

第三章 数学教育的基本理论

数学教育作为一门学科,始于 20 世纪初,至今不过一百多年。1908 年成立国际数学教育委员会,数学教育成为国际性的事务。但是在第二次世界大战之前,数学教育的研究只限于各国的“数学教学大纲”“数学教学计划”等文件的交流,尚无数学教育的理论著作问世。第二次世界大战结束之后,数学教育进入一个迅猛发展的时期,各种数学教育的著作大量出现。但是,真正形成数学教育理论形态的研究并不多,似乎只有弗赖登塔尔和波利亚两位的工作得到比较广泛的承认。心理学家皮亚杰倡导的建构主义学说,对数学教育有很大影响。中国的“双基”数学教育,积累了丰富的经验。以上四个方面,将在本章分四节加以叙述。

第一节 弗赖登塔尔的数学教育理论

弗赖登塔尔(Hans Freudenthal, 1905—1990)是世界著名数学家和数学教育家。他曾经是荷兰皇家科学院的院士和数学教育研究所所长,专长为李群和拓扑学。1960 年以后,研究重心转向数学教育。在 1967 年至 1970 年期间任“国际数学教育委员会”(ICMI)主席。在他的倡议下,召开了第一届“国际数学教育大会”,简称 ICME。在 ICME 上,他倡导数学教育研究要像研究数学一样,以科学论文的形式交流研究心得,即前人做了什么,我发现了什么,证据是什么,并有详细的文献支持,因而使数学教育研究不再只停留在经验交流的水平上。这是一个大的变革,中国数学教育正在逐渐适应这场具有历史转折的进步。他一生为国际数学教育事业作出了巨大贡献。尤其令人敬佩的是,即使在 80 岁高龄时,他依然在不断地思考着数学教育中的问题,关心着孩子们的成长和发展。1987 年,已经 82 岁的弗赖登塔尔应华东师范大学的邀请在上海讲学两周,以后又顺访北京。1990 年弗赖登塔尔去世。他在中国讲学的讲稿 *Revisiting Mathematics Education (China Lecture)* 于 1994 年在荷兰出版。1994 年有中文译本。

对于数学教育,弗赖登塔尔有他自己独到的认识,并出版了许多数学教育理论著作。他的主要观点在《作为教育任务的数学》《除草与播种》以及《数学教育再探》中有系统阐述,其中《作为教育任务的数学》是一个总体的叙述,另外两本是更加具体的分析。

总体上讲,弗赖登塔尔所认识的数学教育有五个主要特征:

- 情境问题是教学的平台;
- 数学化是数学教育的目标;
- 学生通过自己努力得到的结论和创造是教育内容的一部分;
- “互动”是主要的学习方式;
- 学科交织是数学教育内容的呈现方式。

这些特征又可以用三个词来加以概括——现实、数学化、再创造。

1. 现实

弗赖登塔尔认为,数学来源于现实,存在于现实,并且应用于现实,而且每个学生有各自不同的“数学现实”。数学现实不等同于客观现实,而是学生从客观现实中抽象、整理出来的数学知识及其现实背景的总和。数学教师的任务之一是帮助学生构造数学现实,并在此基础上发展他们的数学现实。因此,在教学过程中,教师应该充分利用学生的认知规律、已有的生活经验和数学的实际,灵活处理教材,根据实际需要原材料进行优化组合。这也就是弗赖登塔尔常常说的“数学教育即是现实的数学教育”。

关于情境问题,弗赖登塔尔认为,数学教育要引导学生了解周围的世界,周围的世界应该是学生探索的源泉,而数学课本从结构上应当从与学生生活体验密切相关的问题开始,发现数学概念和解决实际问题,实现数学化。

情境问题与传统数学课本中的例子有相通之处,即它们都被用来作为引入数学概念和理解数学方法的基础。区别之处在于,传统的数学课本一般都按照科学的体系展开,不大重视属于学生自己的一些非正规的数学知识的作用。而弗赖登塔尔所倡导的情境问题则是直观的、容易引起想像的数学问题,隐含在这些数学问题中的数学背景是学生熟悉的事物和具体情境,而且与学生已经了解或学习过的数学知识相关联,特别是要与学生生活中积累的常识性知识和那些学生已经具有的、但未经训练和不那么严格的数学体验相关联。

在运用“现实的数学”进行教学时,必须明确认识以下几点:

第一,数学的概念、数学的运算法则以及数学的命题,归根结底都是来自于现实世界的实际需要,是现实世界的抽象反映和人类经验的总结。因此,数学教学内容来自于现实世界。把那些最能反映现代生产、现代社会生活需要的最基本、最核心的数学知识和技能作为数学教育的内容。

第二,数学研究的对象,是现实世界同一类事物或现象抽象而成的量化模式。而现实世界事物、现象之间又充满了各种各样的关系和联系。从而,数学教育的内容就包括数学与外部的联系以及数学内部的内在联系。就中学数学教学内容来讲,不能只考虑代数、几何、三角之间的联系,还应该研究数学与现实世界各种不同领域的外部关系和联系。如与日常生活、工农业生产、货币流通和商品生产经营以及其他学科等联系。

第三,社会需要的人才是多方面的,不同层次、不同专业所需的数学知识不尽相同。因而,数学教育应为不同的人提供不同层次的数学知识。也就是说,不同的人需要不同的“现实的数学”。数学教育所提供的内容应该是学生的各自的“数学现实”,即“学生自己的数学”。通过“现实的数学教学”,学生就可以通过自己的认知活动,构建自己的数学观,促进数学知识结构的优化。

2. 数学化

什么是数学化呢?弗赖登塔尔认为,人们在观察、认识和改造客观世界的过程中,运用数学的思想和方法来分析和研究客观世界的种种现象并加以整理和组织的过程,就叫做数学化。说简单点,数学地组织现实世界的过程就是数学化。

一提到数学化,人们就会联想到数学教学的“科学性”和“严谨性”,感觉到它距离我们很遥远。实际上,数学化是一个由浅入深,具有不同层次、不断发展的过程。一般来讲,数学化的对象,一是数学本身;二是现实客观事物。对数学本身的数学化,就是深化数学知识,或者使数学知识系统化,形成不同层次的公理体系和形式体系。对客观世界的数学化,形成了数学概念、运算法则、规律、定理,以及为了解决实际问题而构造的数学模型等。

事实上,在高等学校里,数学系的学生要学普通物理,物理系的学生要学高等数学。研究化学反应时,把参加反应的物质的浓度、温度等作为变量,用方程表示它们的变化规律,通过方程的“稳定解”来研究化学反应。这里不仅要应用基础数学,而且要应用“前沿上的”“发展中的”数学。不仅要用加减乘除来处理,而且要用复杂的“微分方程”来描述。研究这样的问题,离不开方程、数据、函数曲线、计算机等。正是各门科学数学化到一定程度,它们才得以发展到一个又一个新的阶段。不仅如此,正如苏联数学家格涅坚科(Б.В.Гнеденко)所说,当今的世界“不仅仅是科学在数学化,而且绝大多数实践活动也在数学化”,“我们的时代是知识数学化的时代”。

既然任何数学分支都是数学化的结果,各门科学的发展都有数学化的功劳,那么在数学教育过程中,让学生学会数学地思考与研究各种现象,形成数学的概念、运算的法则,构造数学模型,经历一个数学化的过程,也就是理所当然的事了。正如弗赖登塔尔所说:“数学教学必须通过数学化来进行。”

学习“数学化”,并不是不要数学学科的“科学性”和“严谨性”。在现实数学教育者的眼里,学习者从一个具体的情境问题开始到得出一个抽象数学概念的教育全过程就是数学化的过程,学生对数学的“再发现”就是“数学化”。

需要强调的是,数学化是一个过程,是一个从问题开始,由实际问题到数学问题,由具体问题到抽象概念,由解决问题到更进一步应用的教育全过程,而不是方程、函数等具体的数学素材。传统数学课本是“教给”学生数学现成结果的教材,最容易忽略的就是过程。把数学化作为数学课本内容的一部分,是要使课本成为学生自己去“发现”一些已有数学结果的辅导书。通过一个充满探索的过程去学习数学,让已经存在于学生头脑中的那些非正规的数学知识和数学体验上升发展为科学的结论,从中感受数学发现的乐趣,增进学好数学的信心,形成应用意识、创新意识,从而达到素质教育的目的。

具体说来,现实数学教育所说的数学化有两种形式:一是实际问题转化为数学问题的数学化,即发现实际问题中的数学成分,并对这些成分作符号化处理;二是从符号到概念的数学化,即在数学范畴之内对已经符号化了的问题作进一步抽象化处理。

对于前者,基本流程是:

- (1) 确定一个具体问题中包含的数学成分;
- (2) 建立这些数学成分与学生已知的数学模型之间的联系;
- (3) 通过不同方法使这些数学成分形象化、符号化和公式化;
- (4) 找出蕴涵其中的关系和规则;
- (5) 考虑相同数学成分在其他数学知识领域方面的体现;
- (6) 作出形式化的表述。

对于后者,基本流程是:

- (1) 用数学公式表示关系;
- (2) 对有关规则作出证明;
- (3) 尝试建立和使用不同的数学模型;
- (4) 对得出的数学模型进行调整和加工;
- (5) 综合不同数学模型的共性,形成功能更强的新模型;
- (6) 用已知数学公式和语言尽量准确地描述得到的新概念和新方法;
- (7) 作一般化的处理、推广。

不过,通过“数学化”得到一个新的数学概念之后,还需要对已经得到的概念、模型、技巧作进一步的整理和把握,即解释和说明得出的结果;讨论新模型或方法的适用范围;回顾、总结和分析已经完成的数学化过程;应用。

可以看到,一个现实情境所提供的信息是现实数学教育的基础。而情境问

题与数学化又是结合在一起的。在“一浪接一浪”的数学化进程中,学习者经历了一个又一个由现实的情境问题到数学问题,由不那么严格的数学体验到严格的数学系统,由数学的“再发现”到数学的具体应用。

