第 3 章　平面机构的运动分析

§3－1　机构运动分析的任务、目的和方法

机构运动分析的任务是在已知机构尺寸及原动件运动规律的情况下，确定机构中其他构件上某些点的轨迹、位移、速度及加速度和构件的角位移、角速度及角加速度。上述这些内容，无论是设计新的机械，还是为了了解现有机械的运动性能，都是十分必要的，而且它还是研究机械动力性能的必要前提。

机构运动分析的方法很多，主要有图解法和解析法。当需要简捷直观地了解机构的某个或某几个位置的运动特性时，采用图解法比较方便，而且精度也能满足实际问题的要求。而当需要精确地知道或要了解机构在整个运动循环过程中的运动特性时，采用解析法并借助计算机，不仅可获得很高的计算精度及一系列位置的分析结果，并能绘出机构相应的运动线图，同时还可把机构分析和机构综合问题联系起来，以便于机构的优化设计。本章将对上述两种方法分别加以介绍，且仅限于研究平面机构的运动分析。

§3－2　用图解法作机构的运动分析

机构运动的图解分析包括对机构的位置、速度及加速度的分析。由于机构的位置图解分析实际上是按给定的机构尺寸及原动件位置作其机构运动简图，上章已作介绍，所以本节主要介绍机构的速度和加速度分析的图解法。

1. 机构速度及加速度分析的一般图解法

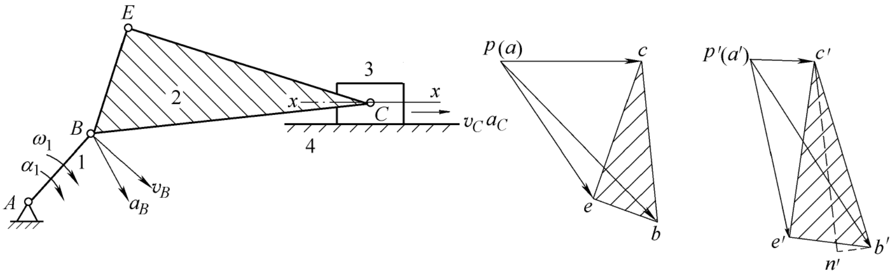
机构的速度及加速度分析的一般图解方法为矢量方程图解法（vector graphic method），又称相对运动图解法（relative kinematic graphic method），其所依据的基本原理是理论力学中的运动合成原理。在对机构进行速度和加速度分析时，首先要根据运动合成原理列出机构运动的矢量方程，然后再按方程作图求解[①]。下面就运动分析中常遇到的两种不同的情况说明矢量方程图解法的基本原理和作法。

（1）利用同一构件上两点间的速度及加速度矢量方程作图求解

---

① 如果所分析的机构属于Ⅱ级机构，那么直接用矢量方程图解法作其速度及加速度分析不会存在困难，而且总是可解的。但如果机构属于Ⅲ级复杂机构，直接用矢量方程图解法作其速度及加速度分析就会遇到一些困难，这时需借助于三副构件上的某一特殊点来写出辅助速度及加速度矢量方程始可求解（故称此方法为特殊点法）。

在图3-1 a所示的平面四杆机构中，设已知各构件尺寸及原动件1的运动规律，即已知B点的速度$\boldsymbol{v}_B$和加速度$\boldsymbol{a}_B$。现要求连杆2的角速度ω_2及角加速度α_2和连杆2上点C的速度$\boldsymbol{v}_C$及加速度$\boldsymbol{a}_C$。



(a)　　(b)　　(c)

图3-1　平面四杆机构图解运动分析

1）列出机构的运动矢量方程

为了求ω_2及α_2，需先求出C点的速度$\boldsymbol{v}_C$及加速度$\boldsymbol{a}_C$。由运动合成原理可知，连杆2上C点的运动可认为是随基点B作平动与绕基点B作相对转动的合成。故有

