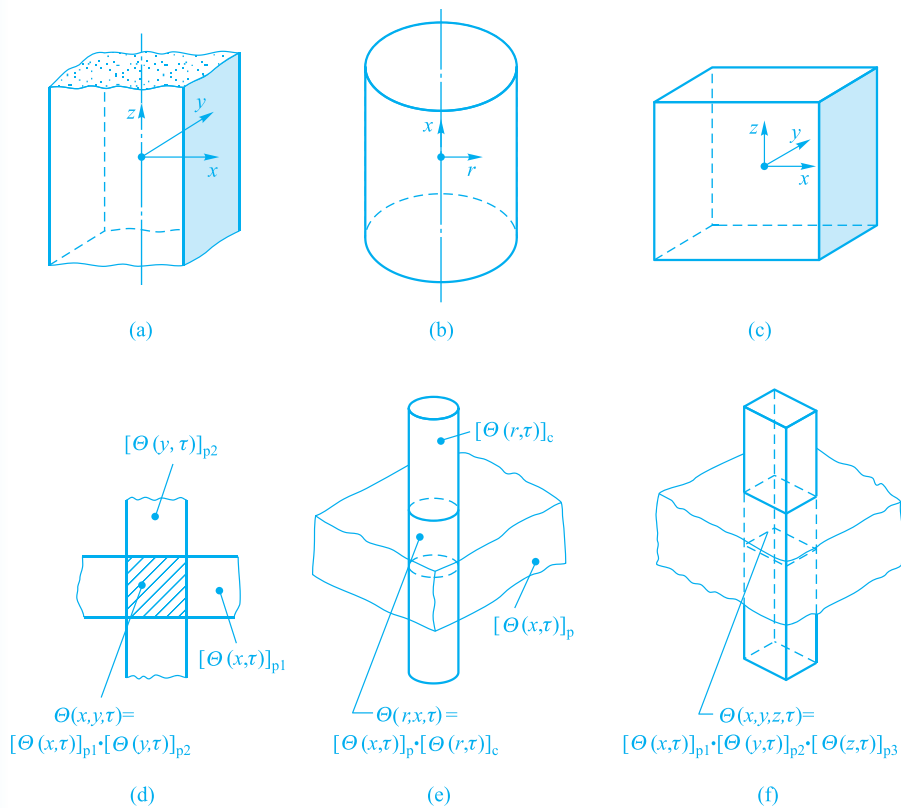


图 3-15 说明乘积解法的图示

(2) 周围介质温度均匀；(3) 表面传热系数均匀；(4) 常物性、没有内热源。对于表面传热系数为无限大的情形，即第一类边界条件，当然也是适用的。

### 3.5.2 导热量的计算

在 3.4 节中已经指出，为了获得非稳态导热过程从初始时刻到时刻  $\tau$  的导热量，可以首先计算该热量占非稳态导热过程总导热量的百分数，然后与从热平衡角度得出的总导热量相乘即可。所以，计算导热量的关键是要得出这个导热量的百分数。文献 [12] 证明，对于多维非稳态导热，导热量百分数也可以通过类似乘积解法的模式得出。假设  $\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1$ 、 $\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2$ 、 $\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_3$  分别是构成一个二维与三维非稳态导热物体的一维几何体的导热量百分数，则可有：

二维问题

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1 + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_1\right] \quad (3-43)$$

### 三维问题

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)_1 + \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)_2 \left[1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)_1\right] + \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)_3 \left[1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)_1\right] \left[1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)_2\right] \quad (3-44)$$

这个计算模式的结构便于记忆与应用。但要注意，这里给出的是百分数，或者说是无量纲导热热量，好像温度场分析解给出的是无量纲温度场一样。

**例题 3-8** 钢锭的尺寸为  $2\delta_1 = 0.5 \text{ m}$ 、 $2\delta_2 = 0.7 \text{ m}$ 、 $2\delta_3 = 1 \text{ m}$ ，钢锭的  $\lambda = 40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ， $a = 0.722 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ，求钢锭置入炉温为  $1200^\circ\text{C}$  的加热炉中  $4 \text{ h}$  后的最低温度与最高温度。其初温  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ ，取  $h = 348 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

**分析：**该问题的解可由三块相应的无限大平板的解得出。最低温度发生在钢锭的中心，即三块无限大平板中心截面的交点上，而最高温度则发生在钢锭的顶角上，即三块平板表面的公共点上。

**假设：**(1) 物性为常数；(2) 加热过程中表面传热系数为常数。

**计算：**设  $x$ 、 $y$ 、 $z$  分别表示与三个尺度相应的坐标轴方向，则有

$$Bi_x = \frac{h\delta_1}{\lambda} = \frac{348 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.25 \text{ m}}{40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 2.15$$

$$Fo_x = \frac{a\tau}{\delta_1^2} = \frac{0.722 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \times 4 \times 3600 \text{ s}}{(0.25 \text{ m})^2} = 1.66$$

$$Bi_y = \frac{h\delta_2}{\lambda} = \frac{348 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.35 \text{ m}}{40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 3.01$$

$$Fo_y = \frac{a\tau}{\delta_2^2} = \frac{0.722 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \times 4 \times 3600 \text{ s}}{(0.35 \text{ m})^2} = 0.849$$

$$Bi_z = \frac{h\delta_3}{\lambda} = \frac{348 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.5 \text{ m}}{40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 4.30$$

$$Fo_z = \frac{a\tau}{\delta_3^2} = \frac{0.722 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \times 4 \times 3600 \text{ s}}{(0.5 \text{ m})^2} = 0.416$$

采用拟合公式计算，

对平板 1：

$$\mu_1 = \left(0.4022 + \frac{0.9188}{2.15}\right)^{-1/2} = 1.0979 \text{ rad}$$

$$A = 1.0101 + 0.2575(1 - e^{-0.427 \times 2.15}) = 1.1648$$

平板中心处

$$\cos(\mu_1 \eta) = \cos 0^\circ = 1$$

平板表面处

$$\cos(\mu_1 \eta) = \cos \mu_1 = \cos 62.91^\circ = 0.4555$$

$$\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_x = 1.1648 \times \exp(-1.0979^2 \times 1.66) = 0.1574$$

$$\left(\frac{\theta_w}{\theta_0}\right)_x = 1.1648 \times \exp(-1.0979^2 \times 1.66) \times 0.4555 = 0.0717$$

对平板 2:

$$\mu_1 = \left(0.4022 + \frac{0.9188}{3}\right)^{-1/2} = 1.1881 \text{ rad}$$

$$A = 1.0101 + 0.2575(1 - e^{-0.4271 \times 3.01}) = 1.1961$$

平板中心处

$$\cos(\mu_1 \eta) = \cos 0^\circ = 1$$

平板表面处

$$\cos(\mu_1 \eta) = \cos 68.08^\circ = 0.3734$$

$$\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_y = 1.1961 \times \exp(-1.1881^2 \times 0.849) = 0.3608$$

$$\left(\frac{\theta_w}{\theta_0}\right)_y = 1.1961 \times \exp(-1.1881^2 \times 0.849) \times 0.3734 = 0.1347$$

对平板 3:

$$\mu_1 = \left(0.4022 + \frac{0.9188}{4.30}\right)^{-1/2} = 1.2742 \text{ rad}$$

$$A = 1.0101 + 0.2575(1 - e^{-0.4271 \times 4.30}) = 1.2266$$

平板中心处

$$\cos(\mu_1 \eta) = \cos 0^\circ = 1$$

平板表面处

$$\cos(\mu_1 \eta) = \cos 73.01^\circ = 0.2923$$

$$\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_z = 1.2266 \times \exp(-1.2742^2 \times 0.416) = 0.6243$$

$$\left(\frac{\theta_w}{\theta_0}\right)_z = 1.2266 \times \exp(-1.2742^2 \times 0.416) \times 0.2923 = 0.1825$$

据上述计算可得:

钢锭中心温度

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_x \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_y \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_z = 0.1574 \times 0.3608 \times 0.6243 = 0.03545$$

$$t_m = 0.03540\theta_0 + t_\infty = [0.03540 \times (20^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}) + 1200^\circ\text{C}] = 1158.3^\circ\text{C}$$

钢锭的顶角温度

$$\frac{\theta_w}{\theta_0} = \left(\frac{\theta_w}{\theta_0}\right)_x \left(\frac{\theta_w}{\theta_0}\right)_y \left(\frac{\theta_w}{\theta_0}\right)_z = 0.0716 \times 0.1344 \times 0.1821 = 0.00176$$

$$t = 0.00176\theta_0 + t_\infty = [0.00176 \times (20^\circ\text{C} - 1200^\circ\text{C}) + 1200^\circ\text{C}] = 1197.9^\circ\text{C}$$

讨论: 钢锭的中心温度及角顶温度显然是钢锭中的最低与最高温度, 钢锭的表面温度介于其间。试利用上面计算中已获得的数值计算此时钢锭三个表面的中心温度。

例题 3-9 一直径为 600 mm、长 1 000 mm 的钢锭, 初温为 30°C, 然后置于 1 300°C 的加热炉中。求置入加热炉内 4 h 后钢锭中心的温度。取表面传热系数的平均值  $h = 232 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 钢锭的导热系数

$\lambda = 40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 热扩散率  $a = 0.625 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

假设: (1) 物性为常数; (2) 加热过程中表面传热系数为常数。

计算:

$$\theta_m = (\theta_m)_p (\theta_m)_c$$

先讨论厚  $2\delta = 1\ 000 \text{ mm}$  的无限大平板:

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{232 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.5 \text{ m}}{40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 2.86$$
$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{0.625 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \times 4 \times 3\ 600 \text{ s}}{(0.5 \text{ m})^2} = 0.36$$

采用拟合公式计算:

$$\mu_1 = \left( 0.402\ 2 + \frac{0.918\ 8}{2.86} \right)^{-1/2} = 1.175\ 7 \text{ rad}$$
$$A = 1.010\ 1 + 0.257\ 5(1 - e^{-0.427\ 1 \times 2.86}) = 1.191\ 7$$
$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = 1.191\ 7 e^{-1.175\ 7^2 \times 0.36} = 0.724\ 5$$

对于  $2R = 600 \text{ mm}$  的无限长圆柱, 有:

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{232 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 0.30 \text{ m}}{40.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 1.72$$
$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{0.625 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s} \times 4 \times 3\ 600 \text{ s}}{(0.30 \text{ m})^2} = 1.0$$
$$\mu_1 = \left( 0.17 + \frac{0.434\ 9}{1.72} \right)^{-1/2} = 1.537\ 8 \text{ rad}$$
$$A = 1.004\ 2 + 0.587\ 7(1 - e^{-0.403\ 8 \times 1.72}) = 1.298\ 5$$
$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = 1.298\ 5 e^{-1.537\ 8^2 \times 1.0} = 0.122\ 0$$