3. 再创造

学生“再创造”学习数学的过程实际上就是一个“做数学”(doing mathematics)的过程,这是目前数学教育的一个重要观点。它强调学生学习数学是一个经验、理解和反思的过程,强调以学生为主体的学习活动对学生理解数学的重要性,强调激发学生主动学习的重要性,并认为“做数学”是学生理解数学的重要条件。弗赖登塔尔说的“再创造”,其核心是数学过程再现。这就要求教师“设想你当时已经有了现在的知识,你将是怎样发现那些成果的;或者设想一个学生学习过程得到指导时,他是应该怎样发现的”。教师不能简单地放手不管,由学生本人把学的东西自己去发现或创造出来。教师的任务是引导和帮助学生去进行这种再创造的工作。

需要特别注意的是,弗赖登塔尔的数学教育理论不是“教育学+数学例子”式的论述,而是抓住数学教育的特征,紧扣数学教育的特殊过程,因而有“数学现实”“数学化”“数学反思”“思辨数学”等诸多特有的概念。他的著作多数根据自己研究数学的体会,以及观察儿童学习数学的经历而写成,思辨性的论述比较多。于是有人批评说弗赖登塔尔的数学教育理论缺乏实践背景和实验数据。其实,他的许多研究成果尚未被大家仔细研究。

第二节 波利亚的解题理论

数学学习者大多都有过这样的经历:一道题,自己百思不得其解,而老师却给出了一个绝妙的解法。这时候,我们最想知道“老师是怎么想出这个解法的”,如果这个解法不是很难,我们也许会问“自己完全可以想出,但为什么我没有想到呢?”这就需要研究“解决数学问题”的规律。

美籍匈牙利数学家乔治·波利亚(George Polya, 1887—1985)在该领域做出了许多奠基性的工作。波利亚是法国科学院、美国科学院和匈牙利科学院的院士,1887年出生在匈牙利,青年时期曾在布达佩斯、维也纳、哥廷根、巴黎等地攻读数学、物理和哲学,获博士学位。1914年在苏黎世著名的瑞士联邦理工学院任教。1940年移居美国,1942年起任美国斯坦福大学教授。他一生发表两百多篇论文和许多专著。他在数学的广阔领域内有精深的造诣,对实变函数、复变函数、组合论、概率论、数论、几何等若干分支领域都做出了开创性的贡献,一些术

语和定理都以他的名字命名。由于他在数学教育方面所取得的成就和对世界数学教育所产生的影响,在他 93 岁高龄时,还被 ICME 聘为名誉主席。

《怎样解题》(1944)、《数学的发现》(1954)和《数学与猜想》(1961)这三本书就是他智慧的结晶。这些书被译成很多国家的文字出版,其中《怎样解题》一书被译成 17 种文字,仅平装本就销售了一百万册以上。著名数学家范·德·瓦尔登 1952 年 2 月 2 日在瑞士苏黎世大学的会议致词中说:“每个大学生,每个学者,特别是每个老师都应该读读这本引人入胜的书。”

1. 波利亚的数学教育观

在从事数学研究、亲自编写教材、开展教师培训的过程中,波利亚形成了自己的数学教育观。即便是几十年后的今天,展卷细读波利亚的教育思想,仍新鲜如昨,如沐春风。

波利亚认为,中学数学教育的根本目的是“教会学生思考”。“教会学生思考”意味着数学教师不只是传授知识,还应努力发展学生运用所学知识的能力,他应该强调技能、技巧、有益的思考方式和理想的思维习惯。而为了教会学生思考,教师在教学时,要遵循学习过程的三个原则(这也可看作教学过程的三个原则),即主动学习,最佳动机,循序渐进。

主动学习。“学东西的最好方式是发现它”,“亲自发现能够在你脑海里留下一条小路;今后一旦需要,你便可以再次利用它。”因而,教师应该“尽量让学生在现有条件下亲自发现尽可能多的东西。”思想应在学生头脑里产生,教师则只起助产士的作用。最佳动机。为了使学习富有成效,学生应该对学习倍感兴趣并且在学习活动中寻求欢乐。最佳的刺激应该是对所学知识的兴趣。另外,还可以在学生做题之前,让他们猜测学习的结果。在科学家的工作中,猜想几乎是证明的先导。循序渐进。学习过程是从行动和感知开始的,进而发展到词语和概念,以养成合理的思维习惯而结束。学习的第一个过程是探索,它联系着行动和感知,并且是在直觉和启发的水平上发展的。第二个阶段是阐明,包括引进术语、定义、证明等,提高到概念的水平上。第三个阶段是吸收,即把所学的知识都在头脑里消化了,然后吸收到自己的知识系统中来,扩大智力的范围。以上三项原则应该贯穿到教师的日常工作中,这有助于他们成为更好的教师。

波利亚建议,要成为一名好的数学教师,必须具备两方面的知识,一是数学内容的知识。一般中学数学教师最大的缺陷在于,他没有主动完成数学工作的经验。二是数学教学法的知识。具体而言,正如下面要介绍的“怎样解题”表一样,波利亚给数学教师提出了“十条建议”。

- (1) 对自己的科目要有兴趣;
- (2) 熟知自己的科目;

- (3) 懂得学习的途径,学习任何东西的最佳途径是亲自独立地发现其中的奥妙;
- (4) 努力观察学生的面部表情,察觉他们的期望和困难,设身处地地为学生考虑;
- (5) 不仅要传授知识,还要传授技能技巧,培养思维方式及科学的工作习惯;
- (6) 让学生学会猜想问题;
- (7) 让学生学会证明问题;
- (8) 从手头上的题目中寻找出一些可能用于解今后题目的特征,揭示出存在于具体情况下的一般模式;
- (9) 不要把你的全部秘诀一下子倒给学生——让他们猜测一番,然后再讲给他们听——让他们独立地找出尽可能多的东西;
- (10) 启发问题,而不要填鸭式地塞给学生。

2. 波利亚关于解题的研究

为了回答“一个好的解法是如何想出来的”这个令人困惑的问题,波利亚专门研究了解题的思维过程,并把研究所得写成《怎样解题》一书。这本书的核心是他分析解题的思维过程得到的一张“怎样解题”表(见表 3-1),并以例题表明这张表的实际应用。书中各部分基本上是配合这张表的,也可以说是对该表的进一步阐述和注释。在这张包括“了解问题”“拟订计划”“实行计划”和“回顾”四大步骤的解题全过程的解题表中,对第二步即“拟订计划”的分析是最为引人入胜的。他指出,寻找解法实际上就是“找出已知数与未知数之间的联系,如果找不出直接联系,你可能不得不考虑辅助问题,最终得出一个求解计划”。波利亚认为,“对你自己提出问题是解决问题的开始”,“当你有目的地向自己提出问题时,它就变作你的问题”。“假使你能适当地应用这些问句和提示来问你自己,它们可以帮助你解决你的问题。假使你能适当地应用同样的问句和提示来问你的学生,你就可以帮助他解决他的问题”。他还把寻找并发现解法的思维过程分解为五条建议和 23 个具有启发性的问题,它们就好比是寻找和发现解法的思维过程的“慢镜头”,使我们对解题的思维过程看得见、摸得着。

表 3-1 波利亚提供的“怎样解题”表

	了解问题
第一步,必须了解问题	△ 未知数是什么? 已知数是什么? 条件是什么? △ 可能满足什么条件? △ 画一个图,引入适当的符号。

续表

第二步,找出已知数和未知数间的关系。假使你不能找出关系,就得考虑辅助问题,最后应想出一个计划	拟订计划
	△ 你以前曾见过它吗? △ 你知道什么与此有关的问题吗? △ 注视未知数!试想出一个有相同或相似的未知数的熟悉的问题。 △ 这里有一个与你有关而且以前解过的问题,你能应用它吗? △ 你可以改述这个问题吗?回到定义! △ 你若不能解这个问题,试先解一个有关的问题。你能想出一个更容易着手的有关问题么?一个更一般的问题?一个更特殊的问题?一个类似的问题?你能解决问题的一部分吗? △ 你用了全部条件吗?
第三步,实行你的计划	实行计划
	△ 实行你的解决计划,校核每一个步骤。
第四步,校核所得的解答	回顾
	△ 你能校核结果吗?你能校核论证吗? △ 你能用不同的方法得出结果吗? △ 你能应用这结果或方法到别的问题上去吗?

波利亚的“怎样解题”表的精髓是启发你去联想。联想什么?怎样联想?这可以通过一连串建议性或启发性问题来加以回答。“你以前见过它吗?你是否见过相同的问题而形式稍有不同?你是否知道与此有关的问题?你是否知道一个可能用得上的定理?看着未知数!试指出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。这里有一个与你现在的问题有联系且早已解决的问题,你能不能利用它?你能利用它的结果吗?你能利用它的方法吗?为了能利用它,你是否应该引入某些辅助元素?你能不能重新叙述这个问题?你能不能用不同的方式重新叙述它?……”

波利亚说,他在写这些东西时,脑子里重现了他过去在研究数学时解决问题的过程。实际上是他研究解决问题时的思维过程的总结。这正是数学家在研究数学教育,特别是研究解题教学时的优势所在,绝非“纸上谈兵”。仔细想一想,我们在解题时,为了找到解法,实际上也思考过表中的某些问题,只不过不自觉,没有意识到罢了。

从“怎样解题”表中,我们可以看出,其中的问句与提示是用来促发念头的。

“有某种念头来开始着手工作,这是很大的优点”;“如果你有一个念头,你就够幸运的了”;“如果你走运的话,你或许能找到另一个念头”;在这个过程中,至少你会增进对问题的认识与理解;“或者在明显失败的尝试和一度犹豫不决之后,突然闪出一个‘好念头’”。真正糟糕的是,“我们根本就没有念头”,因为“想不起什么念头,我们只有对问题感到疲倦的危险”。这时,“任何一个可能指明问题新方面的问题,都值得欢迎,因为它可以引起我们的兴趣,可以使我们继续工作,继续思索。”

下面是实践波利亚解题表的一个示例,借以展示波利亚解题风格的心路历程。

例 给定正四棱台的高 h , 上底的边长为 a 和下底的边长为 b , 求正四棱台的体积 F 。(学生已学过棱柱、棱锥的体积。)

讲解 第一, 了解问题。

问题 1: 你要求解的是什么?

要求解的是几何体的体积, 在思维中的位置用一个单点 F 象征性地表示出来(图 3-1)。

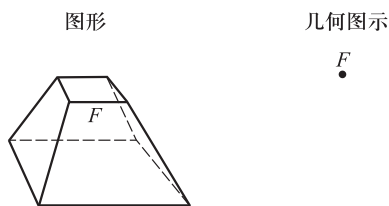


图 3-1

问题 2: 你有些什么?