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} \tag{3-1}$$

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}_{CB}^{n} + \boldsymbol{a}_{CB}^{t} \tag{3-2}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{CB}$、$\boldsymbol{a}_{CB}^{n}$、$\boldsymbol{a}_{CB}^{t}$分别为C点相对于B点的相对速度、相对法向加速度和相对切向加速度。它们的大小和方向分别为：$v_{CB} = \omega_2 l_{BC}$（l_{BC}为B、C两点之间的实际距离），方向与BC连线垂直，指向与ω_2的转向一致；$a_{CB}^{n} = \omega_2^2 l_{BC}$，方向沿$CB$，并由$C$点指向$B$点；$a_{CB}^{t} = \alpha_2 l_{CB}$，方向与$BC$垂直，指向与$\alpha_2$的转向一致。

由于B点的速度$\boldsymbol{v}_B$和加速度$\boldsymbol{a}_B$已知，$\boldsymbol{v}_{CB}$、$\boldsymbol{v}_C$和$\boldsymbol{a}_{CB}^{t}$、$\boldsymbol{a}_C$的方向为已知，仅大小未知，而$\boldsymbol{a}_{CB}^{n}$在对机构作过速度分析之后也为已知。故式（3-1）和式（3-2）中各仅有两个未知数，可用作图法求解。

2）选取适当比例尺按方程作图求解

在用图解法作机构的运动分析时，不仅要选取适当的尺寸比例尺μ_l（单位：m/mm），按给定的原动件位置准确作出机构的运动简图，而且还必须选取适当的速度比例尺μ_v［即图中每单位长度所代表的速度大小，单位：(m/s)/mm］和加速度比例尺μ_a［单位：(m/s^2)/mm］，并依次分别按所列出的矢量方程对机构的速度及加速度作图求解①。具体作图求解过程如下：

速度分析如图3-1 b所示，由任一点p作代表$\boldsymbol{v}_B$的矢量$\overline{pb}$（$/\!/ \boldsymbol{v}_B$，且$\overline{pb} = v_B/\mu_v$）；再分别过$b$点和$p$点作代表$\boldsymbol{v}_{CB}$的方向线$bc$（$\perp BC$）和代表$\boldsymbol{v}_C$的方向线$pc$（$/\!/ xx$），两者交于$c$点，则$v_C = \mu_v \overline{pc}$，$v_{CB} = \mu_v \overline{bc}$。连杆2的角速度$\omega_2 = v_{CB}/l_{BC} = \mu_v \overline{cb}/(\mu_l \overline{BC})$，其方向可如下确定：将代表$\boldsymbol{v}_{CB}$的矢量$\overline{bc}$平移至机构图上的$C$点，其绕$B$点的转向即为$\omega_2$的方向（此时为逆时针）。

加速度分析如图3-1c所示，从任一点p'作代表$\boldsymbol{a}_B$的矢量$\overline{p'b'}$（$/\!/ \boldsymbol{a}_B$，且$\overline{p'b'} = a_B/\mu_a$）；过$b'$点作代表$\boldsymbol{a}_{CB}^{n}$的矢量$\overline{b'n'}$（$/\!/ BC$，方向由$C$指向$B$，且$\overline{b'n'} = a_{CB}^{n}/\mu_a$）；再过$n'$作代表$\boldsymbol{a}_{CB}^{t}$的方向线

① 在作机构的运动图解分析时，如果机构运动简图不准确，速度及加速度分析不严格按比例尺作图求解，都将严重影响到分析结果的正确性。

$n'c'$（$\perp BC$）；最后过 p' 作代表 $\boldsymbol{a}_C$ 的方向线（$/\!/ xx$），其与方向线 $n'c'$ 交于 c' 点，则得 $a_C=\mu_a\,\overline{p'c'}$。连杆 2 的角加速度 $\alpha_2=a_{CB}^t/l_{BC}=\mu_a\,\overline{n'c'}/(\mu_l\,\overline{BC})$，其方向可如下确定：将代表 $\boldsymbol{a}_{CB}^t$ 的矢量 $\overline{n'c'}$ 平移至机构图上的 C 点，其绕 B 点的转向即为 α_2 的方向（此时为逆时针）。