短圆柱中心的温度为

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \left( \frac{\theta_m}{\theta_0} \right)_p \left( \frac{\theta_m}{\theta_0} \right)_c = 0.724\ 5 \times 0.122\ 20 = 0.088\ 4$$
$$t_m = 0.088\ 4\theta_0 + t_\infty = [0.088\ 4 \times (30^\circ\text{C} - 1\ 300^\circ\text{C}) + 1\ 300^\circ\text{C}] = 1\ 187.7^\circ\text{C}$$

讨论: 如果把这一钢锭作为无限长柱体处理, 则将得到

$$t_m = 0.122\ 0\theta_0 + t_\infty = [0.122\ 0 \times (30^\circ\text{C} - 1\ 300^\circ\text{C}) + 1\ 300^\circ\text{C}] = 1\ 145.1^\circ\text{C}$$

这说明短圆柱比无限长圆柱加热得快, 试分析其原因。

对于几何形状复杂的物体, 或几何形状虽不复杂但边界条件复杂的问题, 分析解法已无能为力。在这种情况下, 可以采用数值解法求解。由于近年来计算机应用的迅速发展, 数值解法越来越显示出其重要性, 下一章将专门予以介绍。

例题 3-10 有一直径  $D=4\text{ cm}$ 、高  $H=6\text{ cm}$  的牛肉柱体，初始温度为  $10^\circ\text{C}$ ，后置于环境温度为  $180^\circ\text{C}$  的炉中加热，表面传热系数为  $15\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K})$ 。问需经过多长时间牛肉的温度才至少达到  $80^\circ\text{C}$ ？在这一过程中牛肉吸收的热量是多少？

分析：牛肉的温度至少达到  $80^\circ\text{C}$  就是柱体的中心温度应该达到这一温度。

假设：（1）牛肉中大部分为水分，近似地用水的物性来估算；（2）牛肉柱体的各个表面同时受到加热；（3）以  $(10^\circ\text{C} + 80^\circ\text{C})/2 = 45^\circ\text{C}$  来确定从开始加热到中心温度为  $80^\circ\text{C}$  水的物理特性，按  $(10^\circ\text{C} + 180^\circ\text{C})/2 = 95^\circ\text{C}$  来决定计算总加热量的物性。

计算：（1）所需时间计算

由附录并插值得

$$\rho = 990.1\text{ kg}/\text{m}^3, c_p = 4.174\text{ kJ}/(\text{kg}\cdot\text{K})$$

$$\lambda = 64.2 \times 10^{-2}\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K}),$$

$$a = 15.5 \times 10^{-8}\text{ m}^2/\text{s}$$

采用坎坡的拟合公式计算。

（a）构成短圆柱的一维平板计算

$$Bi = \frac{h\delta}{\lambda} = \frac{15\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) \times 0.03\text{ m}}{64.2\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})} = 0.702$$

$$\mu_1^2 = \left( 0.4022 + \frac{0.9188}{0.702} \right)^{-1} = 0.5841$$

$$A = 1.0101 + 0.2575 \times [1 - \exp(-0.4271 \times 0.702)] = 1.0768$$

$$B = \frac{1.0063 + 0.3483 \times 0.702}{1 + 0.5475 \times 0.702} = 0.9036$$

$$\frac{\theta(0, \tau)}{\theta_0} = 1.0768 \exp(-0.5841 \times Fo_p)$$

$$\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = 1.0768 \exp(-0.5841 Fo_p) \times 0.9036 = 0.9730 \times \exp(-0.5841 Fo_p)$$

（b）构成短圆柱的一维圆柱

$$Bi = \frac{hR}{\lambda} = \frac{15\text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{K}) \times 0.02\text{ m}}{64.2\text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})} = 0.4676$$

$$\mu_1^2 = \left( 0.1700 + \frac{0.4349}{0.4676} \right)^{-1} = 0.9091$$

$$A = 1.0042 + 0.5877 \times [1 - \exp(-0.4038 \times 0.4676)] = 1.1053$$

$$B = \frac{1.0173 + 0.2574 \times 0.4676}{1 + 0.5983 \times 0.4676} = 0.8889$$

$$\frac{\theta(0, \tau)}{\theta_0} = 1.1053 \exp(-0.9091 Fo_c) \times 0.9967 = 1.1017 \exp(-0.9091 Fo_c)$$

$$\frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = 1.1053 \exp(-0.9091 Fo_c) \times 0.8889 = 0.9836 \exp(-0.5841 Fo_p)$$

故短圆柱的无量纲中心温度为

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_p \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_c = 1.0768 \exp(-0.5841 F_{o_p}) \times 1.1017 \exp(-0.9091 F_{o_c})$$

$$F_{o_p} = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{15.5 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s} \times \tau}{(0.03 \text{ m})^2} = 1.7222 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \times \tau$$

$$F_{o_c} = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{15.5 \times 10^{-8} (\text{m}^2/\text{s}) \tau}{(0.02 \text{ m})^2} = 3.8750 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \times \tau$$

代入并合并同类项得:

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = 1.1863 \exp(-4.5289 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1} \times \tau) = \frac{10}{17}$$

由此解得  $\tau = 154.9 \text{ s}$ 。

验算: 此时

$$F_{o_p} = 1.7222 \times 10^{-4} \times 154.9 = 0.2667 > 0.2$$

$$F_{o_c} = 3.8750 \times 10^{-4} \times 154.9 = 0.6002 > 0.2$$

(2) 牛肉吸收热量的计算

牛肉柱体的体积为

$$V = 0.785 D^2 H = 0.785 \times (0.04 \text{ m})^2 \times 0.06 \text{ m} = 7.536 \times 10^{-5} \text{ m}^3$$

将已经求出的所需时间代入, 得

$$\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)_p = 0.9730 \times \exp(-0.5841 \times 0.2667) = 0.8326$$

$$\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)_c = 0.9836 \times \exp(-0.5841 \times 0.6002) = 0.5693$$

故有

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = 1 - 0.8326 = 0.1674$$

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_c = 1 - \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} = 1 - 0.5693 = 0.4307$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_c \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p\right] = 0.1674 + 0.4307 \times (1 - 0.1674) = 0.5260$$

$$Q_0 = \rho c V (t_\infty - t_0) = 961.9 \text{ kg/m}^3 \times 4.21 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times 7.536 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \times (180 - 10)^\circ\text{C} \\ = 51.9 \text{ kJ}$$

$$Q = 0.5260 \times 51.9 \text{ kJ} = 27.3 \text{ kJ}$$

讨论: (1) 由于涉及的温度变化范围 ( $10 \sim 80^\circ\text{C}$  和  $10 \sim 180^\circ\text{C}$ ) 较大, 应该考虑热物性与温度有关, 所以计算从  $10^\circ\text{C} \rightarrow 80^\circ\text{C}$  以及从  $10^\circ\text{C} \rightarrow 180^\circ\text{C}$  计算热物性所根据的温度不同; (2) 在计算所需时间的乘积过程中, 利用指数相加的特点立即可以得出结果。如果采用海斯勒图, 这里只能采用迭代法, 即先假定一个时间, 利用乘积解法得出温度, 如果得出的值与给定条件不符, 则修正假定, 直到满足所需的精度为止。利用拟合公式在计算多维问题达到某个温度所需的时间时, 不必进行迭代, 是其一大优点。

### \*3.5.3 二维问题乘积解法的证明

下面以无限长方柱体（即其截面为长方形的柱体）的非稳态导热问题为例来作分析。这是一个二维问题。截面尺寸为  $2\delta_1 \times 2\delta_2$  的方柱体可以看成是两块厚度分别为  $2\delta_1$  及  $2\delta_2$  的无限大平板垂直相交所截出的物体。讨论的目的是要找出这个二维温度场与两块无限大平板的温度场的关系。

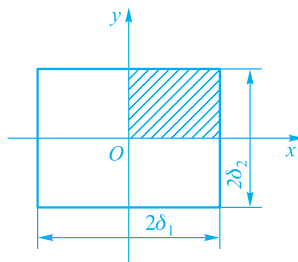


图 3-16 分析方柱体中温度分布时的坐标选取

方柱体的截面如图 3-16 所示，设方柱体的初始温度为  $t_0$ ，过程开始时被置于温度为  $t_\infty$  的流体中，表面与流体间的表面传热系数为  $h$ 。试求其温度场。

取截面中心为坐标轴的原点，如图 3-16 所示。鉴于温度场的对称性，只需要考察图中有阴影线的四分之一截面就够了。截面上的无量纲温度分布  $H(x, y, \tau)$  由下列导热微分方程和定解条件规定：

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) \quad (3-45)$$

$$\Theta(x, y, 0) = 1 \quad (3-46)$$

$$\Theta(\delta_1, y, \tau) + \frac{\lambda}{h} \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1} = 0 \quad (3-47a)$$

$$\Theta(x, \delta_2, \tau) + \frac{\lambda}{h} \frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=\delta_2} = 0 \quad (3-47b)$$

$$\frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3-47c)$$

$$\frac{\partial \Theta(x, y, \tau)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (3-47d)$$

式中

$$\Theta = \frac{t(x, y, \tau) - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{\theta}{\theta_0}$$

为无量纲过余温度。

如果无量纲过余温度  $\Theta_x(x, \tau)$  及  $\Theta_y(y, \tau)$  分别是处于与方柱体同样定解条件下的厚度分别为  $2\delta_1$  及  $2\delta_2$  的无限大平板的分析解，那么它们必须分别满足各自的导热微分方程及定解条件，即

$$\frac{\partial \Theta_x}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} \quad (\text{a})$$

$$\Theta_x(x, 0) = 1 \quad (\text{b})$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_x(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (\text{c})$$

$$\Theta_x(\delta_1, \tau) + \frac{\lambda}{h} \left. \frac{\partial \Theta_x(x, \tau)}{\partial x} \right|_{x=\delta_1} = 0 \quad (\text{d})$$

及

$$\frac{\partial \Theta_y}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \quad (\text{e})$$

$$\Theta_y(y, 0) = 1 \quad (\text{f})$$

$$\left. \frac{\partial \Theta_y(y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (\text{g})$$

$$\Theta_y(\delta_2, \tau) + \frac{\lambda}{h} \left. \frac{\partial \Theta_y(y, \tau)}{\partial y} \right|_{y=\delta_2} = 0 \quad (\text{h})$$