一方面是题目条件中给出的三个已知量 a, b, h ; 另一方面是已学过棱柱、棱锥的体积公式, 并积累有求体积公式的初步经验。把已知的三个量添到图示处(图 3-2), 就得到新添的三个点 a, b, h ; 它们与 F 之间有一条鸿沟, 象征问题尚未解决, 我们的任务就是将未知量与已知量联系起来。

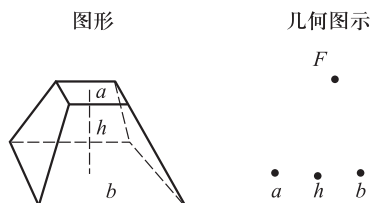


图 3-2

第二,拟订计划。

问题 3:怎样才能求得 F ?

由于我们已经知道棱柱、棱锥的体积公式,而棱台的几何结构(棱台的定义)告诉我们,棱台是“用一个平行于底面的平面去截棱锥”,从一个大棱锥中截去一个小棱锥所生成的。如果知道了相应两棱锥的体积 B 和 A ,我们就能求出棱台的体积

$$F=B-A. \quad \textcircled{1}$$

我们在图示上引进两个新的点 A 和 B ,用斜线把它们与 F 联结起来,以此表示这三个量之间的联系(图 3-3,即①式的几何图示)。这就把求 F 转化为求 A, B 。

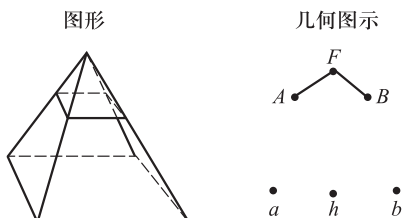


图 3-3

问题 4:怎样才能求得 A 与 B ?

依据棱锥的体积公式 $\left(V=\frac{1}{3}SH\right)$,底面积可由已知条件直接求得,关键是如何求出两个棱锥的高。并且,一旦求出小棱锥的高 x ,大棱锥的高也就求出,为 $x+h$ 。

我们在图示上引进一个新的点 x ,用斜线把 A 与 x, a 联结起来,表示 A 能由 a, x 得出, $A=\frac{1}{3}a^2x$;类似地,用斜线把 B 与 b, h, x 联结起来,表示 B 可由 b, h, x 得出, $B=\frac{1}{3}b^2(x+h)$ (图 3-4),这就把求 A, B 转化为求 x 。

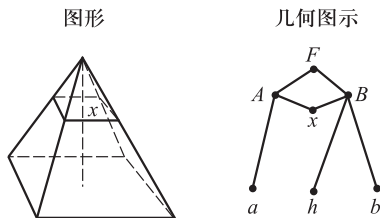


图 3-4

问题 5: 怎样才能求得 x ?

为了使未知数 x 与已知数 a, b, h 联系起来, 建立起一个等量关系, 我们回忆处理立体几何问题的基本经验, 进行“平面化”的思考。用一个通过高线以及底面一边上中点(图 3-5 中, 点 Q)的平面去截两个棱锥, 在这个截面上有两个相似三角形能把 a, b, h, x 联系起来(转化为平面几何问题), 由 $\triangle VPO_1 \sim \triangle VQO_2$ 得

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}。 \quad (2)$$

这就将一个几何问题最终转化为代数方程的求解, 解方程②便可由 a, b, h 表示 x , 在图示中便可用斜线将 x 与 a, b, h 联结起来。至此, 我们已在 F 与已知数 a, b, h 之间建立起了一个不中断的联络网, 解题思路全部沟通。

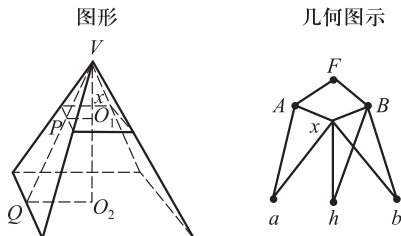


图 3-5

第三, 实行计划。

作辅助线(过程略)如图 3-5 所示, 由相似三角形的性质, 得

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b},$$

解得

$$x = \frac{ah}{b-a}。$$

进而得两锥体的体积为

$$A = \frac{1}{3}a^2x = \frac{a^3h}{3(b-a)},$$

$$B = \frac{1}{3}b^2(x+h) = \frac{b^3h}{3(b-a)},$$

得棱台体积为

$$F = B - A = \frac{(b^3 - a^3)h}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}h。 \quad (3)$$

第四, 回顾。

(1) 正面检验每一步,推理是有效的,演算是准确的。再作特殊性检验,令 $a \rightarrow 0$,由③式可得正四棱锥体的体积公式;令 $a \rightarrow b$,由③式可得正四棱柱体的体积公式。这既反映了新知识与原有知识的相容性,又显示出棱台体积公式的一般性;既沟通了三类几何体极限状态间的知识联系,又可增进三个体积公式之间联系的记忆。

(2) 回顾这个解题过程可以看到,解题首先要弄清题意,从中捕捉有用的信息(如图 3-2 所示,有棱台, a, b, h, F 共 5 条信息),同时又要及时提取记忆网络中的有关信息(如回想:棱台的定义、棱锥的体积公式、相似三角形的性质定理、反映几何结构的运算、调动求解立体几何问题的经验积累等 6 条信息),并相应将两组信息资源作合乎逻辑的有效组合。这当中,起调控作用的关键是如何构思出一个成功的计划(包括解题策略)。由这一案例,每一个解题者可以根据自己的知识经验各自进一步领悟关于如何制订计划的普遍建议或模式。

(3) 在解题方法上,这个案例是分析法的一次成功应用,从结论出发由后往前找成立的充分条件。为了求 F ,我们只需求 A, B (由棱台体积到棱锥体积的转化——由未知到已知,化归);为了求 A, B ,我们只需求 x (由体积计算到线段计算的转化——由复杂到简单,降维);为了求 x ,我们只需建立关于 x 的方程(由几何到代数的转化——数形结合);最后,解方程求 x ,解题的思路就畅通了。在当初各自孤立而空旷的画面上(图 3-1),形成了一个联结未知与已知间的不中断网络(图 3-5)。书写只不过是循相反次序将网络图作一叙述。这个过程显示了分析与综合的关系,“分析自然先行,综合后继;分析是创造,综合是执行;分析是制订一个计划,综合是执行这个计划”。

(4) 在思维策略上,这个案例是“三层次解决”的一次成功应用。首先是一般性解决(策略水平上的解决),把 F 转化为 A, B 的求解($F=B-A$),就明确了解题的总体方向;其次是功能性解决(方法水平上的解决),发挥组合与分解、相似形、解方程等方法的解题功能;最后是特殊性解决(技能水平上的解决),比如按照棱台的几何结构作图、添辅助线找出相似三角形、求出方程的解、具体演算体积公式等,是对推理步骤和运算细节作实际完成。

(5) 在心理机制上,这个案例呈现出“激活—扩散”的基本过程。首先在正四棱台(条件)求体积(结论)的启发下,激活了记忆网络中棱台的几何结构和棱锥的体积公式。然后,沿着体积计算的接线向外扩散,依次激活截面知识、相似三角形知识、解方程知识(参见图 3-1~图 3-5)……直到条件与结论之间的网络沟通。这种“激活—扩散”的观点,正是数学证明思维中心理过程的一种解释。

(6) 在立体几何学科方法上,这是“组合与分解”的一次成功应用。首先把

棱台补充(组合)为棱锥,然后再把棱锥截成(分解)棱台并作出截面,这种做法在求棱锥体积时曾经用过(先组合成一个棱柱、再分解为三个棱锥),它又一次向我们展示“能割善补”是解决立体几何问题的一个诀窍,而“平面化”的思考则是沟通立体几何与平面几何的一座重要桥梁。这些都可以用于求解其他立体几何问题,并且作为一般化的思想(化归、降维)还可以用于其他学科。

(7)“你能否用别的方法导出这个结果?”在信念上,我们应该永远而坚定地作出肯定的回答,操作上未实现只是能力问题或暂时现象。对于本例,按照化棱台为棱锥的同样想法,可以有下面的解法。

如图 3-6 所示,正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,联结 DA_1, DB_1, DC_1, DB , 将其分成三个四棱锥 $D-A_1B_1C_1D_1, D-AA_1B_1B, D-BB_1C_1C$, 其中

$$V_{D-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}b^2h,$$

$$V_{D-AA_1B_1B} = V_{D-BB_1C_1C} \text{ (等底等高)}。$$

为了求 $V_{D-AA_1B_1B}$, 我们联结 AB_1 , 将其分为两个三棱锥 $D-ABB_1$ 与 $D-AA_1B_1$ (图 3-7), 因

$$S_{\triangle AA_1B_1} = \frac{b}{a}S_{\triangle ABB_1},$$

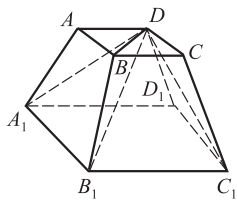


图 3-6

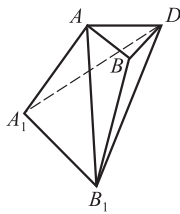


图 3-7

故

$$V_{D-AA_1B_1} = \frac{b}{a}V_{D-ABB_1},$$

但

$$V_{D-ABB_1} = V_{B_1-ABD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2h = \frac{a^2}{6}h,$$

故

$$\begin{aligned} V_{D-AA_1B_1B} &= V_{D-ABB_1} + V_{D-AA_1B_1} \\ &= \frac{a^2}{6}h + \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{6}h \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2+ab}{6}h,$$

从而

$$\begin{aligned} V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} &= V_{D-AA_1B_1B} + V_{D-BB_1C_1C} + V_{D-A_1B_1C_1D_1} \\ &= \frac{a^2+ab}{6}h + \frac{a^2+ab}{6}h + \frac{b^2}{3}h \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}h. \end{aligned}$$

(8) “你能不能把这一结果或方法用于其他问题?”能,至少我们可以由正四棱台体积公式一般化为棱台体积公式(方法是一样的)。注意到

$$a^2 = S_1, \quad b^2 = S_2, \quad ab = \sqrt{S_1 S_2},$$

可得出一般棱台的体积公式为

$$V_{\text{台}} = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h.$$

“怎样解题”表就“怎样解题”“教师应教学生做些什么”等问题,把“解题中典型有用的智力活动”,按照正常人解决问题时思维的自然过程分成四个阶段——了解问题、拟订计划、实行计划、回顾,从而描绘出解题理论的一个总体轮廓,也组成了一个完整的解题教学系统。既体现常识性,又体现由常识上升为理论(普遍性)的自觉努力。