这里，图 3－1b、c 所示图形分别称为机构的速度多边形（velocity vector polygon of mechanism）或速度图和加速度多边形（acceleration vector polygon）或加速度图，p 和 p' 点分别称为机构的速度多边形的极点和加速度多边形的极点。由图可知，在速度多边形和加速度多边形中，由极点向外放射的矢量，代表构件上相应点的绝对速度或绝对加速度，而连接两绝对速度或两绝对加速度矢端的矢量，则分别代表了构件上相应两点间的相对速度和相对加速度，例如 $\overline{bc}$ 和 $\overline{b'c'}$ 分别代表 v_{CB} 和 $\boldsymbol{a}_{CB}$，它们的方向分别是由 b 指向 c 和由 b' 指向 c'。而相对加速度又可分解为法向加速度和切向加速度。

现在再来研究连杆 2 上任一点 E 的速度 v_E 和加速度 $\boldsymbol{a}_E$ 的图解问题。因连杆 2 上 B、C 两点的速度为已知，故 E 点的速度 v_E 可利用 E 与 B、C 之间的速度关系，列出矢量方程 $v_E=v_B+v_{EB}=v_C+v_{EC}$，再进行作图求解。如图 3－1 b 所示，分别过点 b、c 作 v_{EB} 的方向线 be（$\perp BE$）和 v_{EC} 的方向线 ce（$\perp CE$），两者相交于 e 点，则 $\overline{pe}$ 即代表 v_E。由图可见，由于 $\triangle bce$ 与 $\triangle BCE$ 的对应边相互垂直，故两者相似，且其角标字母的顺序方向也一致。所以，将同一构件上各点间的相对速度矢量构成的图形 bce 称为该构件图形 BCE 的速度影像（velocity image of link）。

由此可知，当已知一构件上两点的速度时，则该构件上其他任一点的速度便可利用速度影像原理求出。如图 3－1b 所示，当 bc 作出后，以 bc 为边作 $\triangle bce \backsim \triangle BCE$，且两者角标字母的顺序方向一致，即可求得 e 点和 v_E，而不需再列矢量方程求解。

在加速度关系中也存在和速度影像原理一致的加速度影像（acceleration image of link）原理。因此，欲求 E 点的加速度 $\boldsymbol{a}_E$，可以 $b'c'$ 为边作 $\triangle b'c'e' \backsim \triangle BCE$（图 3－1c），且其角标字母顺序方向一致，即可求得 e' 点和 $\boldsymbol{a}_E$。

这里需要强调说明的是，速度影像和加速度影像原理只适用于构件（即构件的速度图及加速度图与其几何形状是相似的），而不适用于整个机构。由图中不难看出，图 3－2a、b、c 三图总体上并不相似。

（2）利用两构件重合点间的速度及加速度矢量方程作图求解

与前一种情况不同，此处所研究的是以移动副相连的两转动构件上的重合点间的速度及加速度之间的关系，因而所列出的机构的运动矢量方程也有所不同，但作法却基本相似。下面举例加以说明。

例 **3－1**　图 3－2a 所示为一平面四杆机构。设已知各构件的尺寸为：$l_{AB}=24$ mm，$l_{AD}=78$ mm，$l_{CD}=48$ mm，$\gamma=100°$；并知原动件 1 以等角速度 $\omega_1=10$ rad/s 沿逆时针方向回转。试用图解法求机构在 $\varphi_1=60°$ 时构件 2、3 的角速度和角加速度。

解：（1）作机构运动简图

选取尺寸比例尺 $\mu_l=0.001$ m/mm，按 $\varphi_1=60°$ 准确作出机构运动简图（图 3－2 a）。

（2）作速度分析

根据已知条件，速度分析应由 B 点开始，并取重合点 B_3 及 B_2 进行求解①。已知 B_2 点的速度

① 选 B_2、B_3 点为重合点来进行运动分析，是因为 B_2 点的速度和加速度很容易求得，求解最简便。读者不妨以 D_2、D_3 或 C_2、C_3 点为重合点，求解对比，便不难验证。