现在来证明，这两块无限大平板分析解的乘积就是上述无限长方柱体的解，即

$$\Theta(x, y, \tau) = \Theta_x(x, \tau) \Theta_y(y, \tau) \quad (3-48)$$

先证明式(3-48)满足导热微分方程式(3-45)。为此，将式(3-48)分别代入式(3-45)的左、右端，得：

$$\text{左端} \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial (\Theta_x \cdot \Theta_y)}{\partial \tau} = \Theta_x \frac{\partial \Theta_y}{\partial \tau} + \Theta_y \frac{\partial \Theta_x}{\partial \tau}$$

$$\text{右端} \quad a \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \right) = a \left( \Theta_y \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} + \Theta_x \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \right)$$

将左端减去右端，得

$$\begin{aligned} & \Theta_x \frac{\partial \Theta_y}{\partial \tau} + \Theta_y \frac{\partial \Theta_x}{\partial \tau} - a \left( \Theta_y \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} + \Theta_x \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \right) \\ &= \Theta_x \left( \frac{\partial \Theta_y}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \Theta_y}{\partial y^2} \right) + \Theta_y \left( \frac{\partial \Theta_x}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 \Theta_x}{\partial x^2} \right) \\ &= \Theta_x \times 0 + \Theta_y \times 0 = 0 \end{aligned}$$

这就证明了  $\Theta_x(x, \tau) \Theta_y(y, \tau)$  满足式(3-45)。

$\Theta_x(x, \tau) \Theta_y(y, \tau)$  也满足初始条件式 (3-46)。因为, 据式 (b) 及式 (f) 可得

$$\Theta_x(x, 0)\Theta_y(y, 0)=1 \times 1=1$$

最后来证明式 (3-48) 也满足边界条件式 (3-47a) ~ (3-47d)。将式 (3-48) 代入式 (3-47a) 左端, 并注意到式 (d) 的关系得

$$\begin{aligned} & \Theta_x(\delta_1, \tau)\Theta_y(y, \tau) + \Theta_y(y, \tau) \frac{\lambda}{h} \frac{\partial \Theta_x(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1} \\ &= \Theta_y(y, \tau) \left[ \Theta_x(\delta_1, \tau) + \frac{\lambda}{h} \frac{\partial \Theta_x(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=\delta_1} \right] \\ &= \Theta_y(y, \tau) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

同样可以证明它也满足式 (3-47b)。再将式 (3-48) 代入式 (3-47c) 左端, 并注意到式 (c) 的关系得

$$\frac{\partial \Theta_x(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=0} \Theta_y(y, \tau) = 0 \times \Theta_y(y, \tau) = 0$$

类似地也可证明它也满足式 (3-47d)。

至此已经证明:  $\Theta_x(x, \tau) \Theta_y(y, \tau)$  确实是上述无限长方柱体导热微分方程的解。

同理可以证明: 对于短圆柱体、短方柱体等二维、三维的非稳态导热问题, 都可以用相应的二个或三个一维问题的解的乘积来表示其温度分布。

### \*3.6 非傅里叶导热问题简介

傅里叶导热定律实际上是基于热扰动的传递速度是无限大的假定之上的。对一般的工程技术中发生的非稳态导热问题, 温度不是很低, 热流密度不是很高、过程作用的时间足够长、过程发生的尺度范围也足够大, 傅里叶导热定律以及基于该定律而建立起来的导热微分方程是完全适用的。

对于下列四种情形, 傅里叶导热定律及导热微分方程是不适用的:

(1) 当导热物体的温度接近绝对零度时。早在 20 世纪 40 年代实验就查明在 1.4 K 的液态氦中热波 (热扰动) 传递的速度只有 19 m/s, 比液氦中的音速小一个数量级<sup>[13]</sup>。

(2) 当过程的作用时间极短, 与材料本身固有的时间尺度相接近时。每一种材料都有

一个固有的时间尺度，这个时间尺度称为松弛时间，或弛余时间（relaxation time）。它反应了在物体的微元体积内为建立起平衡状态所需的时间间隔，表 3-5 中给出了部分材料松弛时间的估计值<sup>[14]</sup>。极短时间的激光脉冲加工就可能属于这种情形。

(3) 当过程发生的空间尺度极小，与微观粒子的平均自由行程相接近时。例如，对于通过气层的导热，当气层所在空间的尺度与气体分子的平均自由程接近时，傅里叶定律就不再适用。大量实验证实，通过厚度为纳米级别的薄膜的导热，薄膜的导热系数明显低于常规尺度材料的数值，掌握这种现象的规律对大规模集成电路的制造非常重要。

(4) 在极高的热流密度（例如  $10^{10} \text{ W/m}^2$  以上）下即使稳态导热也会出现傅里叶导热定律不适用的情况，一般发生在纳米技术领域。

基于傅里叶导热定律而导出的导热微分方程数学上属于抛物型方程，物理上意味着热扰动的传递速度是无限的；考虑热扰动传递速度为有限时得到的方程是双曲型方程（波动方程）。

凡是傅里叶导热定律不适用的导热问题统称为非傅里叶导热（Non-Fourier heat conduction），对这类导热问题的研究是近代微米纳米传热学（Micro and nano heat transfer）的一个重要内容。

表 3-5 部分材料的松弛时间估计值

材料类型	材料名称	松弛时间 /s
金属	铜 (Cu)	$2.7 \times 10^{-14}$
	银 (Ag)	$4.1 \times 10^{-14}$
	金 (Au)	$2.9 \times 10^{-14}$
	镍 (Ni)	$1 \times 10^{-14}$
	铬 (Cr)	$3 \times 10^{-15}$
	铅 (Pb)	$5 \times 10^{-15}$
不均匀物料	小玻璃球 (2 ~ 2.5 mm)	13.34
	沙子 (0.3 ~ 0.5 mm)	3.61
	CaCO <sub>3</sub> 颗粒 (1.3 ~ 1.6 mm)	8.59
	处理过的肉类	15.5

例题 3-11 有一半无限大的物体，初始温度  $t_0 = 25^\circ\text{C}$ ，后其表面温度突然上升到  $50^\circ\text{C}$  并保持不变。试计算使表面的扰动传递到  $x = 0.01 \text{ m}$ 、 $0.1 \text{ m}$ 、 $1.0 \text{ m}$  及  $10 \text{ m}$  等四个地点，且使该处发生  $0.1^\circ\text{C}$  温度变化所需

要的时间。 $a = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

### 题解

分析：上面已指出，傅里叶导热定律是基于热扰动的传递速度是无限大的假定，而实际物体中热扰动的传递又是以有限速度进行的。这样两个看起来是矛盾的概念在处理一般工程导热问题时又是如何统一的呢？本例就是为回答这样一个问题而专门设计的。

计算：上述四个地点温度升高  $0.1^\circ\text{C}$  后有

$$\frac{t_w - t(x)}{t_w - t_0} = \frac{50^\circ\text{C} - 25.1^\circ\text{C}}{50^\circ\text{C} - 25.0^\circ\text{C}} = 0.996$$

利用双精度数据对误差函数作数值积分后得  $\eta = 2.0352$  时  $\text{erf } \eta = 0.9960006$ 。由此得

$$\frac{x}{2\sqrt{a\tau}} = 2.0352$$

即

$$\tau = \frac{x^2}{4.0704^2 a}$$

对四个地点的计算结果如下：

$x/\text{m}$	0.01	0.1	1.0	10
$\tau/\text{s}$	0.6036	60.357	6035.67	603567

讨论：根据误差函数的性质， $\eta \rightarrow \infty$  时  $\text{erf } \eta \rightarrow 1$ ， $\eta$  为有限大小时  $\text{erf } \eta$  之值总小于 1。于是，由式 (3-35) 可见，一旦物体表面上发生一个热扰动，无论经历多么短的一段时间 ( $\tau$  很小)，无论在离开表面多么远的地点 ( $x$  很大)，该处总能感受到表面上的变化 ( $\theta/\theta_0 < 1$ )，这就意味着热扰动的传播速度是无限的。实际上，傅里叶导热定律及导热微分方程式正是基于热量扩散的速度是无限大的假定。对大多数工程导热问题，这一假定是可以接受的。因为本例的计算表明，虽然式 (3-35) 的导出是基于热量扩散的速度是无限大的假设，但要使离开表面一定距离处产生有限大小的温度变化则仍需要一定时间，而且离开表面的距离越远，所需的时间越长，这好像热量的扩散是以“有限的速度”进行的。从一般工程检测而言， $0.1^\circ\text{C}$  是可以分辨出来的温度变化，所以本题中取此值进行计算。因此，本书中所讨论的导热问题的基本方程虽是基于热量扩散的速度是无限大的假定，但在解释热扩散率的物理意义 (2.2 节) 及傅里叶导热定律的物理意义 (3.2 节) 时，仍然是从热量扩散的速度是有限的这一角度出发的，其理由也就在于此。

## 本章小结与应用

### 1. 本章小结

当遇到一个工程非稳态导热问题时，建议按照以下步骤进行求解：

(1) 如果物体的形状复杂而且需要获得物体中的温度随时间变化的详细的信息，例如要确定发动机转子和气缸壁中的温度在启动过程中的分布及变化，以计算金属中由于温度不均匀而引起热应力，则应求助于数值计算的方法。其主要思想将在下一章中介绍。

(2) 如果物体的形状相对比较简单, 或者允许作一定的近似处理, 则可考虑采用分析解的方法。对此类问题, 首先要尽可能确切地决定非稳态导热物体的热边界条件。在许多情形下, 导热物体的边界热作用可以由第三类边界条件近似描述, 这时获取比较准确的表面传热系数的数值对于解的准确性具有重要意义。本书第 5 ~ 7 章将对此进行详细讨论。

(3) 对于在整个非稳态导热过程中表面传热系数有相当大变化的情形, 作为计算的第一步可以取其平均值来计算。进一步的方法是将非稳态过程分为几个时段, 每一个时段中表面传热系数取为常数。这样的处理往往带有迭代的性质。

(4) 对第三类边界条件的问题, 可以采用以下解题策略:

1) 首先尝试集中参数法, 计算  $Bi$  数 (其中可以用  $V/F$  作为特征尺度)。如果  $Bi < 0.1$ , 则就采用集中参数法。

2) 如果  $Bi > 0.1$ , 则计算  $Fo$  数。如果  $Fo < 0.05 \sim 0.06$ , 则可将导热物体看成是半无限大的物体, 采用式 (3-37) 计算物体中的温度。

3) 如果  $Bi > 0.1$ ,  $0.06 < Fo < 0.2$ , 则对可以作为一维问题处理的导热物体, 需采用完全的级数解。注意, 求解多维问题的乘积解法对于非稳态导热的初始阶段也是适用的。

4) 如果  $Bi > 0.1$ ,  $Fo > 0.2$ , 则可采用正规状况阶段的简化解法。建议采用拟合公式 (3-33) 进行计算。

## 2. 本章应用举例

### 例题 3-12 热电偶的时间常数。

在脉管制冷机、斯特林制冷机等工程技术领域中, 工作介质 (气体) 速度的方向发生交替变化, 流体温度发生周期性脉动, 这种流动称为交变流动 (oscillating flow)。假定在以空气为介质的交变流动中, 空气在一个周期内的平均温度为 303 K, 脉动的频率为 5 Hz, 现用铜 - 康铜热电偶来测定气流温度随时间的变化。气体流速为 20 m/s, 热电偶热结点直径  $d = 0.9$  mm, 热结点的物理性质为  $\rho = 8\,332$  kg/m<sup>3</sup>、 $c_p = 188$  J/(kg·K)、 $\lambda = 51$  W/(m·K)。试问这样的热电偶是否能达到要求?