这四个阶段中“实行计划”虽为主体工作,但较为容易,是思路打通之后具体实施信息资源的逻辑配置,“我们所需要的只是耐心”;“了解问题”是认识、并对问题进行表征的过程,是成功解决问题的一个必要前提;与前两者相比,“回顾”是最容易被忽视的阶段,波利亚将其作为解题的必要环节而固定下来,是一个有远见的做法,在整个解题表中“拟订计划”是关键环节和核心内容。

“拟订计划”的过程是探索解题思路的过程,波利亚建议分两步走:第一,努力在已知与未知之间找出直接的联系(模式识别等);第二,如果找不出直接的联系,就对原来的问题作出某些必要的变更或修改,引进辅助问题。为此,波利亚又进一步建议:看着未知数,回到定义去,重新表述问题,考虑相关问题,分解或重新组合,特殊化、一般化、类比等,积极激发思维,努力变化问题。这实际上是阐述和应用解题策略,并进行资源的提取与分配,基础是“过去的经验和已有的知识”(也是一种解题力量)。

于是,这个系统就集解题程序、解题基础、解题策略、解题方法等于一身,融理论与实践于一体。

第三节 建构主义的数学教育理论

建构主义(constructivism)的教育理论,从哲学上看,乃是一种认识论。它是认知心理学的新发展,在教育领域中具有方法论上的意义。

建构主义是一种关于人如何学习的理论,其中的三个最重要的认识论信念是:

- 知识不是通过感官或交流被动获得的,而是通过认识主体的反省抽象^①来主动建构的。
- 学习者带着个人的经验和已有的知识进入新的学习情景的,这些经验和知识在新的学习中具有重要的作用。
- 学习是一个自我适应(同化与顺应)的过程。儿童是在与周围环境相互作用的过程中,逐步建构起关于外部世界的知识,从而使自身认知结构得到发展。

基于上述三个信念,演变出了许多不同的建构主义理论,如以皮亚杰和凯里(Kelly)为代表的个体建构主义;以冯·格拉斯菲尔德为代表的激进建构主义;以索鲁门(Joan Soloman)为代表的社会建构论;以杰根(K. J. Gergen)为代表的社会建构主义;以泰勒(P. C. Taylor)为代表的批评建构主义和以科本(W. W. Cobem)为代表的情境建构主义。

建构主义在数学教育中的应用起始于20世纪的80年代末,哥登(Goldin, 1990)把它归结为六条教学原则:(1)数学是一种人类创造或建构的产物,而不是一种客观的真理;(2)数学的意义是学习者自我建构的,而不是教师传授的;(3)数学学习的有效途径是通过有指导的发现、有意义的应用和问题解决;(4)数学学习需要深层次的评价,而不是简单的技能测验;(5)课堂教学中最重要的是创设有效的学习环境;(6)教师教育的目标是让教师理解数学知识的建构特征。美国数学教师协会在1989年出版的《中小学数学课程与评价标准》被看作是建构主义的产物。

以下简要阐述建构主义理论涉及数学教育的一些论述。

一、什么是数学知识

建构主义学说认为,数学知识并非绝对真理,即不是现实世界的纯粹客观的

^① 所谓反省抽象是人们对客体操作的内化过程,而不仅是对客体的一系列观察过程。

反映。数学只不过是人们对客观世界的一种解释、假设或假说,并将随着人们认识程度的深入而不断地变革、升华和改写,直至出现新的解释和假设。

举例来说,欧氏几何学中的点没有大小,边没有宽度。但是,黑板上画的三角形,线条却有宽度,也不笔直,都不是抽象的几何意义上的三角形。每个人头脑中的三角形的大小、形状是不一样的。各人有各人对三角形的不同解释,但是彼此能够理解。这种几何学的三角形,只存在于人的头脑之中,是人的头脑主动建构的结果。

学习有些数学内容,很像学习下象棋。那些走棋的规则、输赢的判定,都不是来源于现实,而是人们之间的一种约定。作为一种约定的数学,也只能靠主观建构。

这就是说,人脑不是“照相机”,数学知识经过了人脑的加工,在很大程度上是人的思维的产物。马克思主义认识论一向主张“能动的反映论”,反对“机械反映论”。

但是,一部分建构主义学者认为,数学知识依个人的主观认识而定,任何知识在为个体接受之前,对个体来说是没有什么意义的,也无权威可言。人的认识是否符合客观现实,是不能检验的,也不必要检验。这就会导向“不可知论”。实际上,经过人们反复实践的检验,现实世界是可以认识的,科学真理(包括数学真理)确实是现实世界的反映。人的能动性反映在于对客观真理的发现、整理、抽象、组织和系统化。如果听信某些极端建构主义学者的观点,就会走向主观唯心主义,需要注意分辨。

二、什么是数学理解

既然建构主义学说认为“数学知识不可能以实体的形式存在于个体之外”,那么真正的理解只能是由学习者自身基于自己的经验背景而建构起来。理解,取决于个人特定情况下的学习活动过程,否则就是死记硬背或生吞活剥,是被动的复制式的学习。按照建构主义的观点,数学课本上的知识,只是一种关于某种现象的较为可靠的解释或假设,并不是解释现实世界的“绝对参照”。

建构主义在这里强调“学生是学习的主体”。学生的理解只能由学生自己去进行,而且要通过对新知识进行分析、检验和批判才能真正做到理解。这无疑是正确的。例如,三角形内角和为 180° ,可以量一量就相信了。但是,要真正理解它,则必须批判用“量”的论证方法是不严密的,通过平行公理推论之后,才是可靠的数学结论。批判之后才会有真正的“理解”。因而,现在教科书中,用量一量的办法来说明三角形内角和定理的正确性,只不过是一种“解释”而已,不是绝对参照。

建构主义的有些观点,我们需要进行分析。例如,一些学者认为,任何知识在为个体接受之前,对个体来说没有什么意义,也无权威可言。所以,教学不能把知识作为预先决定了的东西教给学生,不要以我们对知识的理解方式来作为让学生接受的理由,用社会性的权威去压服学生。依照这种观点,完全排除了人类积累的知识的权威性,否定“接受性”学习,否定教科书的重要性,否定教师的主导作用,那就会走向主观唯心的误区。

三、儿童如何学习数学

建构主义者认为,学习有两种方式:一种是复制式(transcriptive),另一种是建构式(constructive)。

建构主义教育理论批评以前的数学教学,只是通过教师讲授、学生练习,最后用测试手段检查学生是否掌握就完了。这种教学法假定学生能在自己头脑中建立教师观念的完整的复制品。然而,事实是,儿童常常出现系统错误和误解,其原因在于他们不能建构地理解数学,因而执行了不正确的演算过程。

建构主义学者还通过大量案例分析发现:儿童入学前就发展了许多非形式数学知识,这些知识对儿童来说很有意义,也很有趣味;非形式数学常常是主动建构而不是被动接受的。儿童入学后才学习用符号写成的形式数学。然而研究表明,“儿童常常不按照教师的方式去做数学。”也就是说,儿童不只是模仿和接受成人的策略和思维模式,他们要用自己经验中已有的数学知识去过滤和解释新信息,以致同化它。如果儿童看不出教师所呈现的信息和他们已有的数学知识之间的联系,那么,教师的讲授如对牛弹琴。

比如,美国有一个学生,认为“6是奇数”,理由是“6可以写成 2×3 ,而3是奇数,所以6是奇数”。这就是说,这位学生有他自己关于“奇数”的定义,他根据自己学习数学的经验,用自己的方式理解数学。这表明,我们只是按照教师自己理解的方式,强迫学生接受是不可取的。

建构主义的这些观点,当然有一定的道理。数学教学应该符合学生的年龄特征、知识基础以及个性特点。教学不能不顾教学对象盲目施教。但是,大多数学生的数学基础、思维习惯、认知规律还是相仿的,有共同的一般规律。这是学校教学的主要依据。个别教育可以做一些,但要和班级的集体教学互相配合与补充,完全否定集体教学也是不对的。

四、教师如何开展课堂教学

目前大多数学校里的教学程序是:复习(介绍性地)、讲解新课、课堂练习(个别)。这种教学法受到建构主义者的批评。他们认为,传统教学方式不仅不

能向学生提供使用高认知水平技能的场所,而且容易使学生产生误解(misconception)。

建构主义强调,儿童并不是空着脑袋进入学习情境中的。儿童和成人(专家)对同一数学观念的理解有很大差别,基于不同体验和材料,观念具有不同的形式。但是,人们的主观建构是不可知的。教师无法确切地知道学生的建构是怎么样的。我们能够做的是相互交流,尽可能找到一部分的共同点。正如前面提到的下象棋一样,数学规则的掌握,也是依靠交流,彼此遵守一些约定,能够寻求某些共识。具体做法包括:(1)通过使用的语言、选择的参照、选取的例子来评估他们结构之间的一致性;(2)通过考虑那些内在一致的结构之间的表面水平来评估另一个人的建构能力。不管他们表面形式多么不同,教师必须尽可能考虑学生的建构,以便提供有效的合理的指导。

这样一来,数学教师就不能无视学习者的已有知识经验,简单地从外部对学习者进行“填灌”,而应把学习者原有的知识经验作为新知识的生长点,引导学习者从原有的知识经验中,生长新的知识经验。在建构主义的课堂上,教师不应仅仅作为知识的呈现者,也不是知识权威的象征,而应该重视学生自己对各种现象的理解,倾听他们的看法,思考他们这些想法的由来,并以此为据,引导学生丰富或调整自己的解释。总之,教学不是教师简单地告诉学生就可以奏效和完成的。

与传统教学的三个假设相对应的,建构主义指导下的课堂教学是基于如下三个基本假设:

教师必须建立学生理解的数学模式,教师应该建立反映每个同学建构状况的“卷宗”,以便判定每个学生建构能力的强弱;

教学是师生、生生之间的互动;

学生自己决定建构是否合理。

根据上述教学目的和假设,一个数学教师在建构主义的课堂上要做以下六件事:

- 加强学生的自我管理和激励他们为自己的学习负责;
- 发展学生的反省思维;
- 建立学生建构数学的“卷宗”;
- 观察且参与学生尝试、辨认与选择解题途径的活动;
- 反思与回顾解题途径;
- 明确活动、学习材料的目的。

这些都说明,教师要关注学生的思想以及他们对自己研究的问题建构的数学意义,鼓励学生提出多种解题的方式,寻求对别人解法的理解,承担发现和改

正错误的责任。为了适应建构主义指导下的数学教学,教师必须理解学生的数学现实、理解人类思考数学的现实、理解教学现实。

这样的教学方式,完全是个性化的教学,符合自主探索、创新的学习诉求。但是,这样的教学如果取消了班级授课和共同练习,不再进行集体检测和评价,教学效率就会降低。因此,实际上是否可行,值得怀疑。

五、谨慎地吸收建构主义的合理成分

我们要再次提出,建构主义确实对人的认识过程,包括学生的学习过程进行了认识论的分析,具有一定的科学价值。但是,正如我们前面所提到的那样,建构主义在哲学上具有主观唯心主义的成分,在如何将建构主义运用到数学教学时,更有一些过分极端的提法。例如,在美国的《数学论坛》网站(<http://www.mathforum.com>)上对“什么是建构主义”的回答是:

“学生需要对每一个数学概念构造自己的理解,使得‘教’的作用不再是演讲、解释,或者企图去‘传送’知识,而是为促使学生进行心智建构创设学习环境和条件。这种教学方法的关键,是将每一个数学概念按皮亚杰的知识理论分解成许多发展性的步骤,这些步骤的确定要基于对学生的观察和谈话。”

按照这样的定义,教师不要演讲了,也不能传送知识了,教师只要创设环境让学生去建构就行了。于是,教师在课堂上的“主导作用”“示范作用”不再提了,教师只能是旁观的“组织者、合作者、引导者”。这样的提法是有害的。

事实上,我们同样主张“学生是学习的主体”。从来拒绝“学生头脑是一只空桶,可以往里面注入知识”的说法。俗话说“师傅领进门,修行在个人”,也是这个意思。但是,教师有传承前人经验的任务,教师在课堂上赋有“传授”知识的任务,也具有主导课堂教学的责任。所需要的是,教学应当运用启发式,符合学生主体认识的规律。

此外,建构主义毕竟只是一种认识论。但是教学过程不能等同于认识论。认识论研究只关注如何认识事物,却不管认识的速度和效率,而教学则是有目的、有计划、按照“课程标准”目标实行的班级集体认识活动。数学课程的目标,是要把几千年来人类积累的数学知识的基础部分,在短短的十来年中让学生学习并能理解和掌握。这需要很高的教学效率。但是,建构主义教学任凭学生的兴趣,自由摸索,却根本不谈认识效率。没有效率的教学是走不远的。

总之,对于建构主义学说,我们应当吸取其中的精华,拒绝一些“极端的”“唯心的”成分,才能真正有助于我国的教育改革。

以下是一些参考文献

[1] 郑毓信,等. 认知科学,建构主义与数学教育. 上海:上海教育出版

社,1998.

[2] 徐斌艳.数学教育展望.上海:华东师范大学出版社,2001.

[3] Goldin, G. A. :1990, Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics, in R. B. Davis, C. A. Maher and N. Noddings (eds.), Journal for Research in Mathematics Education Monograph No. 4: Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics, pp.31-47, Reston, VA.

第四节 数学教育的中国道路

清末民初,我国从西方引进基础教育的数学课程体系。一百多年来,兼收并蓄,博采众长,逐渐形成了一条具有中国特色的数学教育道路。进入21世纪,中国数学教育已经成为世界同行关注的一个焦点。中国数学教育正在大步走向世界。这一节,我们将探讨数学教育中国道路的形成,研究其基本理念,总结我国数学课堂教学有别于西方的主要特征。

一、中国数学教育道路的基本内涵

辛亥革命以来的一百年,乃是追赶西方文明的一百年。数学教育也是如此。我们先学日本,辗转引进赫尔巴特的教育学说。继之崇尚欧美,包括美国杜威的进步主义教育。1949年建国之后,又曾全面学习苏联(一个数学超级大国)的经验。实行改革开放政策之后,更是全方位地引进欧美数学教育理念。可以说,世界上没有哪一个国家,像中国这样,既具有悠久的数学教育文化积淀,又能全方位地从包括苏联和美国在内的国外数学教育吸取营养。

世界认识中国数学教育,是从中学生参加国际数学奥林匹克竞赛开始的。从1989年开始,中国在多数年份获得这一项竞赛的总分第一,为世界瞩目。至于中国数学教育大面积的状况,则以1989年的国际教育测试IAEP(International Assessment of Education Progress)为肇始。在那次周密组织的抽样测试中,中国大陆13岁学生的数学成绩以80分的正确率位居第一,领先于第二位的韩国和中国台湾(73分)。中国上海参加国际PISA测试,2009年和2012年数学成绩连续居于第一位。

这一现象,很自然地引起国外教育界对中国数学教育的关注。1996年,曾在香港任教的澳大利亚著名学者维金斯和别格斯合著的《The Chinese Learner》,提出了一个问题:“为什么华人学习者能够取得优良的学习成绩,但是他们的教

学过程却看起来非常陈旧?”^①这就是所谓的“中国学习者悖论”。西方学者无法理解,为什么教育经费投入严重不足的中国,却能够取得优良的国际测试成绩?为什么中国数学教育方式看起来属于死记硬背一类,中小学生却能够在数学理解上超过他们的国外同辈?西方发达国家建立了许多数学教育理论,固然能够揭示一些数学认知的普适规律,但却无法解释中国数学教育所取得的成就,因而称之为“悖论”。

实际上,中国数学教育能够有成功的一面,并不是不能解释的“悖论”。只是由于没有系统地研究中国数学教育的特殊道路,因而无法加以解释而已。

这里,我们不妨回忆一位老教育家的真知灼见。华东师范大学刘佛年教授这样说过:

我从旧中国的教育看到新中国的教育,经历过几十年来的风风雨雨。教育无非是两种。一种是讲授式,教师以高水平、启发式的讲解,让学生容易接受。代表人物是赫尔巴特、夸美纽斯和苏联的凯洛夫。另一种是活动式,创设情境,让学生在活动中探索,主动地获得知识。代表人物是杜威。两者各有长短。那么我们中国应该采取什么态度呢?那就是兼容并包,不能走极端。^②

这就是说,兼容并包,把国际上的各种优秀教育理念,综合地进行理论分析和实践检验,中国数学教育已经走出了一条具有东方智慧的道路。

那么,现代中国数学教育如何定位?数学教育的“中国道路”应该怎样表述?我们不妨作如下的概括:

中国数学教育,以人的全面发展理论为指导,继承中国几千年来的优秀教育传统,采取兼容并包,博采众长、扎根本土、勇于实践的态度,进行了百年实践。

中国数学教育特色的核心是:“在良好的数学基础上谋求学生的数学发展。”这里的“数学基础”主要是数学基础知识和基本技能以及三大数学能力(数学运算能力、空间想象能力、逻辑思维能力);数学发展是指:注重基本数学活动经验的积累,提高学生用基本数学思想方法分析问题和解决问题能力,促进学生在德、智、体等各方面的全面发展。这一内涵,现在简称为“四基”数学教育。

中国数学教育避免走极端。主张教师主导作用与学生主体性的辩证统一,打好基础与创新发展的有效平衡,接受性学习和探究性学习的适度对接,数学思维中理解与熟练的交互影响,数学学科知识与教学知识的有机结合。

与此相应的教学方式突出“数学内容本质的理解”。其主要特征包括,数学

^① D. Witkins & J. Biggs: The Chinese Learner. Cultural, Psychological and Contextual Influences. CERC & ACER. Hong Kong, 1996.

^② 摘自凤凰网:2011年10月15日发布的凤凰视频《华东师大名师云集,入选新中国首批重点高校》(<http://v.ifeng.com/news/society/201110/e3c57bcb-810c-45a8-b1d2-fb623463ea96.shtml>)

新知的导入教学,数学尝试教学,教师主导下的师班互动教学,数学变式教学,以及数学思想方法教学等。

我们将在下面进一步论述数学教育中国道路的理念和特征。

二、中国数学教育道路的文化背景

中国的数学教育,重视基本知识和基本技能的教学,并坚持在此基础上谋求学生的全面发展。形成这样的理念绝非偶然,这是几千年来中华文明发展的必然结果。

首先是农耕文化的影响。中国历史上,从天子亲耕,皇后亲蚕,到循吏劝农,无非就是要调动农民的生产积极性,使农民勤于生产。中国农民在田地里的辛勤劳动美德,为中国读书人提供了“勤奋”的榜样。勤劳的美德移到教育上来,就是强调“苦读”。精耕细作的勤奋,反映在数学教育上,就会倡导熟能生巧,要求背诵“九九表”,熟悉算法,注重解题。

其次是儒家文化中的演绎思考的影响。儒家学说在整体上作为演绎体系呈现。这就是说,儒家经典相当于公理;大学问家的注释,相当于由公理出发进行的推理;读书人写八股文章,只是将公理和推理拼接起来的一个作业。因此,在学术逻辑架构上,数学和儒家并不发生抵触。事实上,清朝统治者从来没有害怕过西方数学,更没有反对过西方数学。

第三是考试文化对数学教学具有正面和负面的作用。正面作用是:激励机制,明确方向;重视基础,鼓励书面表达,完美准确地给出答案。负面作用在于功利主义倾向,如“书中自有黄金屋”“学而优则仕”等等。

第四是考据文化对数学教育的影响。清代中叶以戴震、阮元等为代表的考据学派,注重证据的考证研究方法,与数学的逻辑严谨性十分接近。考据学派中的相当一部分人都是数学家,并非偶然。

最后则是中华教育文化的影响。其中既有“教学相长”“温故知新”“举一反三”“诲人不倦”“传道、授业、解惑”等经典传统的影响,也包括“熟能生巧”“台上一分钟、台下十年功”“师父领进门、修行在个人”等民间俗谚的影响。

以上这些文化背景,已经深入到中国广大数学教育工作者的血液之中,成为支配自己教育行为的一项指针。

三、中国数学教育道路的历史形成

中国的现代数学教育和整个教育的前进步伐一样,一方面以实事求是和兼容并包的方式,吸取国际上的优秀经验;另一方面又按照固有教育文化传统的浸润,进行本土化的改造。这一进程共分四个阶段:

第一阶段(1911—1949),引进国外各种不同的教育学说,以及20世纪初国际数学教育改革的进展信息,初建中国数学教育。

第二阶段(1949—1966),在学习苏联的环境下,经过1958年教育革命的曲折,总结自己的实践经验,初步形成了中国数学教育的特色。

第三阶段(1966—2000),对“文革”十年的拨乱反正,引进欧美教育理论,提出素质教育。中国数学教育坚持“双基数学教学”,开创数学思想方法的教学。

第四阶段(2000—)新世纪的课程改革自上而下地提出“自主、探究、合作”的教学模式,通过不断地实践、辩论、调整,《义务教育数学课程标准(2011年版)》获得了适度的平衡,倡导“四基”数学教学。

中国的数学教育一直处在改革的漩涡之中。确实,要前进就必须改革。但是,教育改革不能折腾。这方面我们既有正面的经验,也有反面的教训。以下让我们聚焦于几个重要的数学教育事件。

1. 关于杜威教育学说对数学教育的影响

约翰·杜威(John Dewey, 1859—1952)是美国进步主义教育运动的代表。1919年,杜威来华访问,足迹遍及14个省市。“五四”前后,杜威的实用主义教育思想是当时最重要的教育思潮。影响之大,超乎寻常^①。

杜威的学生、美国教育家克伯屈(W.H.Kilpatrick)提出“设计教学法”,帕克赫斯特(H.H.Parkhurst)倡导“道尔顿制”、华虚朋(C.W.Washburne)则有“文纳特卡制”等具体的教学模式。帕克赫斯特、克伯屈、华虚朋本人还先后于1925年7月、1927年3月和1931年2月访问中国,宣传他们的教育理论和方法。杜威的一些学生先后在北京、南京、上海、苏州等地开办了一些实验学校^②。

但是,中国教育家对杜威教育思想和教学实验进行了筛选,抵制了其中的一些错误做法。我国近现代著名教育家廖世承,对南京东南大学附中的道尔顿制实验,与普通班进行对比研究,写成的《东大附中道尔顿制实验报告》一书。结论是:

优点方面,道尔顿制较能适应学生个性;教员可以因此经常与学生接触;劣等学生可多得指导的机会;大多数学生因之而增加自动的能力。缺点是费时;不经济;练习簿先后交免不了抄袭;懒惰者不易督促。困难在于因学生学程前后参差不齐,有时牵动太多,不免增加教师与办事人员的困难;教师特别费力、费时。……道尔顿制的特色“在自由与合作”,但根据我国具体条件很难实行,“班级教学虽然有缺点,但也有它的特色”。

^① 单中惠.杜威教育思想与近代中国教育[J].教育史研究,2002,(1).

^② 单中惠.杜威在中国[N].中国教育报,2007-06-15(4).

这一报告,显示了杜威的实用主义教育理论在教学层面并不成功。1926年以后,中国的道尔顿制实验热潮急速衰退,名噪一时的道尔顿制实验从此偃旗息鼓^①。

杜威的实用主义教育,只认可满足日常生活需要的“消费数学”,全盘排斥充满理性精神的古希腊数学,甚至根本否认中小学课程包含“几何学”“代数学”的必要性。

克伯屈原是一位数学教师,后来投入杜威门下。他在20世纪20年代曾有两段十分惊人的话:“就日常生活中的思维类型而言,数学害大于利。现有中学的代数学和几何学的学习不应继续下去”;“我们过去教的代数和几何,不是太少,而是太多了”^②。克伯屈在中国演讲中甚至明确地说:“有许多科目,例如代数、几何、论理学学科,若不是为了升学起见,完全无用。宜选用适合中国国情的课程”^③。这种排斥几何学的观点,受到中国数学教育界的抵制。

傅种孙先生(1898—1962)是民国时期中国数学教育的领袖人物。20世纪20年代初,傅种孙曾在北师大附中兼课。钱学森回忆说:“听傅(种孙)老师讲几何课,使我第一次懂得了什么是严谨科学”^④。

美国实用主义教育对数学教育的歧视,也受到我国著名数学家陈建功的批评与调侃^⑤:

哥伦比亚大学教育学教授司内屯竟这样说:“‘消费者的数学’——算术的一部分——自然人人所必需不可以省略,但是中学校的代数和几何,未必人人所必需,不必作为正科,应改为随意科(选修课)。至于数学的陶冶价值,几乎无穷小”……我们于此可以断言:美国数学教育的特色,是在培养“小市民性”。美国的数学教科书,是富于小市民的实用性和学习心理的色彩。

仔细寻味可知,这些把数学仅仅用于消费性商业、为小市民服务的错误主张,正是杜威的实用主义教育观念所派生出来的。所幸的是,我国虽然曾经大规模推行杜威的实用主义教育,却没有完全跟着走。数学教育课程没有沦落为“小市民性”的消费数学。

① 汤才伯.现代教育宗师,办教育者楷模——纪念我国著名教育家、心理学家廖世承诞辰120周年[N].文汇报,2012-06-11(“文汇学人”专栏).

② W.H. Kilpatrick的一份报告,题为“The Problem of Mathematics in Secondary Education”, A REPORT OF THE COMMISSION ON THE REORGANIZATION OF SECONDARY EDUCATION, APPOINTED BY THE NATIONAL EDUCATION ASSOCIATION. (《中学教育中的数学问题》,来自全国教育协会聘请的中学教育重组委员会的报告.) WASHINGTON GOVERNMENT PRINTING OFFICE. BULLETIN, 1920, No.1.

③ 胡教昇,张鸣新.中国当前之教育问题[J].教育杂志,19(5,6).

④ 祁淑英,魏根发.钱学森[M].石家庄:花山文艺出版社,1997:15.

⑤ 陈建功.二十世纪的数学教育[J].中国数学杂志,1952(2).

2. 关于学习“苏联”数学教育的得与失

20 世纪 50 年代初,全面向苏联学习是国策之一,数学教育自不例外。初期的学习不免带有盲目的教条主义地照搬的缺陷。例如,苏联的中小学学制是 10 年,而我们的学制则是 12 年。1948 年东北人民政府教育部编译的苏联中小学数学教科书,除个别文字改动之外,将 10 年的内容全盘翻译过来作为我国 12 年的教学内容,这显然是不正确的。

但是,苏联的数学教材,秉承赫尔巴特学派的教育理念,追随培利改革运动,实践 F. 克莱因的先进数学教育主张。较之我国此前选用的来自英美的中学数学教材,显得更加系统、严谨、精练。这里我们仅以译自美国的《范氏大代数》和苏联教材作一比较,就会感觉到彼此的重大差异。

1951 年《范氏大代数》还在高中使用。高中的内容是:

基本演算,一元一次方程。联立一次方程系。除法变形。有理整式之因式。最高公因式和最低公倍式。有理分式。对称函数。二项式定理。开方。无理数、根式与分指数。二次方程式,二次方程之讨论,极大与极小。用二次方程可解之方程。联立方程能以二次方程解之者。不等式。不定一次方程式。比及比例。变数法。等差级数,等比级数,调和级数。递差法,高阶等差级数,插入法(删),对数。排列及组合。多项式定理。可能率。算学归纳法。方程论。

这里,函数称为“变数法”仅占很小比例,而且只是一种方法而已,没有放在中心地位。整体上还是反映了“以方程为纲”的思想。相比之下,苏联数学教材在初中就引入“函数”概念,介绍函数的三种表示,具体研究正比例函数和反比例函数。高中则加强函数教学,突出指数函数、对数函数、三角函数的教学,这些现在看来很自然的处理,在 20 世纪 50 年代却是一个根本的转变,一次数学思想上的革新。

总的来说,学习苏联数学教育使得我国的数学教育跟上了国际数学教育的前进步伐,培育了严谨、理性的学术风格;数学教学十分注意基础知识和基本技能的教学,强调逻辑思维、加强直观教学、重视联系实际。这些教学经验为以后数学“双基”教学的形成奠定了基础。

至于开始时全盘照搬苏联的教育体制和课程教材的做法,我们自己很快就纠正了。例如,苏联凯洛夫《教育学》的主张,我们开始时是全盘接受的。但是,不过十年光景,到了 1958 年开展教育革命,就开始批判凯洛夫的《教育学》了。当时提出的口号是“教育为无产阶级政治服务,与生产劳动相结合”。既然是“革命”,就要全盘否定此前的教育体系。于是,提出打倒欧家店(欧几里得);开门办学把学校办到工厂、农村,以劳动代替学习。“破除师道尊严”,鼓励由学生编教材。否定知识系统性,主张从生产实际和生活实际中进行教学。这时的数

学教育,出现了“公社数学”“车间数学”等名目。学生在生产劳动中学习数学,几何证明等理性思维内容全部废弃。甚至提倡学生编教材。这些做法,已经和苏联的凯洛夫的主张决裂。在某种程度上,倒是和以学生为中心、教育即社会的杜威教育主张有所契合。

“文革”十年动乱,是又一次更大的折腾,内容依然是批判“教师中心”“书本中心”“课堂中心”,实际上倡导的是“学生中心”“活动中心”“生产中心”。算术变成算账,几何变成画线,代数改为配置农药等。1979年开始拨乱反正,回到动乱之前。1963年的大纲再次成为数学教学的指导性文件。总之,建国的前30年,是在“折腾”中吸收苏联数学教育之长,又摒弃其缺点,兼收并蓄实行本土化的过程。“文革”以后经过拨乱反正,倡导数学素质教育,数学教育的中国道路逐渐形成。21世纪初进行的课程改革,又引起了一场争论,经过十年实践达到了新的平衡(详见本书第六章)。

由以上的几个案例可见,中国数学教育在动荡中不断地寻求科学合理的中间地带,形成适度的均衡。任何偏激的做法都是行不通的。

四、中国数学教育秉承的基本理念

数学教育和其他学科教育一样,都需要处理好一些基本的关系。在这些关系上,东方和西方的见解不尽相同。大体上是各执一端,都具有一定的片面性。在实践中,需要及时、适度的调整,取得平衡。中国数学教育,面对这些相互矛盾又相互依存的关系,兼容并包地形成了自己的一些认识。这些认识是:

- 教师主导与学生主体的辩证统一
- 打好基础与创新发展的有效平衡
- 数学思维中熟练与理解的交互作用
- 接受性学习与自主探究学习的适度对接
- 数学学科知识与教学知识的有机结合

下面我们分别加以论述。

1. 教师主导与学生主体的辩证统一

数学教学和所有教学过程一样,最基本关系是教师与学生的关系。赫尔巴特的经典教学理论,主张“教师中心”,杜威进步主义教育理论则主张“学生中心”,彼此各执一端。现代中国的教学理论则兼容并包,力求辩证统一的认识。一个比较完整的提法是:“在尊重教师主导作用的同时,更加注重培育学生的主动精神,鼓励学生的创造性思维。”(胡锦涛在两院院士大会上的讲话。2006)

在我国,教师在教学过程中是否起关键作用,早先并无大的争执。多年来,我们在教学中一向主张“学生是学习的主体”。按照马克思的能动的反映论,也

从来反对“学生头脑是一只空桶,可以往里面注入知识”的说法。教师有传承前人经验、赋有“传授”知识的任务,也具有主导课堂教学的责任。与此同时,教学应当运用启发式,使得教学符合学生主体认识的规律。可是,当20世纪90年代引进建构主义教育理念之后,由于对其无原则地追捧,才形成了否定教师主导作用的思潮。

然而,建构主义只是一种认识论。认识论研究只关注如何认识事物,怎么认识深刻就怎么去做,却不管认识的速度和效率。至于教学过程,则是有目的、有计划的,按照数学课程标准的目标要求实行的班级集体认识活动。数学课程的目标,是要把几千年来人类积累的数学知识的基础部分,在短短的10来年中让学生学习并能理解和掌握,这需要很高的教学效率。建构主义教学任凭学生的兴趣所至,自由摸索,不谈认识效率,因而是走不远的。

中国的主流教育观念,仍然认为教师应起主导作用,也就是领导(leading)和支配(dominant)的作用。韩愈《师说》中的“传道、授业、解惑”,尽管一些教育家认为这是以“教师为中心”的理念,应当废弃。但从社会层面看,这一论述仍然是民众的共识。

2. 打好基础与创新发展的有效平衡

基础与创新是一个恒久的话题。近代的数学教育历史表明,重大的数学教育改革,往往是以强调“打好基础”,还是强调“提倡创新”为线索展开。例如美国先是在20世纪60年代搞“新数学”运动,强调发现创新;失败后在20世纪70年代主张“回到基础”;20世纪80年代提出“问题解决”,再次倡导创新发展;2008年,美国总统任命的一个数学教育研究小组,经过两年的调查研究,正式公布的一项文件,题目是“为了成功需要基础”^①。这是美国的“翻烧饼”式折腾。

中国的情况也差不多。1958年“大跃进”,提出“教育与生产劳动相结合”的教育革命,把课堂搬到车间田头;1960年则回到“数学双基教学”。随后的“文革”年代,又将几何学改为“画线制图”,最后由于缺乏系统的知识,削弱了基础,20世纪80年代经过拨乱反正,又回到基础。

中小学教育是基础教育,要使学生在良好的基础上谋求发展。创新需要以坚实的基本知识和基本技能为基础,而建立基础又需要创新精神引领。因此,打好基础和谋求发展,正如鱼和熊掌,必须兼得。事实上,“优质教育=坚实基础+发展创新”。我们反对“在花岗岩基础上盖茅草房”,也反对“在沙滩上盖高楼大厦”。如果说中国数学教育与欧美国家有什么区别,最显著的特征之一在于

^① National Mathematics Advisory Panel. Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. Washington D.C.: U.S. Department of Education, 2008.

对基础的态度。流光溢彩的上层建筑往往掩盖了朴实无华的基础,以致在提倡创新的时候,往往会忽略基础的重要性。伟大的智者常常提醒我们要重视基础。牛顿说“如果说我看得比别人更远些,那是因为我站在巨人的肩膀上。”巨人的肩膀,就是牛顿创新的基础。

华罗庚先生这样论述基础的重要性:

“有人说,基础、基础,何时是了?天天打基础,何时是够?据我看来,要真正打好基础,有两个必经的过程:即‘由薄到厚’和‘由厚到薄’的过程。‘由薄到厚’是学习接受的过程,‘由厚到薄’是消化、提炼的过程。”

“经过由薄到厚和由厚到薄的过程,对所学的东西做到懂,彻底懂,经过消化的懂,我们的基础就算是真正地打好了,有了这个基础,以后的学习速度就可以大大加快,这个过程也体现了学习和科学研究上循序渐进的规律。”

吴文俊先生则认为:

“我非常赞成和推崇‘推陈出新’这句话。有了陈才有新,不能都讲新,没有陈哪来新!创新是要有基础的,只有了解得透,有较宽的知识面,才会有洞见,才有底气,才可能创新!”^①

两位数学大师的论述表明,学生的创新,主要在于把“陈”了解得透,把“厚书”读“薄”。

3. 数学思维中熟练与理解的交互作用

西方的数学教育讲究理解,认为熟练的演算和解题没有什么价值。但是中国的教育名言是“熟能生巧”,认为要创新,必须熟练。两者的强调重点不同。事实上,熟练和理解之间具有交互作用,两者是相辅相成的。

熟练需要必要的记忆,大多数中国教师认为要“先记忆,然后逐步理解它”。比如,虽然孩子们不理解为什么钢琴的指法练习要这样规定,但必须先记住它,然后再逐渐地理解它。与之相仿,我们起先并不了解语法,仅仅依靠记忆和模仿来学说母语。在中国的小学里,快速而精确地进行整数、小数和分数的计算,是一道靓丽的风景。

熟练才能提高效率。数学“双基”教学的一个重要理念是:为了提高数学思考的效率,我们必须有足够的计算速度。实践表明,必要的心算速度,能节省工作记忆的空间,以支持更高水平的数学思考。

熟能生巧是中国的教育古训,中国的一些著名科学家和数学家都能认同。其中的原因值得思考。

2004年9月13日,物理学大师杨振宁在清华大学给本科生讲“基础物理”,

^① 吴文俊.推陈出新 始能创新[N].文汇报,2007-11-14(6).

再次引发了学术界对“基础课”的重视。杨振宁有句话说:“对于基本概念的理解要变为直觉。”这是对“熟能生巧”的一种现代诠释。杨振宁的这句话告诉我们,对基本概念的理解,只做到说得清、道得明,会判别对象是否符合概念定义那是不够的。理解要达到“直觉”的程度,就要做到:无须停顿下来思考,就能够不假思索地做出判断。

2004年11月11日,数学大师陈省身接受中央电视台记者的采访。面对成功,陈省身说他只是熟能生巧而已。陈省身进一步阐述说:

所有这些东西一定要做得多了,比较熟练了,对于它的奥妙有了解,就有意思,所以比方说在厨房里头炒菜,炒个木须肉,这个菜炒了几十年以后,才能了解得很清楚。数学也是这样子,有些工作一定要重复,才能够精,才能够创新,才能做新的东西。

这就是说,从事数学研究,必须对研究的内容非常熟悉。一旦有一个思想火花,就会觉得眼前一亮,觉察出它与现存的认识有别,随即迅速思考,进行突破。如果基础不牢,就难以识别一些微小的变化,找到打开创新之门的缝隙。这是一个由“重复”到“精”再到“新”的过程。学习数学何尝不是如此?掌握一种数学思想方法,不能刚刚接触一个概念,就在那里讲创新。必须弄熟弄透,快速计算,走向理解。当然,这里的“熟”,不仅是滚瓜烂熟的“烂熟”,而是透彻理解的“精熟”。熟能生巧,是和刻苦钻研分不开的。

4. 接受性学习与自主探究学习的适度对接

耶鲁大学华裔教授蔡美儿的《虎妈战歌》,激起了东西方教育文化差异的热议。究其实质,无非是“家长严厉管制、孩子被动接受”和“家长宽松管理、孩子自主成长”的理念争执。

看东方:严管、纪律、苦读、作业、考试、技能、成绩,结果是善于自律具有文化修养的人(也可能只是善于考试、缺乏创意)。

看西方:自主、兴趣、选择、愉快、探究、创意,结果是善于思考具有创新精神的人(也可能导致放纵自流、虚度青春)。

数学教育,需要使得接受性学习和自主探究教学方式得到均衡发展。中小学课程里有大量的基本技能训练要求,在一开始时无法说清为什么要这样做,只能当作平台接受下来。例如初中的“有理数运算”法则、幂、指数,以及有理式的四则运算规则,合并同类项、配方、因式分解等技能,都需要先接受下来,以后慢慢消化理解。

就因式分解而论,为什么要将一个多项式分成两个多项式的乘积?这在一开始是无法说明白的。我们只能从“和差化积”“积化和差”这种哲学上的“互逆”机制上加以解释。只是到了求解一元二次方程时才显示出,将一个二次三

项式分解为两个一次式的乘积就可以求出两个根。其作用才得到初步显现。这就是说,在教学过程中,先知其然而后知其所以然,是不可避免的事情。中国数学教育,要求教师善于用启发式的方法让学生有意义地、某种程度上是被动接受地进行学习;与此同时,适度地提倡探究性学习,使二者得到有效平衡。

5. 数学学科知识与教学知识的有机结合

在数学专业与教育修养的关系上,一般地说,中国强调教师的数学素养,而西方更强调教师的教育素养。中国数学老师认为数学是本体。我们常说“要给学生一杯水,自己就要有一桶水”。所谓“一桶水”就是指教师要有高标准的数学理解。在学科和教育两者之间,学科是本位的。教什么永远比怎么教更重要,就像吃什么比怎样吃(刀叉还是筷子)更重要一样。这种认识一直受到一些教育家的批评,但是我们仍然坚持着。

马立平博士的名著《小学数学的掌握与教学》^①,将中国和美国小学教师关于数学理解的不同作了比较。这里让我们摘引书中“引言”中的一段话,以及一个令人惊异的案例。

中国学生在数学能力国际比较研究中明显地优于美国。然而相矛盾的是,中国教师接受的数学教育却远远少于美国教师。大部分的中国小学教师只接受过11到12年的中小学教育——他们完成初中学习后,到师范学校学习两到三年。相反,大部分的美国教师接受16到18年的正规教育——获得大学的学士学位,再进行一到两年的后继学习。

中国教师在开始他们的教学生涯时,对数学的理解就要比美国的教师好。他们对所教数学内容的理解,以及同样重要的对初等数学的教学方式的理解,在他们整个的职业生涯中继续不断加深。的确,大约10%的中国教师,尽管缺乏正规教育,却仍然表现出对数学的深刻理解,而这些是美国教师极其缺乏的。

设想你正在教分数除法。为了让孩子理解意义,许多教师尝试把数学和其他的事物联系起来。我曾问:“为了教 $\frac{13}{4} \div \frac{1}{2}$,怎么样的故事或模型较好?”我为美国老师对这个问题的回答感到特别震惊。极少有教师能给出正确的回答。100多位职前教师、新教师以及有经验的教师中的绝大部分,虚构出的故事是表示了 $\frac{13}{4} \times \frac{1}{2}$,或者是 $\frac{13}{4} \div 2$ 。其他的许多教师还编不出来。

这些访谈让我想起,当时我作为一个上海的小学生是如何学习分数除法的。

^① Liping Ma. Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States [M]. Lawrence Erlbaum Associates Inc., 1999. 中译本:马立平. 小学数学的掌握和教学[M]. 李士琦, 吴颖康, 等, 译. 上海: 华东师范大学出版社, 2011.