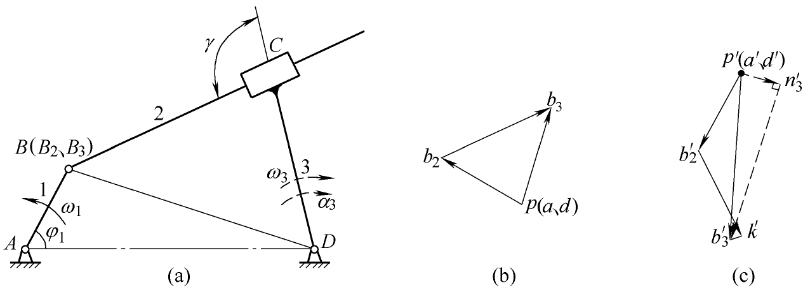


图 3-2 平面四杆机构图解运动分析

$$v_{B2}=v_{B1}=\omega_1 l_{AB}=10\times0.024\ \text{m/s}=0.24\ \text{m/s}$$

其方向垂直于AB,指向与ω_1的转向一致。

为求ω_3,需先求得构件3上任一点的速度。因构件3与构件2组成移动副,故可由两构件上重合点间的速度关系来求解。由运动合成原理可知,重合点B_3及B_2有

$$\begin{array}{lccc} & v_{B3} = & v_{B2} + & v_{B3B2} \\ \text{方向:} & \perp BD & \perp AB & /\!/ BC \\ \text{大小:} & ? & \checkmark & ? \end{array} \tag{3-3}$$

式中仅有两个未知量,故可用作图法求解。取速度比例尺$\mu_v=0.01\ (\text{m/s})/\text{mm}$,并取点$p$作为速度图极点,作其速度图如图3-2b所示,于是得

$$\omega_3=v_{B3}/l_{BD}=\mu_v\,\overline{pb_3}/(\mu_l\,\overline{BD})=0.01\times27/(0.001\times69)\ \text{rad/s}=3.91\ \text{rad/s}\quad(\text{顺时针})$$

而$\omega_2=\omega_3$。

(3)作加速度分析

加速度分析的步骤与速度分析相同,也应从B点开始,且已知B点仅有法向加速度,即

$$a_{B2}=a_{B1}=a_{B2}^{n}=\omega_1^2 l_{AB}=10^2\times0.024\ \text{m/s}^2=2.4\ \text{m/s}^2$$

其方向沿AB,并由B指向A。

点B_3的加速度$\boldsymbol{a}_{B3}$由两构件上重合点间的加速度关系可知,有

$$\begin{array}{lcccccc} & \boldsymbol{a}_{B3}= & \boldsymbol{a}_{B3D}^{n} + & \boldsymbol{a}_{B3D}^{t} = & \boldsymbol{a}_{B2} + & \boldsymbol{a}_{B3B2}^{k} + & \boldsymbol{a}_{B3B2}^{r} \\ \text{方向:} & & B\rightarrow D & \perp BD & B\rightarrow A & \perp BC & /\!/ BC \\ \text{大小:} & & \checkmark & ? & \checkmark & \checkmark & ? \end{array} \tag{3-4}$$

式中,$\boldsymbol{a}_{B3B2}^{k}$为$B_3$点相对于$B_2$点的科氏加速度,其大小为$\boldsymbol{a}_{B3B2}^{k}=2\omega_2 v_{B3B2}=2\omega_2\mu_v\,\overline{b_2b_3}=2\times3.91\times0.01\times32\ \text{m/s}^2=2.5\ \text{m/s}^2$,其方向为将相对速度$v_{B3B2}$沿牵连构件2的角速度$\omega_2$的方向转过90°之后的方向。而$\boldsymbol{a}_{B3D}^{n}$的大小为$a_{B3D}^{n}=\omega_3^2 l_{BD}=\omega_3^2\mu_l\,\overline{BD}=3.91^2\times0.001\times69\ \text{m/s}^2=1.05\ \text{m/s}^2$。

式(3-4)仅有两个未知量,故可用作图法求解。选取加速度比例尺$\mu_a=0.1\ (\text{m/s}^2)/\text{mm}$,并取$p'$点为加速度图极点,按式(3-4)依次作其加速度图如图3-2 c所示,于是得

$$\alpha_3=\alpha_{B3D}^{t}/l_{BD}=\mu_a\,\overline{n_3'b_3'}/\mu_l\,\overline{BD}=0.1\times43/(0.001\times69)\ \text{rad/s}^2=62.3\ \text{rad/s}^2\quad(\text{逆时针})$$