#### 题解

分析: 要测定脉动频率为 5 Hz (脉动周期为 0.2 s) 的气流温度, 则热电偶本身的时间常数必须远小于 0.2 s 方可测得较准确的数值。因此, 本题的计算目的是要确定所给定条件下热电偶的时间常数。

假定: (1) 热结点是一个孤立的球体, 不考虑与热结点相连接导线的影响; (2) 热结点与空气间的表面传热系数可以用流体与球体间的对流传热计算式来确定 (这里应用第 6 章中的公式); (3) 不计热结点与周围环境间的辐射传热。

计算: 303 K 空气的热物性为  $\nu = 16.0 \times 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s、 $\lambda = 2.67 \times 10^{-2}$  W/(m·K)、 $Pr = 0.701$  (普朗特数, 反映流体热物性的影响)。来流的  $Re$  数

$$Re = \frac{u_{\infty} d}{\nu} = \frac{20 \text{ m/s} \times 9 \times 10^{-4} \text{ m}}{16.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}} = 1125$$

小球的平均表面传热系数可按下式计算：

$$\begin{aligned} \frac{hd}{\lambda_f} &= 2 + (0.4Re^{1/2} + 0.06Re^{2/3})Pr^{2/5} \\ &= 2 + (0.4 \times 1125^{1/2} + 0.06 \times 1125^{2/3}) \times 0.701^{2/5} \\ &= 2 + 17.2 = 19.3 \\ h &= \frac{19.3 \times 26.7 \times 10^{-2} \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})}{9 \times 10^{-4} \text{ m}} = 591 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \\ Bi &= \frac{hd}{\lambda} = \frac{591 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 9 \times 10^{-4} \text{ m}}{51 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 0.01 \end{aligned}$$

满足采用集中参数法的条件。所以

$$\tau_c = \frac{\rho c V}{Ah} = \frac{8332 \text{ kg}/\text{m}^3 \times 188 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times 4.5 \times 10^{-4} \text{ m}}{591 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}) \times 3} = 1.19 \text{ s}$$

讨论：此值大于温度的脉动周期，因此该直径的热电偶无法测定这一交变流动的温度随时间的变化。需要将直径减小到多大才能满足要求留给读者在习题中去完成。

### 例题 3-13 电熨斗烫衣料。

用电熨斗来烫平一块厚的衣料。熨斗表面的热流密度  $q_0 = 2 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2$ ，衣料的初始温度为  $20^\circ\text{C}$ ，热扩散率  $a = 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ ，导热系数  $\lambda = 0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。该衣料的烫焦温度为  $180^\circ\text{C}$ 。如果熨斗连续在衣料表面上同一地点放置  $30 \text{ s}$ ，问衣料表面以及其下  $3 \text{ mm}$  处的温度是多少？

分析：此题可以采用第二类边界条件的半无限大物体的简化模型来分析。

假设：（1）熨斗放在衣料上后该处仍然保持原有的形状；（2）熨斗的热量全部传到衣料中；（3）常物性。

计算：计算  $30 \text{ s}$  后衣料表面及其下  $3 \text{ mm}$  处的温度

$$t(0, \tau) = t_0 + \frac{2q_0 \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}}}{\lambda} = 20^\circ\text{C} + \frac{2 \times 2 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2 \times (10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \times 30 \text{ s}/3.14)^{1/2}}{0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} = 215.5^\circ\text{C}$$

对  $x = 3 \text{ mm}$ 、 $\tau = 30 \text{ s}$ ，有

$$\frac{x^2}{4a\tau} = \frac{(3 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \times 30 \text{ s}} = 0.75$$

$$\begin{aligned} t(x, \tau) &= t_0 + \frac{2q_0 \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}}}{\lambda} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) - \frac{q_0 x}{\lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) \\ &= 20^\circ\text{C} + \frac{2 \times 2 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2 \times (10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \times 30 \text{ s}/3.14)^{1/2}}{0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} \times \exp(-0.75) - \\ &\quad \frac{2 \times 10^4 \text{ W}/\text{m}^2 \times 3 \times 10^{-3} \text{ m}}{0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})} \times \operatorname{erfc}\left(\frac{3 \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \times \sqrt{10^{-7} \text{ m}^2/\text{s} \times 30 \text{ s}}}\right) \\ &= 20^\circ\text{C} + 92.3^\circ\text{C} - 64.5^\circ\text{C} = 47.9^\circ\text{C} \end{aligned}$$

讨论：30 s 后衣料的表面温度已经超过烫焦的极限，但是 3 mm 以下处则不到 50℃，这是因为衣料的热扩散率极低之故。

例题 3-14 蔬菜罐头的蒸汽加热消毒。

一直径为 10 cm、高 8 cm 的蔬菜罐头，初始温度为 40℃，被置于饱和温度为 105℃的蒸汽中通过蒸汽凝结加热。问 80 min 后罐头中的最低温度及其所吸收的热量。

题解

分析：蒸汽凝结对流传热表面传热系数相当大，可以认为表面热阻为零，即  $Bi \rightarrow \infty$ ；罐头中的最低温度发生在罐头的中心。

假设：(1) 罐头四周均匀受热；(2) 蔬菜的物性取为水的值；(3) 罐头内为纯导热作用，没有对流；(4) 不计罐头金属包壳的影响。

计算：以  $(40 + 80)^\circ\text{C} / 2 = 60^\circ\text{C}$  计算物性有

$$\rho = 983.2 \text{ kg/m}^3, c_p = 4179 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}, \lambda = 65.9 \times 10^{-2} \text{ W/(m}\cdot\text{K)}, a = 16 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$$

对于 8 cm 厚的平板

$$Fo = \frac{a\tau}{\delta^2} = \frac{16.0 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s} \times 4800 \text{ s}}{(0.04 \text{ m})^2} = 0.48$$

对于 10 cm 直径的圆柱

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{16.0 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s} \times 4800 \text{ s}}{(0.05 \text{ m})^2} = 0.307$$

可以采用正规状况阶段的简化解，采用拟合公式法。

$$\text{对平板} \quad \mu_1^2 = \left( a + \frac{b}{Bi} \right)^{-1} = 0.4022^{-1} = 2.4863$$

$$A = a + b[1 - \exp(-cBi)] = 0.4022 + 0.9188 = 1.3210$$

$$B = \frac{a + cBi}{1 + bBi} = \frac{c}{b} = \frac{0.3483}{0.5475} = 0.6362$$

$$J_0(\eta) = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 = a = 0.9967$$

$$\left( \frac{\theta_m}{\theta_0} \right)_p = A \exp(-\mu_1^2 Fo) f(0) = 1.321 \times \exp(-2.4863 \times 0.48) \times 1.0000 = 0.400$$

$$\left( \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \right)_p = A \exp(-\mu_1^2 Fo) B = 1.321 \times \exp(-2.4863 \times 0.48) \times 0.6362 = 0.255$$

$$\left( \frac{Q}{Q_0} \right)_p = 1 - \left( \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \right)_p = 1 - 0.255 = 0.745$$

对于一维圆柱

$$\mu_1^2 = \left( a + \frac{b}{Bi} \right)^{-1} = 0.1700^{-1} = 5.8824$$

$$A = a + b[1 - \exp(-cBi)] = 1.0042 + 0.5877 = 1.5919$$

$$B = \frac{a + cBi}{1 + bBi} = \frac{c}{b} = \frac{0.2574}{0.5983} = 0.4302$$

$$J_0(\eta) = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 = a = 0.9967$$

$$\left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_c = A \exp(-\mu_1^2 Fo) f(0) = 1.5919 \times \exp(-5.8824 \times 0.307) \times 0.9967 = 0.261$$

$$\left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)_c = A \exp(-\mu_1^2 Fo) B = 1.5919 \times \exp(-5.8824 \times 0.307) \times 0.4302 = 0.113$$

$$\left(\frac{Q}{Q_0}\right)_c = 1 - \left(\frac{\bar{\theta}}{\theta_0}\right)_c = 1 - 0.113 = 0.887$$

蔬菜罐头

$$\frac{\theta_m}{\theta_0} = \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_p \left(\frac{\theta_m}{\theta_0}\right)_c = 0.400 \times 0.261 = 0.1044$$

$$\frac{t_m - t_\infty}{t_0 - t_\infty} = \frac{t_m - 105^\circ\text{C}}{40^\circ\text{C} - 105^\circ\text{C}} = 0.1044, \quad t_m = 98.1^\circ\text{C}$$

$$\frac{Q}{Q_0} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p + \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_c \left[1 - \left(\frac{Q}{Q_0}\right)_p\right] = 0.745 + 0.887 \times (1 - 0.745) = 0.9712$$

仍然以  $60^\circ\text{C}$  的物性值计算  $Q_0$ , 则有

$$Q = 0.9712 \times 983.2 \text{ kg/m}^3 \times 4179 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \times 3.14 \times (0.05 \text{ m})^2 \times 0.08 \text{ m} \times (105 - 40) \text{ K} \\ = 162.9 \text{ kJ}$$

讨论: 分析解是对常物性问题作出的, 实际物体的物理性质多少与温度有关。但只要物性数值变化不是太大, 取某个平均温度 [ 这样的温度称为定性温度 (reference temperature) ] 下的物性进行计算一般足够准确。上例中, 如果计算  $Q_0$  的温度取为  $70^\circ\text{C}$ ,  $\rho = 977.7 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_p = 4187 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , 则所得之值相差仅 0.4%, 完全在工程计算允许的误差范围内。因此原设定性温度  $60^\circ\text{C}$  有效, 不必更新再计算。

## | 复 习 题 |

1. 试说明集中参数法的物理概念及数学上处理的特点。
2. 在用热电偶测定气流的非稳态温度场时, 怎样才能改善热电偶的温度响应特性?
3. 试说明“一维”平板的物理概念, 并举出一、二个可以按一维平板处理的非稳态导热问题。
4. 什么叫非稳态导热的正规状况阶段或充分发展阶段? 这一阶段在物理过程及数学处理上都有一些什么特点?
5. 有人认为, 当非稳态导热过程经历时间很长时, 采用图 3-7 计算所得的结果是错误的。理由是: 这个图表明, 物体中各点的过余温度的比值仅与几何位置及  $Bi$  有关, 而与时间无关。但当时间趋于无限大时, 物体中各点的温度应趋近流体温度, 所以两者是有矛盾的。你是否同意这种看法, 说明你的理由。
6. 试说明  $Bi$  数的物理意义。 $Bi \rightarrow 0$  及  $Bi \rightarrow \infty$  各代表什么样的换热条件? 有人认为,  $Bi \rightarrow 0$  代表了绝热工况, 你是否赞同这一观点, 为什么?
7. 什么是非稳态导热问题的乘积解法, 它的使用条件是什么?
8. 什么是“半无限大”的物体? 半无限大物体的非稳态导热存在正规状况阶段吗?
9. 冬天,  $72^\circ\text{C}$  的铁与  $600^\circ\text{C}$  的木材摸上去的感觉一样, 为什么?