老师帮助我们理解分数除法和正整数除法的关系——除法是乘法的逆运算,但分数除法推广了整数除法的意义:有包含模型(在 $\frac{13}{4}$ 中有多少个 $\frac{1}{2}$)及等分模型(求一个数使得它的一半是 $\frac{13}{4}$)。后来,我自己成了一名小学教师,我的小学老师对分数除法的理解,是我的同事们的典型理解。然而,怎么会有这么多美国教师不能表现出这样的理解?

马立平博士的论述,已经鲜明地揭示了中国数学教育的一个特征:必须充分重视教师的学科知识,教育学知识必须和数学学科知识有机结合。这是提高数学教学质量的根本之路。

正是以上5个基本理念上的差异,形成了数学教育的中国特色。

五、中国数学课堂教学的6个特征

中国数学教育具有6个特征,这就是:教学导入,尝试教学,师班互动,变式练习,提炼数学思想方法,以及正在发展为“四基”的双基教学。

这6个特征的一个特点是,贯穿于课堂教学的始终。晚近以来提倡的“自主、合作、探究”的教学理念,实际上只关注了认知过程的前半段。难道学习者一旦“探究”出来,学习过程就结束了?事实上,学习过程还有后半段,即巩固、小结和升华。变式练习,数学思想方法的提炼,推陈出新的反思,是必须强调的重要措施。这6个特征,有些与国外的某些数学教育理念相类似,但是具有自己的特色,更加具体,具有可操作性;有一些则是国外所没有的创新。下面我们分别加以论述。

1. 数学新知的“导入”艺术丰富了情境创设的教学内涵

导入教学,是在课堂教学开始的适宜时刻、用适当的方式和适当的时间成本,可操作性地运用于课堂教学,是一种本土化了的教學艺术。导入方式,除了现实“情境呈现”之外,还包括“假想模拟”“悬念设置”“故事陈述”“旧课复习”“提问诱导”“习题评点”“搭桥”“比较剖析”等手段。

情境创设多半用在课堂教学的开始阶段,因而情境创设可以成为教学导入的一种特定方式。但是,由于数学的抽象特性,就中小学数学教学内容而言,能够设置与学生的日常生活相联系的“情境”,毕竟是少数,而且多半是一些消费数学——买卖东西情境。许多数学课的内容,尤其是大量的“数与式”的运算规则的程序性数学内容,包括有理数运算规则、因式分解、合并同类项、配方、幂和指数运算法则等内容,很难设置现实生活的情境。即使设计出来,也十分勉强。“负负得正”的计算规则,至今也没有一个为大家公认的“生活情境”加以支持。

但是,教学导入则可以十分灵活地加以设计运用。恰当地运用“导入”教学,乃是一门丰富多彩的教学艺术。中国数学教育在这面积累了大量的实践经验。

2. “尝试教学”体现了学生进行数学“探究”的教学特点

中国数学教育实行尝试教学。20世纪80年代,顾泠沅领导的“青浦经验”,提出“尝试指导、效果回授”的教学策略^①。邱兴华倡导的“尝试教学法”^②,主张“学生能尝试,尝试能成功,成功能创新”,特征是“先试后导、先练后讲”,具有全国性重大影响。西南地区进行过大规模实践的“GX数学教学实验”,领导者陈重穆教授的32字诀里有“先做后说,师生共作”一句。这也是倡导学生先“做”,然后老师再说。这里同样是让学生先尝试一下。因此,中国传统的数学教学,并非如某些人一味批评的只有“机械记忆”“灌输模仿”。我们有自己的具有“探究性”的传统。尝试,较之探究,时间成本低得多,运用更加灵活,因而更加切合教学实际。

3. “师班互动”体现了适合中国国情的合作交流

中国的课堂人数相对较多。一般是40人,多的达60人。这样的大班上课,用分组讨论、汇报交流的教学方式,十分困难。那么,数学课堂如何避免“满堂灌”,实现师生互动呢?在长期的实践中,广大数学教师采用了“设计提问”“学生口述”“教师引导”“全班讨论”“黑板书写”“严谨表达”“互相纠正”等措施,进行合作学习。师生之间通过猜想、探究与“心算”,用数学语言进行“大声说”的交流,最后达成共识。这是一个具有中国特色的创造。据调查,“师班互动”是课堂师生互动的主要类型^③。

4. “变式练习”化解了重复操作的弊端

变式练习是中国数学教育的一个创造。中国数学教学中强调练习。在经历了尝试、探究过程之后,所获得的知识还必须加以巩固,拓广运用。此外,在练习中又要求有一定的强度、速度、深度,主张熟能生巧。但是,这种练习并非简单重复,而是依赖变式处理,获得新意。

数学的变式教学就是通过不同的角度、不同的侧面、不同的背景从多个方面变更所提供的数学对象的某些内涵以及数学问题的呈现形式,使数学内容的非本质特征时隐时现而本质特征保持不变的教学形式。

5. 数学教学中关注数学思想方法的提炼

20世纪80年代,徐利治提出了“数学思想方法”理论。可贵的是,这些数学思想方法不是停留在理论探讨上,而是付诸实践,成为每一个中国数学教师的共

① 青浦县数学教改实验小组.学会教学[M].北京:人民教育出版社,1991.

② 邱兴华.尝试教学法[M].福州:福建教育出版社,1995.

③ 曹一鸣,贺晨.初中数学课堂师生互动行为主体类型研究[J].数学教育学报,2009(5).

识。数学教师普遍具有数学思想方法的教学意识,注重掌握数学思想方法的内涵,将数学思想方法用于解题,并能够用数学思想方法进行总结和反思。这是中国数学教育的重要特征。到现在为止,西方的数学教育界还没有像我们这样地关注数学思想方法,也还没有能够直接与之对应的数学教育研究领域。

6. “四基”数学教学

晚近以来,许多有识之士建议将“双基”扩展为“四基”^①,即在数学基本知识和数学基本技能之上,再增加基本思想方法和基本活动经验。现在,这一建议已经写进《义务教育数学课程标准(2011年版)》。“四基”教学的核心依然是“在坚实的数学基础上谋求学生的全面发展”。“四基”之间相互关联的教学理论正在构建之中。一个初步的解释如图3-8所示的立方体。它的“长”与“宽”分别表示要让学生掌握基本知识,以及熟能生巧地习得基本技能;第三维的“高”则要求在知识和技能的基础上提炼、升华为数学思想方法。在形成这三项“基础”的过程中,注意数学基本经验的积累,在图示中的位置则是充填于三维体之内部。数学活动无处不在。

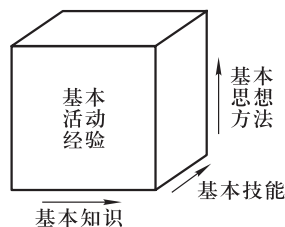


图 3-8

以上的特征,标志着中国数学教育不仅有独特的教学理念,还有在实践中形成的整套教学设计。

数学教育中国特色,是无数前辈学者的实践经验和理论探索的结晶,弥足珍贵,值得我们继承发扬。在进一步从理论上加以总结之后,平等地和国际数学教育界同行进行交流,为国际数学教育事业贡献我们的一份力量。与此同时,我们永远要虚心向世界上一切先进的成就学习,锐意改革,努力开创中国数学教育的新局面。

思考与练习

1. 弗赖登塔尔的教学理论是否符合你的教学理念?为什么?
2. 设计一个解决某类问题的解题表。
3. 根据你的解题经历,选一个典型的例子,详细介绍解题的具体过程。
4. 利用解题表,求解下题:如果3个有相同半径的圆过一点,则通过它们的

^① 双基指基本知识和基本技能,“四基”指加上基本数学方法和基本数学活动经验。参见:张奠宙,郑振初.“四基”数学教学模块的构建——兼谈数学思想方法的教学[J].数学教育学报,2011(10).

另外 3 个交点的圆具有相同的半径。

5. 对解题表,谈谈你想说的任何看法,写一篇不少于 1 000 字的小论文。
6. 你是否赞同建构主义数学教学理论?说说自己的看法。
7. 中国的双基数学教学应该怎样发展?如何避免它的异化?
8. 中国的数学教育有哪些特色?你的感受如何?

参 考 文 献

- [1] 课程教材研究所.20 世纪中国中小学课程标准·教学大纲汇编.北京:人民教育出版社,2002.
- [2] 中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准(实验稿).北京:北京师范大学出版社,2001.
- [3] 张奠宙.中国数学双基教学.上海:上海教育出版社,2006.
- [4] 张奠宙等.数学教育学.南昌:江西教育出版社,1990.
- [5] 顾明远.教育大辞典.上海:上海教育出版社,1999.
- [6] 教育部基础教育司.全日制义务教育数学课程标准解读(实验稿).北京:北京师范大学出版社,2002.
- [7] 顾泠沅,黄荣金,费兰伦斯·马顿.变式教学:促进有效的数学学习的中国方式.华人如何学数学第 12 章.南京:江苏教育出版社,2005.
- [8] 中国珠算协会三算教学研究会.三算结合教改实验的由来、现状和发展趋势.人民教育,1990(1).
- [9] 张奠宙,于波.数学教育的“中国道路”.上海:上海教育出版社,2013.