而$\alpha_2=\alpha_3$。

对于含高副的机构,为了简化其运动分析,常将其高副用低副代替后再作运动分析。如图2-32所示凸轮机构,设已知机构尺寸及凸轮1的等角速度ω_1,并沿逆时针方向转动,需求推杆2的角速度ω_2及角加速度α_2,就可用对其替代机构作运动分析来代替。但这里必须注意,此替代机构为瞬时替代,故对机构不同位置的运动分析,均需作出相应的瞬时替代机构。

2. 机构速度分析的便捷图解法

通常多数机械的运动分析仅需对其机构作速度分析。这时对于某些结构简单的机构,采用

速度瞬心图解法（简称速度瞬心法或瞬心法）对其进行速度分析往往显得十分简便和直观。此外，对于某些结构比较复杂的机构，如果单纯运用矢量方程图解法对其进行速度分析，有时会遇到困难，这时，如果综合地运用这两种方法进行求解（简称综合法），则往往显得比较简便。下面先介绍速度瞬心法。

（1）速度瞬心法

1）速度瞬心及其位置的确定

由理论力学可知，互作平面相对运动的两构件上瞬时速度相等的重合点，即为此两构件的速度瞬心（instantaneous centre of velocity），简称瞬心。常用符号 P_{ij} 表示构件 i、j 间的瞬心，且 $i<j$。若瞬心处的绝对速度为零，则为绝对瞬心（absolute instantaneous centre of velocity）；否则，则为相对瞬心（relative instantaneous centre of velocity）。

因为机构中每两个构件间就有一个瞬心，故由 N 个构件（含机架）组成的机构的瞬心总数 K，根据排列组合的知识知，应为

$$K = N(N-1)/2 \tag{3-5}$$

各瞬心位置的确定方法如下：

对于通过运动副直接相连的两构件间的瞬心，可由瞬心定义来确定其位置。如图 3-3 所示，以转动副相连接的两构件的瞬心就在转动副的中心处（图 a）；以移动副相连接的两构件间的瞬心位于垂直于导路方向的无穷远处（图 b）；以平面高副相连接的两构件间的瞬心，当高副两元素作纯滚动时就在接触点处（图 c），当高副两元素间有相对滑动时，则在过接触点高副元素的公法线上（图 d）。

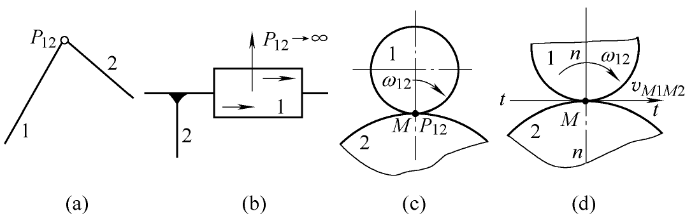
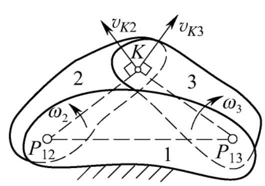


图3-3　瞬心的位置

对于不通过运动副直接相连的两构件间的瞬心，可借助于“三心定理”来确定其位置。而所谓三心定理（Kennedy-Aronhold theorem），即三个彼此作平面平行运动的构件的三个瞬心必位于同一直线上。因为只有三个瞬心位于同一直线上，才有可能满足瞬心为等速重合点的条件[①]。下面举例说明其应用。

① 三心定理可通过如图所示的互作平面平行运动的三构件 1、2 及 3 的三个瞬心中的 P_{23} 必定位于 P_{12} 及 P_{13}（分别处于各转动副中心处）的连线上来加以说明。为简单起见，不妨设构件 1 是固定的。这时在构件 2 及 3 上任取一个不在 P_{12} 及 P_{13} 连线上的重合点 K，显然因重合点 K_2、K_3 的速度方向不同而 K 就不可能成为瞬心 P_{23}，而只有将重合点 K 选在 P_{12} 及 P_{13} 的连线上两速度方向才能一致，故知 P_{23} 与 P_{12}、P_{13} 必在同一直线上。



在图3-4所示的平面铰链四杆机构中，瞬心P_{12}、P_{23}、P_{34}、P_{14}的位置可直观地加以确定，而其余两瞬心P_{13}、P_{24}则需要根据三心定理来确定。对于构件1、2、3来说，P_{13}必在P_{12}及P_{23}的连线上，而对于构件1、4、3来说，P_{13}又应在P_{14}及P_{34}的连线上，故上述两线的交点即为瞬心P_{13}。同理，可求得瞬心P_{24}。