10. 本章的讨论都是对物性为常数的情形作出的, 对物性是温度函数的情形, 你认为应怎样获得其非稳态导热的温度场?

11. 图 3-7 表明当  $Bi$  足够大时, 三种几何形状的  $\mu_1$  均为常数, 这代表了什么样的导热工况?

## | 习 题 |

### 基本概念及定性分析

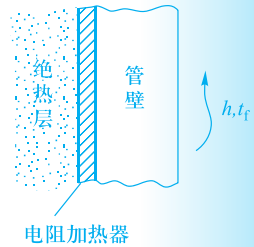
3-1 设有五块厚 30 mm 的无限大平板, 各用银、铜、钢、玻璃及软木做成, 初始温度均匀且为  $20^\circ\text{C}$ , 两个侧面突然上升到  $60^\circ\text{C}$ , 试计算使中心温度上升到  $56^\circ\text{C}$  时各板所需的时间。五种材料的热扩散率依次为  $170 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $103 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $12.9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $0.59 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $0.155 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。由此计算你可以得出什么结论?

3-2 设一根长  $l$  的棒有均匀初始温度  $t_0$ , 此后使其两端各维持在恒定的温度  $t_1 (x=0)$  及  $t_2 (x=l)$ , 并且  $t_2 > t_1 > t_0$ 。棒的四周保持绝热。试画出棒中温度分布随时间变化的示意性曲线及最终的温度分布曲线。

3-3 假设把汽轮机的汽缸壁及其外的绝热层近似地看成是两块紧密接触的无限大平板 (绝热层厚度大于汽缸壁), 试定性地画出汽轮机从冷态启动 (即整个汽轮机均与环境处于热平衡) 后缸壁及绝热层中的温度分布随时间的变化。

3-4 在一内部流动的对流传热试验中 (见附图), 用电阻加热器产生热量加管道内的流体, 电加热功率为常数, 管道可以当作平壁对待。试画出在非稳态加热过程中系统中的温度分布随时间的变化 (包括电阻加热器、管壁及被加热的管内流体)。画出典型的四个时刻: 初始状态 (未开始加热时)、稳定状态及两个中间状态。

3-5 现代微波炉加热物体的原理是利用高频电磁波使物体中的分子极化从而产生振荡, 其结果相当于物体中产生了一个接近于均匀分布的内热源, 而一般的烘箱则是从物体的表面上进行接近恒热流的加热。设把一块牛肉当作厚  $2\delta$  的无限大平板, 试定性地画出采用微波炉及烘箱对牛肉加热 (从室温到最低温度为  $85^\circ\text{C}$ ) 过程中牛肉中的温度分布曲线 (加热开始前、加热过程中某一时刻及加热终了三个时刻)。



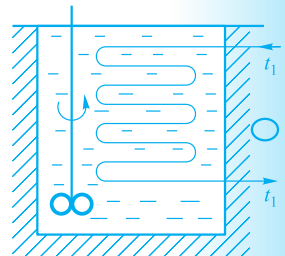
习题 3-4 附图

### 集中参数法分析

3-6 一初始温度为  $t_0$  的固体, 被置于室温为  $t_\infty$  的房间中。物体表面的发射率为  $\varepsilon$ , 表面与空气间的表面传热系数为  $h$ 。物体的体积为  $V$ , 参与换热的面积为  $A$ , 比热容和密度分别为  $c$  及  $\rho$ , 物体的内热阻可略而不计, 试列出物体温度随时间变化的微分方程式。

提示: 物体单位面积上的辐射换热量为  $\varepsilon\sigma (T^4 - T_\infty^4)$ 。

3-7 如附图所示, 一容器中装有质量为  $m$ 、比热容为  $c$  的流体, 初始温度为  $t_0$ 。另一种流体在管内凝结放热, 凝结温度为  $t_1$ 。容器外壳绝热良好。容器中的流体因有搅拌器的作用而可认为任一时刻整个流体的温度都是均匀的。管内流体与容器中流体间的总传热系数  $k$  及传热面积  $A$  均为已知,  $k$  为常数。试导出开始加热后任一时刻  $\tau$  时容器中流体温度的计算式。



习题 3-7 附图

3-8 一具有内部加热装置的物体与空气处于热平衡。在某一瞬间，加热装置投入工作，其作用相当于强度为  $\Phi$  的内热源。设物体与周围环境的表面传热系数为  $h$  (常数)，内热阻可以忽略，其他几何、物性参数均已知，试列出其温度随时间变化的微分方程式并求解之。

3-9 一热电偶的  $\rho c l / A$  之值为  $2.094 \text{ kJ} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，初始温度为  $20^\circ\text{C}$ ，后将其置于  $320^\circ\text{C}$  的气流中。试计算在气流与热电偶之间的表面传热系数为  $58 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$  及  $116 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$  的两种情形下热电偶的时间常数，并画出两种情形下热电偶读数的过余温度随时间变化的曲线。

3-10 一热电偶的热接点可近似地看成为球形，初始温度为  $25^\circ\text{C}$ ，后被置于温度为  $200^\circ\text{C}$  的气流中。问欲使热电偶的时间常数  $\tau_c = 1 \text{ s}$ ，热接点的直径应为多大？已知热接点与气流间的表面传热系数为  $350 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。热接点的物性为  $\lambda = 20 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K})$ 、 $c = 400 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ 、 $\rho = 8500 \text{ kg} / \text{m}^3$ 。如果气流与热接点之间还有辐射传热，对所需的热接点直径之值有何影响？热电偶引线的影响略而不计。

3-11 一根裸露的长铜导线处于温度为  $t_\infty$  的空气中。试导出当导线中通以恒定电流  $I$  后导线温度变化的微分方程式。设导线同一截面上的温度是均匀的，导线的周长为  $P$ ，截面积为  $A_c$ 。比热容为  $c$ ，密度为  $\rho$ ，电阻率为  $\rho_e$ ，与环境的表面传热系数为  $h$ ，长度方向的温度变化略而不计。若已知导线的质量为  $3.45 \text{ g} / \text{m}$ ， $c = 460 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ ，电阻值为  $3.63 \Omega / \text{m}$ ，电流为  $8 \text{ A}$ ，试确定导线刚通电瞬间的温升率。

3-12 一块单侧表面积为  $A$ 、初温为  $t_0$  的平板，一侧表面突然受到恒定热流密度  $q_0$  的加热，另一侧表面则受温度为  $t_\infty$  的气流冷却，表面传热系数为  $h$ 。试列出物体温度随时间变化的微分方程式并求解之。设内热阻可以不计，其他的几何、物性参数均已知。

3-13 一块厚  $20 \text{ mm}$  的钢板，加热到  $500^\circ\text{C}$  后置于  $20^\circ\text{C}$  的空气中冷却，设冷却过程中钢板两侧面的平均表面传热系数为  $35 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，钢板的导热系数为  $45 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K})$ ，热扩散率为  $1.37 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$ 。试确定使钢板冷却到与空气相差  $10^\circ\text{C}$  时所需的时间。

3-14 一含碳量约  $0.5\%$  的曲轴，加热到  $600^\circ\text{C}$  后置于  $20^\circ\text{C}$  的空气中回火。曲轴的质量为  $7.84 \text{ kg}$ ，表面积为  $870 \text{ cm}^2$ ，比热容为  $418.7 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ ，密度为  $7840 \text{ kg} / \text{m}^3$ ，导热系数可按  $300^\circ\text{C}$  查取，冷却过程的平均表面传热系数取为  $29.1 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。问经多长时间后曲轴可冷却到与空气相差  $10^\circ\text{C}$ 。

3-15 一种火焰报警器采用低熔点的金属丝作为传感元件，当该导线受火焰或高温烟气的作用而熔断时报警系统即被触发。一报警系统导线的熔点为  $500^\circ\text{C}$ ， $\lambda = 210 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K})$ ， $\rho = 7200 \text{ kg} / \text{m}^3$ ， $c = 420 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ ，初始温度为  $25^\circ\text{C}$ 。问当它突然受到  $650^\circ\text{C}$  烟气加热后，为在  $1 \text{ min}$  内发出报警信号，导线直径应限制在多大以下？设复合换热的表面传热系数为  $12 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

3-16 在热处理工艺中，用银球试样来测定淬火介质在不同条件下的冷却能力。今有两个直径为  $20 \text{ mm}$  的银球，加热到  $650^\circ\text{C}$  后被分别置于  $20^\circ\text{C}$  的盛有静止水的大容器及  $20^\circ\text{C}$  的循环水中。用热电偶测得，当银球中心温度从  $650^\circ\text{C}$  变化到  $450^\circ\text{C}$  时，其降温速率分别为  $180^\circ\text{C} / \text{s}$  及  $360^\circ\text{C} / \text{s}$ 。试确定两种情况下银球表面与水之间的表面传热系数。已知在上述温度范围内银的物性参数为  $\rho = 10500 \text{ kg} / \text{m}^3$ 、 $c = 262 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ 、 $\lambda = 360 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K})$ 。