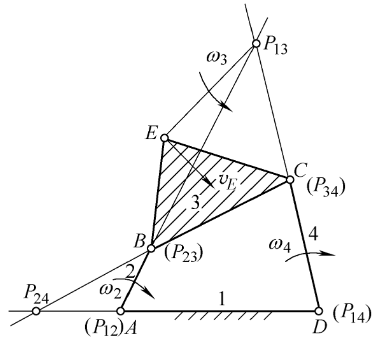


图3-4　铰链四杆机构的瞬心

2）用瞬心法作机构的速度分析

下面举例说明利用速度瞬心概念对机构进行速度分析的方法。

设已知图3-4所示机构各构件的尺寸，原动件2的角速度ω_2，试求在图示位置时从动件4的角速度ω_4和连杆3上点E的速度v_E。

因为瞬心P_{24}为构件2、4的等速重合点，故有

$$\omega_2 \overline{P_{12}P_{24}}\mu_l = \omega_4 \overline{P_{14}P_{24}}\mu_l$$

式中，μ_l为机构尺寸的比例尺（dimension scale），它是构件的真实长度与图示长度之比，单位为m/mm或mm/mm。

由上式可得

$$\omega_4 = \omega_2 \overline{P_{12}P_{24}} / \overline{P_{14}P_{24}} \text{（顺时针①）}$$

或

$$\omega_2/\omega_4 = \overline{P_{14}P_{24}} / \overline{P_{12}P_{24}} \tag{3-6}$$

上式中，ω_2/ω_4为机构中原动件2与从动件4的瞬时角速度之比，称为机构的传动比（transmission ratio of mechanism）或传递函数（transfer function）。由此可见，该传动比等于该两构件的绝对瞬心至相对瞬心距离的反比。

又因瞬心P_{13}为连杆3在图示位置的瞬时转动中心，故

$$v_B = \omega_3 \overline{P_{13}B}\mu_l = \omega_2 \overline{P_{12}B}\mu_l$$

可得

$$\omega_3 = \omega_2 \overline{P_{12}B} / \overline{P_{13}B}$$

$$v_E = \omega_3 \overline{P_{13}E}\mu_l \quad \text{（方向垂直于}P_{13}E\text{，指向与}\omega_3\text{一致）}$$

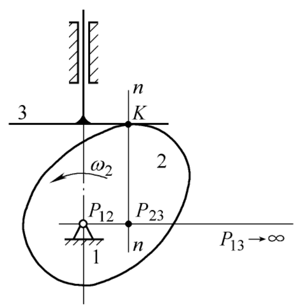


图3-5　凸轮机构的瞬心

又如图3-5所示的凸轮机构，设已知各构件的尺寸及凸轮的角速度ω_2，需求从动件3的移动速度v。

如图所示，过高副元素的接触点K作其公法线nn，由前述可知，其与瞬心连线$P_{12}P_{13}$的交点即为瞬心P_{23}，又因其为2、3两构件的等速重合点，故可得

$$v = v_{P_{23}} = \omega_2 \overline{P_{12}P_{23}}\mu_l \quad \text{（方向垂直向上）}$$

利用瞬心法对机构进行速度分析虽较简便，但当某些瞬心位于图纸之外时，将给求解带来困难。同时，速度瞬心法不能用于机构的加速度分析。

① 相对瞬心P_{24}在两绝对瞬心P_{12}、P_{14}的延长线上时，ω_4与ω_2同向；P_{24}在P_{12}、P_{14}之间时，ω_4与ω_2反向。

*3）瞬心线

由上述分析可知，瞬心的位置是随两构件的运动而变动的，它将在各自构件上形成一条轨迹，这个瞬心轨迹称为瞬心线（centrode）。如图3-6所示，曲线αα和ββ就是瞬心P_{13}分别在构件3与构件1上形成的两条瞬心线，因构件1为固定机架，该瞬心线ββ又称为定瞬心线（fixed centrode），构件3为运动连杆，故瞬心线αα又称为动瞬心线（moving centrode）。由瞬心的定义可知，机构在运动时，动瞬心线将沿着定瞬心线作无滑动的纯滚动。即定瞬心线和动瞬心线所滚过的对应弧长相等。换一句话说，平面运动连杆在其平面内的任何运动，都可以用动瞬心线沿定瞬心线作无滑动的纯滚动来实现。由此可见，就实现连杆3的一般平面运动而言，原铰链四杆机构完全可以用这两瞬心线为高副元素的两构件的高副机构来替代。因此，利用瞬心线可进行高副机构与低副机构之间的运动等效变换。

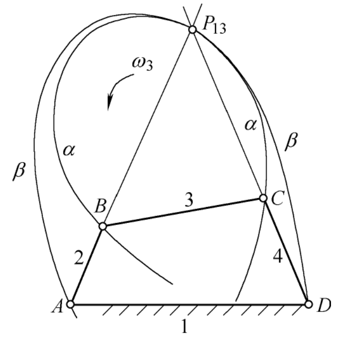


图3-6　铰链四杆机构的瞬心线

（2）综合法

对于Ⅲ级机构或以连杆为原动件的比较复杂的机构，采用综合法对其进行速度分析往往比较简便，但综合法不能用于机构的加速度分析。下面举例加以说明。

例**3-2**　图3-7a所示为一摇动筛六杆机构的运动简图（根据机构结构分类属Ⅲ级机构）。设已知各构件尺寸及原动件2的角速度ω_2。需作出机构在图示位置时的速度多边形。

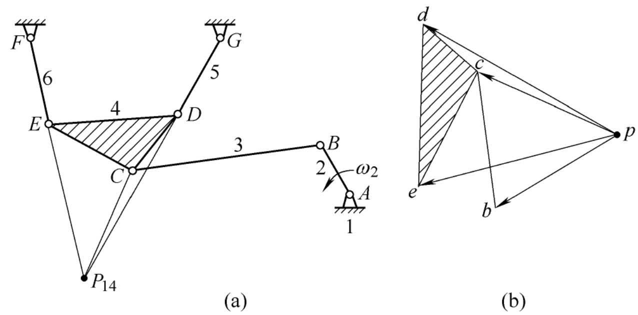


图3-7　摇动筛机构及其速度多边形

解：根据题设，求解的关键应先求出v_C，而为此可列出下列一系列矢量方程：$v_C=v_B+v_{CB}$，$v_C=v_D+v_{CD}$，$v_C=v_E+v_{CE}$。在这些方程中，无论哪一个或它们的联立式的未知数均超过两个，故无法用图解法求解。为了解决此困难，可利用瞬心P_{14}先定出v_C的方向。根据三心定理，构件4的绝对瞬心P_{14}应位于GD和EF两延长线的交点处。而v_C的方向应垂直于$P_{14}C$。v_C的方向定出后，其余的求解过程就很简单了，作出的速度多边形如图3-7b所示。

例**3-3**　图3-8a所示为一齿轮-连杆组合机构。其中，主动齿轮2以角速度ω_2绕固定轴线O顺时针转动，从而使齿轮3在固定不动的内齿轮1上滚动，在齿轮3上的B点铰接着连杆5。设已知各构件尺寸，求在图示瞬时构件6的角速度ω_6。

解：由图可见，欲求ω_6需先求出v_B。又由瞬心的定义知，E点为齿轮1、3的绝对瞬心P_{13}，K点为齿轮2、3的相对瞬心P_{23}。而$v_K=\omega_2 l_{OK}$，v_K垂直于OK，指向与ω_2的转向一致。