3-17 等离子喷镀是一种用以改善材料表面特性（耐腐蚀性、耐磨性等）的高新技术。陶瓷是常用的一种喷镀材料。喷镀过程大致如下：把陶瓷粉末注入温度高达  $10^4 \text{ K}$  的等离子气流中，在到达被喷镀的表面之前，陶瓷粉末吸收等离子气流的热量而迅速升温到熔点并完全熔化为液滴，然后冲击到被喷镀表面上后迅速凝固，形成一镀层。设氧化铝 ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) 粉末颗粒的直径  $D_p = 50 \mu\text{m}$ ，密度  $\rho = 3970 \text{ kg} / \text{m}^3$ ，导热系数  $\lambda = 11 \text{ W} / (\text{m} \cdot \text{K})$ ，比热容  $c = 1560 \text{ J} / (\text{kg} \cdot \text{K})$ ，这些粉末颗粒与气流间的表面传热系数为  $10000 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，粉末颗粒的熔点为  $2350 \text{ K}$ ，熔解潜热为  $3580 \text{ kJ} / \text{kg}$ 。试在不考虑颗粒的辐射热损失时确定从  $t_0 = 300 \text{ K}$  加热到其熔点所需的时间，以及从刚到达熔点直至全部熔为液滴所需的时间。

3-18 直径为  $1 \text{ mm}$  的金属丝置于温度为  $25^\circ\text{C}$  的恒温油槽中，其电阻值为  $0.01 \Omega / \text{m}$ ，设电流强度为

120 A 的电流突然流经此导线并保持不变, 导线表面与油之间的表面传热系数为  $550 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。问: 当导线温度稳定后其值为多少? 从通电开始瞬间到导线温度与稳定时之值相差  $1^\circ\text{C}$  所需的时间为多少? 设表面传热系数保持为常数, 导线的  $c = 500 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\rho = 8\,000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $\lambda = 25 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

### 一维非稳态导热

3-19 作为一种估算, 可以对汽轮机起动过程中汽缸壁的升温过程做以下近似分析: 把汽缸壁看成是一维的平壁, 起动前汽缸壁温度均匀并为  $t_0$ , 进入汽轮机的蒸汽温度与时间成线性关系, 即  $t_1 = t_0 + w\tau$ , 其中  $w$  为蒸汽升温速率。汽缸壁与蒸汽间的表面传热系数  $h$  为常数。汽缸壁外表面绝热良好。试对这一简化模型列出汽缸壁中温度的数学描写式。

3-20 在一无限大平板的非稳态导热过程中, 测得某一瞬间在板的厚度方向上的三点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  处的温度分别为  $t_A = 180^\circ\text{C}$ 、 $t_B = 130^\circ\text{C}$ 、 $t_C = 90^\circ\text{C}$ ,  $A$  与  $B$  及  $B$  与  $C$  各相隔  $1 \text{ cm}$ , 材料的热扩散率  $a = 1.1 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。试估计在该瞬间  $B$  点温度对时间的瞬时变化率。该平板的厚度远大于  $A$ 、 $C$  之间的距离。

3-21 有两块同样材料的平板  $A$  及  $B$ ,  $A$  的厚度为  $B$  的两倍, 从同一高温炉中取出置于冷流体中淬火。流体与各表面间的表面传热系数均可视为无限大。已知板  $B$  中心点的过余温度下降到初值的一半需要  $21 \text{ min}$ , 问  $A$  板达到同样温度工况需多少时间?

3-22 某一瞬间, 一无内热源的无限大平板中的温度分布可以表示成  $t = c_1x^2 + c_2$  的形式, 其中  $c_1$ 、 $c_2$  为已知的常数。试确定:

- (1) 此时刻在  $x = 0$  的表面处的热流密度;
- (2) 此时刻平板平均温度随时间的变化率, 物性已知且为常数。

3-23 一截面尺寸为  $10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$  的长钢棒 ( $18 \sim 20 \text{ Cr}/8 \sim 12 \text{ Ni}$ ), 初始温度为  $20^\circ\text{C}$ , 然后长边的一侧突然置于  $200^\circ\text{C}$  的气流中,  $h = 125 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 而另外三个侧面绝热。试确定  $6 \text{ min}$  后长边的另一个侧面中点的温度。钢棒的  $\rho$ 、 $c$ 、 $\lambda$  可近似地取用  $20^\circ\text{C}$  时之值。

3-24 一高  $H = 0.4 \text{ m}$  的圆柱体, 初始温度均匀, 然后将其四周曲面完全绝热, 而上、下底面暴露于气流中冷却, 气流与两底面间的表面传热系数均为  $50 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。圆柱体导热系数  $\lambda = 20 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 热扩散率  $a = 5.6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。试确定圆柱体中心过余温度下降到初值一半时所需的时间。

3-25 有一航天器, 重返大气层时壳体表面温度为  $1\,000^\circ\text{C}$ , 随即落入温度为  $5^\circ\text{C}$  的海洋中。设海水与壳体表面间的表面传热系数为  $1\,135 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 试问此航天器落入海洋  $5 \text{ min}$  后的表面温度是多少? 壳体壁面中的最高温度是多少? 壳体的厚度  $\delta = 50 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 56.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $a = 4.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , 其内侧面可认为是绝热的。

3-26 厚  $8 \text{ mm}$  的瓷砖被堆放在室外货场上, 并与  $-15^\circ\text{C}$  的环境处于热平衡。此后把它们搬入  $25^\circ\text{C}$  的室内。为了加速升温过程, 每块瓷砖被分散地搁在墙旁, 设此时瓷砖两面与室内环境的表面传热系数为  $4.4 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。为防止瓷砖脆裂需待其温度上升到  $10^\circ\text{C}$  以上才可操作, 问需等待多少时间? 已知瓷砖的  $\lambda = 1.1 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $a = 7.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 。如瓷砖厚度增加一倍, 其他条件不变, 问等待时间又为多少?

3-27 汽轮机在起动一段时间后, 如果蒸汽速度保持匀速上升, 则汽缸壁中的温度变化会达到或接近这样的工况: 壁中各点的温度对时间的偏导数既不随时间而异, 又不随地点而变 (称准稳态工况)。试对准稳态工况导出汽缸壁中最大温差的计算公式。

3-28 一块厚  $300 \text{ mm}$  的板状钢坯 (碳质量分数近似为  $0.5\%$ ) 的初温为  $20^\circ\text{C}$ , 送入温度为  $1\,200^\circ\text{C}$  的炉子里单侧加热, 不受热侧可近似地认为是绝热的。已知钢板的热扩散率  $a = 5.55 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。加热过程中平均表面传热系数为  $290 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 试确定加热到钢板表面温度低于炉温  $15^\circ\text{C}$  时所需的时间以及此时钢板两表面间的温差。导热系数可按  $600^\circ\text{C}$  查附录。

3-29 一初始温度为  $t_0$ 、厚  $2\delta$  的无限大平板，其两表面的温度突然降低到  $t_w$ ，此后平板中各点的温度按下式计算：

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-[n\pi/(2\delta)]^2} \sin \frac{n\pi x}{2\delta}$$

$$\theta = t(x, \tau) - t_w, \theta_0 = t_0 - t_w$$

今有一厚为 3 cm 的平板， $t_0 = 150^\circ\text{C}$ ， $t_w = 30^\circ\text{C}$ ， $a = 2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，试用上式（仅取无穷级数的第一项）计算 1 min 后平板中间截面上的温度，并与海斯勒图及式（3-30）相比较。又，如取级数的前 4 项来计算，对结果有何影响？

3-30 火箭发动机的喷管在起动过程中受到高温（ $t_\infty = 2\ 300 \text{ K}$ ）燃气的加热，受材料限制其局部壁温不得大于 1 500 K。为延长运行时间，在喷管内壁喷涂了一层厚 10 mm 的陶瓷，其热物性参数为  $\lambda = 10 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 、 $a = 6 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，试对此情况下喷管能承受的运行时间作一保守的估计。设内表面与高温燃气间的表面传热系数为  $2\ 500 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，喷管的初始温度  $T_0 = 300 \text{ K}$ 。

3-31 一火箭发动机喷管，壁厚为 9 mm，初始温度为  $30^\circ\text{C}$ 。在进行静推力试验时，温度为  $1\ 750^\circ\text{C}$  的高温燃气送入该喷管，燃气与壁面间的表面传热系数为  $1\ 950 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。喷管材料的密度  $\rho = 8\ 400 \text{ kg}/\text{m}^3$ ， $c = 560 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ， $\lambda = 24.6 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。假设喷管因直径与厚度之比较大而可视为平壁，且外侧可作绝热处理，试确定：

- (1) 为使喷管的最高温度不超过材料允许温度  $1\ 000^\circ\text{C}$  而能允许的运行时间；
- (2) 在所允许时间的终了时刻，壁面中的最大温差；
- (3) 在上述时刻壁面中的平均温度梯度与最大温度梯度。

## 一维圆柱

3-32 对于一无内热源的长圆柱的非稳态导热问题，在某一瞬测得  $r = 2 \text{ cm}$  处温度的瞬时变化率为  $-0.5 \text{ K/s}$ 。试计算此时此处圆柱单位长度上的热流量沿半径方向的变化率，并说明热流密度矢量的方向。已知  $\lambda = 43 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ， $a = 1.2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

3-33 一根长黄铜柱，直径为 20 cm，初温为  $20^\circ\text{C}$ ，后被置于  $100^\circ\text{C}$  的流体中加热。问需要多大的表面传热系数才可使柱体中心温度在 10 min 内上升到  $80^\circ\text{C}$ ？黄铜的  $\rho$ 、 $c$ 、 $\lambda$  可按  $20^\circ\text{C}$  查表。

3-34 一根直径为 170 mm 的长轴，初始温度为  $17^\circ\text{C}$ ，后被置于炉温为  $850^\circ\text{C}$  的环境中。轴材料的导热系数为  $30 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，热扩散率为  $6.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，加热过程中的表面传热系数为  $141 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。试确定为使长轴的中心温度达到  $800^\circ\text{C}$  所需的时间以及该时刻钢轴表面的温度。

3-35 直径为 40 cm 的长轴在加热炉内加热到  $600^\circ\text{C}$ ，然后从炉内移出用吊车运往热加工车间进行加工。但当该长轴刚从炉内取出而其他材料已装入炉内后，吊车突然发生事故，致使该轴不得不暂时搁置在  $30^\circ\text{C}$  的环境中等候吊车修复。如果从工艺及运送的角度，轴的最低温度不得低于  $450^\circ\text{C}$ ，试问吊车必须在多长时间间隔内修复。假设不计长轴和搁架之间的导热，轴表面与环境间的表面传热系数为  $18.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，轴材料的  $\lambda = 22.3 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 、 $a = 8.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

3-36 将初温为  $30^\circ\text{C}$  的钢锭装入温度为  $1\ 400^\circ\text{C}$  的炉中加热，钢锭直径为 600 mm。试计算装炉后 2 h、3 h、4 h 及 5 h 等四个时刻钢锭表面及中心的温度，并画出时间 - 温度曲线。假设钢锭可视为一长圆柱体，其  $\lambda = 43.5 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 、 $a = 7.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ，加热过程中表面传热系数为  $290 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

3-37 一直径为 500 mm、高 800 mm 的钢锭，初始温度为  $30^\circ\text{C}$ ，被送入  $1\ 200^\circ\text{C}$  的炉子中加热。设各表面同时受热，且表面传热系数  $h = 180 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ，钢锭的  $\lambda = 40 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 、 $a = 8 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。试确

定 3 h 后在钢锭高 400 mm 处的截面上半径为 0.13 m 处的温度。

3-38 一直径为 30 mm 的长塑料棒,  $\lambda = 0.3 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $\rho c = 1\,050 \text{ kJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$ 。为压制成形的需要先在一炉内均匀加热。为获得最佳的成形结果, 该塑料棒的最低温度不得低于  $200^\circ\text{C}$ 。塑料棒从加热炉到成形机之间的运送时间为 3 min, 其间受温度为  $150^\circ\text{C}$  的保温仓的冷却, 表面传热系数为  $8.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。问塑料棒应在加热炉内加热到多高温度才能满足压制成形的要求?

3-39 有一耐热玻璃棒, 直径为 25 mm, 为改善其表面的机械特性, 在表面上涂了一层极薄的导热系数很大的金属层。在此金属涂层与芯棒之间平均存在有  $R_f = 0.10 \text{ m} \cdot \text{K}/\text{W}$  的热阻 (每米长度上的热阻)。该棒起初处于均匀温度 800 K, 然后突然被置于 300 K 的气流中冷却, 表面传热系数  $h = 120 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。试确定将该棒的中心温度降低到 500 K 所需的时间。玻璃棒物性参数为  $\rho = 2\,600 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c_p = 808 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 3.98 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

## 一维球

3-40 在温度为  $250^\circ\text{C}$  的烘箱中烤洋山芋, 设洋山芋可以看作直径 5 cm 的球, 初始温度为  $20^\circ\text{C}$ , 其物性可近似地取  $50^\circ\text{C}$  水的值。试估算烘烤 20 min 后洋山芋中心的温度。取表面传热系数为  $20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

3-41 一钢球, 直径为 10 cm, 初温为  $250^\circ\text{C}$ , 后将其置于温度为  $10^\circ\text{C}$  的油槽中冷却。设冷却过程中的表面传热系数可取为  $200 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 问欲使球心温度降低到  $150^\circ\text{C}$  要经过多长时间, 此时球表面的温度为多少? 球的导热系数  $\lambda = 44.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 热扩散率  $a = 1.229 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

3-42 在滚珠轴承表面硬化的热处理中, 希望把滚珠表面温度在很短的时间内升高到 1 000 K 左右, 而其内部温度没有明显上升。这可以通过把滚珠突然浸入温度达 1 300 K 的盐浴炉来实现。在盐浴中滚珠的表面传热系数高达  $5\,000 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。为使直径等于 20 mm、初温为 300 K 的滚珠在离开表面 1 mm 深的范围内均能得到硬化, 试估计需要浸入盐浴多少时间? 滚珠的  $\rho = 7\,800 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 500 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 50 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

3-43 磨光前, 为了消除光学透镜中的热应力需进行退火处理。设初温为  $30^\circ\text{C}$ 、半径为 0.15 m 的半球形玻璃被置于温度为  $410^\circ\text{C}$  的退火炉内, 其平面一侧与炉底接触, 可近似地认为是绝热的。球面的表面传热系数  $h = 10.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 玻璃的  $\rho = 2\,750 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 840 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 0.8 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。试确定 8 h 后半球内的最高温度。

3-44 冬天, 由于寒潮突然入侵使某地气温由  $10^\circ\text{C}$  突然下降到  $-5^\circ\text{C}$ 。该地有一片橘子林, 橘子表面一旦结霜就会损坏。假设橘子可近似地当作直径为 6 cm 的圆球来看待, 其物性  $\lambda$ 、 $a$  可按  $5^\circ\text{C}$  水的数值近似计算, 试确定为使橘子免受损坏而允许的寒潮气流连续时间。设橘子外表面与寒流间的表面传热系数为  $7 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。

3-45 一石头蓄热器用来储存太阳能, 所使用卵石的平均直径为 10 cm, 初始温度为  $20^\circ\text{C}$ 。从太阳能集热器来的平均温度为  $80^\circ\text{C}$  的热空气连续地流过卵石, 试计算 0.5 h 和 2 h 后卵石的中心温度, 及每立方米堆放体积的卵石的储热量。气流与卵石表面的表面传热系数为  $35 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 卵石的导热系数  $\lambda = 2.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 、热扩散率  $a = 1.13 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 、比热容  $c = 780 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

3-46 两个固体球 A、B 被加热到 600 K 后突然被置于温度恒为 300 K 的恒温浴中, 有关参数如下:  $d_A = 200 \text{ mm}$ 、 $d_B = 20 \text{ mm}$ ,  $\rho_A = 1\,600 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $\rho_B = 400 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c_A = 0.4 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $c_B = 1.6 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda_A = 170 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda_B = 1.7 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 表面传热系数  $h_A = 5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ,  $h_B = 50 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。试确定把两个球表面冷却到 415 K 及把两球中心冷却到 415 K 所需的时间, 并对计算结果作出定性分析。

3-47 在温度为  $-30^\circ\text{C}$  的高空云层中形成了直径为 5 mm 的球状冰雹, 然后开始落下并穿过温度为  $5^\circ\text{C}$  的热空气层。试计算冰雹需落下多少时间其表面才开始熔化, 并确定此时冰雹中心的温度。取  $h = 240 \text{ W}/$

( $\text{m}^2 \cdot \text{K}$ ) 冰雹的物性:  $c = 2\,040 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\rho_1 = 921 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $\lambda = 2.56 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

### 半无限大物体

3-48 一种测量导热系数的瞬态法是基于半无限大物体的导热过程而设计的。设有一块厚金属, 初温为  $30^\circ\text{C}$ , 然后其一侧表面突然与温度为  $100^\circ\text{C}$  的沸水相接触。在离开此表面  $10 \text{ mm}$  处由热电偶测得  $2 \text{ min}$  后该处的温度为  $65^\circ\text{C}$ 。已知材料的  $\rho = 2\,200 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 700 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ , 试计算该材料的导热系数。

3-49 有两件很大的不锈钢制及木制的家具置于  $20^\circ\text{C}$  的室内已有很长时间。当用手去触摸它们时, 哪一个感觉更冷一些? 木材的物性可取为  $\rho = 545 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 2\,385 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 0.17 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , 不锈钢的物性为  $\rho = 7\,820 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 460 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 18 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。试用定量分析来说明问题。

3-50 夏天, 高速公路的路面在日光长时间的曝晒下可达到  $50^\circ\text{C}$  的温度。假设突然一阵雷雨把路面冷却到  $20^\circ\text{C}$  并保持不变, 雷雨持续了  $10 \text{ min}$ 。试计算在此降雨期间单位面积上所放出的热量。高速公路混凝土的物性可取为  $\rho = 2\,300 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 880 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 1.4 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。作为一种估算, 假设雷雨前路面以下相当厚的一层混凝土均处于  $50^\circ\text{C}$ , 分析这一假设对计算得到的放热量的影响。

3-51 在寒冷地区埋设地下水管时应考虑冬天地层下结冰的可能性。为使水管安全工作, 水管应埋在结冰层以下。作为一种估算, 可以采用这样的简化模型, 即把地球表面层看成为半无限大的物体, 而冬天则用较长时间内地球表面突然处于较低的平均温度这样一种物理过程来模拟。设某处地层的热扩散率为  $1.65 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ , 地球表面温度由原来均匀的  $15^\circ\text{C}$  突然下降到  $-20^\circ\text{C}$ , 并达  $50$  天之久。试估算为使埋管上不出现霜冻而必需的最浅埋设深度。

3-52 医学知识告诉我们: 人体组织的温度等于、高于  $48^\circ\text{C}$  的时间不能超过  $10 \text{ s}$ , 否则该组织内的细胞就会死亡。今有一劳动保护部门需要获得这样的资料, 即人体表面接触到  $60^\circ\text{C}$ 、 $70^\circ\text{C}$ 、 $80^\circ\text{C}$ 、 $90^\circ\text{C}$  及  $100^\circ\text{C}$  的热表面后皮肤下烧伤深度随时间而变化的情况。试利用非稳态导热理论作出上述烧伤深度随时间变化的曲线。人体组织可看做是各向同性材料, 物性可取为  $37^\circ\text{C}$  水的数值。计算的最大时间为  $5 \text{ min}$ 。为简化分析, 这里可假定一接触到热表面, 人体表面温度就上升到了热表面的温度。

3-53  $70^\circ\text{C}$  的热茶突然倒入初温为  $25^\circ\text{C}$  的陶瓷茶杯中。茶杯壁厚  $6 \text{ mm}$ 。假设茶杯内表面温度立即上升到  $70^\circ\text{C}$ , 试确定茶杯内表面下  $2 \text{ mm}$  处温度达  $30^\circ\text{C}$  所需的时间。陶瓷材料的热扩散率  $a = 4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 。

### 多维非稳态导热

3-54 一初始温度为  $25^\circ\text{C}$  的正方形人造木块被置于  $425^\circ\text{C}$  的环境中。设木块的六个表面均可受到加热, 表面传热系数  $h = 6.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。经过  $4$  小时  $50$  分  $24$  秒后, 木块局部地区开始着火。试推算此种材料的着火温度。已知木块的边长为  $0.1 \text{ m}$ ; 材料是各向同性的,  $\rho = 810 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 2\,550 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ,  $\lambda = 0.65 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。

3-55 一易拉罐饮料从  $30^\circ\text{C}$  的室温中移入  $5^\circ\text{C}$  的冰箱冷藏室中冷却。假设罐中饮料的自然对流可以忽略, 其外表面与冷藏室环境的表面传热系数为  $10 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 罐壳的热阻可以忽略不计, 试计算为把饮料冷却到至少  $10^\circ\text{C}$  所需的时间。饮料的物性可按水处理, 罐的直径为  $50 \text{ mm}$ 、高  $120 \text{ mm}$ 。

3-56 一直径为  $0.15 \text{ m}$ 、高  $0.05 \text{ m}$  的平板玻璃圆盘, 送入退火炉中消除应力, 其初始温度为  $30^\circ\text{C}$ , 炉中温度为  $450^\circ\text{C}$ 。设该玻璃盘在炉内时各表面均可受到加热, 表面传热系数为  $9.5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。按工艺要求, 需加热到盘内各处温度均在  $400^\circ\text{C}$  以上, 试估算所需的加热时间。已知该盘的导热系数  $\lambda = 0.78 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ,  $\rho = 2\,700 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $c = 835 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。

3-57 一块牛肉从  $5^\circ\text{C}$  的冷藏室中取出后置于  $180^\circ\text{C}$  的烘箱中烘烤, 加热到至少  $80^\circ\text{C}$  就达到了所谓鲜嫩可食用的程度。设牛肉外表面与烘箱加热气流间的表面传热系数为  $20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , 试确定把牛肉加热到

鲜嫩程度所需的时间。牛肉的物性可按水处理，其尺寸为  $40\text{ mm} \times 60\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ 。

3-58 一直径为  $10\text{ cm}$ 、高  $10\text{ cm}$  的短圆柱体，初温为  $260^\circ\text{C}$ ，后将其置于温度为  $30^\circ\text{C}$  的大油槽中，其全部表面均可受到油的冷却，冷却过程中的表面传热系数为  $250\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。试确定  $3\text{ min}$  后圆柱体内的最大温差。圆柱体的导热系数为  $47.5\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，热扩散率为  $9.55 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ 。

3-59 对于 3.5 节中所讨论的长棱柱体的非稳态导热问题（图 3-15a），假设平板  $p_1$  及  $p_2$  从过程开始到  $\tau$  时刻的换热量与该平板在这一非稳态导热过程中的最大换热量之比分别为  $(Q/Q_0)_{p_1}$  及  $(Q/Q_0)_{p_2}$ 。试导出用上述两个值表示的在同一时间间隔内柱体的  $Q/Q_0$  之值的计算式。

## 综合分析

3-60 一大型加热炉的炉底采用厚  $50\text{ mm}$  的耐火材料做成。设炉子从冷态  $25^\circ\text{C}$  开始点火后炉内马上就形成了稳态的  $1600^\circ\text{C}$  的高温气体，气体与炉底表面间的平均表面传热系数为  $40\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。炉底材料的热扩散率  $a = 5 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ ，导热系数  $\lambda = 4.0\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。按工艺要求，炉内各表面均应加热到  $1500^\circ\text{C}$  方投入使用。试确定从开始点火到满足这一条件所需的时间。

3-61 试定性地画出半无限大物体在下列三种边界条件下物体中温度随时间变化的图像：（1）第一类边界条件， $t_w$  为常数；（2）第二类边界条件， $q_w$  为常数；（3）第三类边界条件， $h$  及  $t_w$  为常数。

3-62 位于寒冷地区的一大直径输油管的外径为  $1\text{ m}$ 、壁厚  $45\text{ mm}$ ，油管外侧绝热良好。未送油前油管温度为  $-20^\circ\text{C}$ ，然后  $80^\circ\text{C}$  的热油突然流经该油管，与内壁间的表面传热系数  $h = 400\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。试确定：（1）输油  $5\text{ min}$  后油管外表面的温度；（2）输油  $5\text{ min}$  后内表面的瞬时热流密度；（3）输油  $5\text{ min}$  内油管单位长度上所吸收的热量。输油管壁的  $\lambda = 43\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ， $a = 1.17 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ 。

3-63 一直径为  $10\text{ mm}$  的固体球被均匀加热到  $450^\circ\text{C}$ ，然后进行两步冷却：第一步把它置于  $25^\circ\text{C}$  的空气中缓慢冷却，直到球的中心温度下降到  $350^\circ\text{C}$ ，此阶段球的表面传热系数为  $10\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ；第二步把它置于  $25^\circ\text{C}$  的水中快速冷却，直到球的中心温度降低到  $50^\circ\text{C}$ ，此阶段球的表面传热系数为  $6000\text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ 。球体的物性为  $\rho = 3200\text{ kg}/\text{m}^3$ ， $c = 1200\text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ ， $\lambda = 18\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ 。试确定每一阶段冷却所需的时间及该阶段中球体所释放出的热量。

3-64 有一个二维的矩形区域，初始时刻处于均匀温度  $t_0$ ，后其四个表面突然受到均匀的热流密度  $q$  的加热。试证明，该矩形区域中非稳态导热的过余温度场可以用两个相应的一维非稳态导热问题过余温度场的叠加来获得。

3-65 在一太阳能储能系统中有一卵石蓄热床，卵石的平均直径为  $60\text{ mm}$ ，初始温度为  $350^\circ\text{C}$ ，后温度为  $280^\circ\text{C}$  的冷空气流经该蓄热床。试确定需经过多长时间与冷空气接触的第一排卵石能释放用于加热空气的能量的  $90\%$ ？卵石的导热系数  $\lambda = 1.6\text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ，热扩散率  $a = 7 \times 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$ 。

3-66 物体的非稳态导热进入正规状况阶段后，一般定义同一点上两个不同时刻的过余温度  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  与相应时刻  $\tau_1$ 、 $\tau_2$  的关系

$$m = \frac{\ln \theta_1 - \ln \theta_2}{\tau_2 - \tau_1}$$

为冷却或加热速率。试对无限大平板导出  $m$  的表达式，并利用表 3-2 所提供的信息，设计出一种测定非金属固体材料（如塑料板等）导热系数的简易方法<sup>[15]</sup>。

3-67 一直径为  $d$  的钢球，加热到  $t_{s0}$  温度后被突然置于温度为  $t_{f0}$  的液体中冷却。由于液体的容积有限，在钢球冷却过程中液体也逐渐升温。为强化钢球表面与液体之间的换热过程，液体槽中加了搅拌器，因而可近似地认为任一瞬间液槽中的温度是均匀的。试导出确定钢球温度及油温随时间变化的微分方程式，并求解之。设表面传热系数为常数。

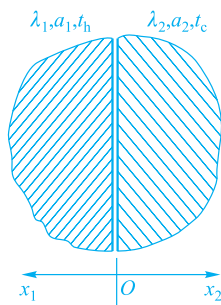
### 小论文题目

3-68 如果非稳态导热的求解仅着眼于正规状况阶段（即充分发展阶段），则对于无限大平板、无限长圆柱及球，其温度的微分方程可简化为一个常微分方程。定义无量纲温度为  $\Theta = \frac{t-t_\infty}{t_b-t_\infty}$ ，其中  $t_b = \frac{1}{V} \int_V t dV$ ，为容积平均温度。试对于两侧对称受热（冷却）的无限大平板导出  $\Theta$  的微分方程及边界条件<sup>[16]</sup>。

3-69 有两个很大的金属块，初始温度均匀并各为  $t_h$  及  $t_c$ ，然后突然在一侧表面上将它们紧密接触，其间不存在接触热阻。试证明界面温度为

$$t_s = \frac{t_h b + t_c}{1+b}$$
$$b = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \sqrt{\frac{a_2}{a_1}} = \sqrt{\frac{\lambda_1 \rho_1 c_1}{\lambda_2 \rho_2 c_2}}$$

3-70 同上题，但接触界面上存在恒定的接触热阻，试写出两个半无限大物体非稳态导热的控制方程、边界条件。坐标的选取如附图所示<sup>[17]</sup>。



习题 3-70 附图

### 采用工具软件的题目

3-71 对例题 3-6，画出浇铸后 2 h 从铸件底面到其下 80 mm 的型砂层中的温度分布。

3-72 乘积解法对非稳态导热的任何一个阶段都成立。试确定例题 3-9 中钢锭加入炉中后 1 h 瞬间钢锭中心的温度。



## 参 考 文 献

- [1] 章熙民, 任泽霖, 梅飞鸣. 传热学 [M]. 4 版. 北京: 中国建筑工业出版社, 2001: 71-77.
- [2] 高应才. 数学物理方程及其数值解法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1983: 19-22.
- [3] Holman J P. Heat transfer [M]. 10th ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 2010: 143.
- [4] Cengel Y A, Ghajar A J. Heat transfer, A practical approach [M]. 4th ed. Boston: WCB McGraw-Hill, 2011: 228.
- [5] 张洪济. 热传导 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1992: 189-215, 217-224.
- [6] 奥齐西克 M N. 热传导 [M]. 俞昌明, 等译. 北京: 高等教育出版社, 1984: 33-39, 106-108, 171-176.
- [7] Heisler M P. Temperature charts for conduction and temperature heating [J]. Trans ASME 1947, 69 (1): 227-236.
- [8] Schneider P J. Conduction heat transfer [M]. Reading: Addison Wesley, 1955.
- [9] Campo A. Rapid determination of spatio-temporal

temperatures and heat transfer in simple bodies cooled by convection: usage of calculators in lieu of Heisler–Grober charts [ J ]. *Int Comm Heat Mass Transfer*. 1997, 24(4):553–564.

[ 10 ] Grober H, Erk, H, Grigull U. *Fundamentals of heat transfer* [ M ]. 3rd ed. New York: McGraw–Hill, 1961:52,56,60.

[ 11 ] Bergman T L, Lavine A E, Incropera F P, et al. *Fundamentals of heat and mass transfer* [ M ]. 6th ed. New York: John Wiley & Sons, 2011: 310–314.

[ 12 ] Langston L S. Heat transfer from multidimensional objects using one–dimensional solutions for heat loss [ J ]. *Int J Heat Mass Transfer*. 1982, 25: 149–150.

[ 13 ] Eckert E R G, Drake R M, Jr. *Analysis of heat mass transfer* [ M ]. Tokyo: McGraw–Hill Kogakusha Ltd., 1972:42–47.

[ 14 ] Sobhan C B, Peterson G P. *Microscale and nanaoscale heat transfer* [ M ]. Boca Raton: CRC Press, 2008:38.

[ 15 ] 奥西波娃 B A. 传热学实验研究 [ M ]. 蒋章焰, 王传院, 译. 北京: 高等教育出版社, 1982: 69–79.

[ 16 ] 辛荣昌, 陶文铨. 非稳态导热充分发展阶段的分析解 [ J ]. *工程热物理学报*, 1993, 14(1); 80–83.

[ 17 ] Xin R C, Tao W Q. Analytical solution for transient heat conduction in two–semi–infinite bodies in contact [ J ]. *ASME J heat Transfer*, 1994, 116(1):224–228.



兴趣阅读资料