因齿轮3上E、K两点的速度已知，可用速度影像原理求得v_B（图3-8b），再由矢量方程

$$v_C=v_B+v_{CB}$$

求得v_C，则

$$\omega_6=v_C/l_{CD}=\mu_v\overline{pc}/l_{CD}\quad（顺时针）$$

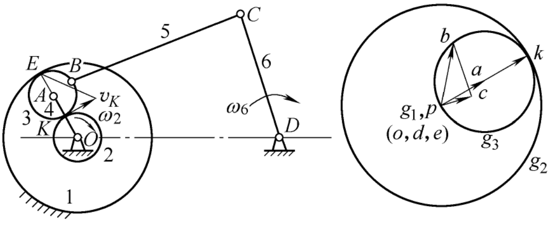


图3－8　齿轮－连杆组合机构

下面来求齿轮1、2及3的速度影像(图3－8b)。由于齿轮1固定不动,其上各点的速度均为零,故它的速度影像缩为在极点p处的一点(即点圆g_1);对于齿轮3来说,由于$\overline{KE}$为其直径,故作以$\overline{ek}$为直径的圆g_3即为其影像;同理,以p为圆心,以$\overline{pk}$为半径的圆g_2则为齿轮2的影像。比较图3－8a、b,可以明显看出整个机构与速度图无影像关系。

例3－4　图3－9a所示为一风扇摇头机构,电动机M固装在构件1上,其运动是通过电动机轴上的蜗杆1′带动固装于构件2上的蜗轮2′,故构件2为四杆机构$ABCD$的原动件,但不与机架相连。设已知各构件的尺寸及原动件2相对于构件1的相对角速度ω_{21},试求机构在图示位置时的ω_1与ω_3。

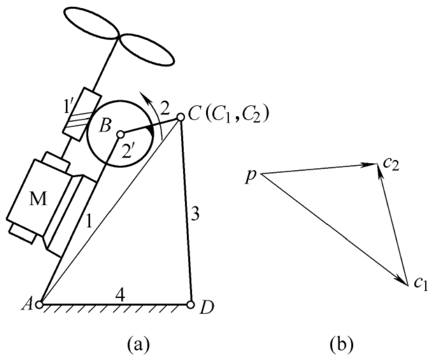


图3－9　风扇摇头机构

解：由题给条件可知,在矢量方程$v_C=v_B+v_{CB}$中,v_C、v_B及v_{CB}大小均未知,故不可解。但如选取C点为构件1、2的重合点,因B点为构件1、2的相对瞬心,故利用运动合成原理及瞬心的性质,有

	v_{C2}	=	v_{C1}	+	v_{C2C1}
方向：	$\perp CD$		$\perp AC$		$\perp BC$
大小：	?		?		$\omega_{21}l_{BC}$

上式可用图解法求解(图3－9b),在选定比例尺μ_v后,先作出$\overline{c_1c_2}$,再分别过c_1、c_2作v_{C1}、v_{C2}的方向线c_1p及c_2p,两方向线的交点p就是速度多边形的极点,故

$$\omega_1=v_{C1}/l_{AC}=\mu_v\,\overline{pc_1}/l_{AC}\quad(顺时针)$$

$$\omega_3=v_{C2}/l_{CD}=\mu_v\,\overline{pc_2}/l_{CD}\quad(顺时针)$$

*(3) 机构的速度图解在工程设计中的应用

利用机构的速度图解不仅能对机构进行直观、快捷地速度特性分析,而且有助于判断分析结果的正确性,还能帮助设计者迅速、清晰地了解机构的整体行为和一般运动情况。假如我们要直接想象机构中的一个运动连杆及其上某一点的运动(如一点的轨迹、速度方向等),即使简单的四杆机构,也是很困难的。但若我们了解了一个机构的速度图形,借助于速度影像概念就不难想象出连杆上任一点速度的情况。尤其是利用速度瞬心的概念,若将连杆的运动视为绕其绝对瞬心作纯转动的运动来想象,就更不难想象连杆的运动情况了。这一点对一个工程师来说在机器工作现场快捷地发现或处理一些相关速度的技术问题是很有实际意义的,这在工程设计中也有重要的应用。例如图3－10所示的汽车后悬挂系统的设计,采用了铰链四杆机构(图中机构$ABCD$),车轮轴与其连杆3固接。为了避免汽车在行驶时由于车轮遇到凸起物使其车轮向上运动的同时又侧倾运动(如图右轮轴心O'向上运动时其速度$v_{O'}$就发生偏斜了一角度)以及向前运动而产生转动的扰动(即车轮反操作汽车)等现象,影响其行驶运动的不稳定性,导致司机产生惊慌,就需要分析其连杆的运动情况。工程上常用的简单方法就是通过查看连杆的绝对瞬心P_{13}的轨迹,以快速地预测出该悬挂机构系统是否会出现不希望的运动。

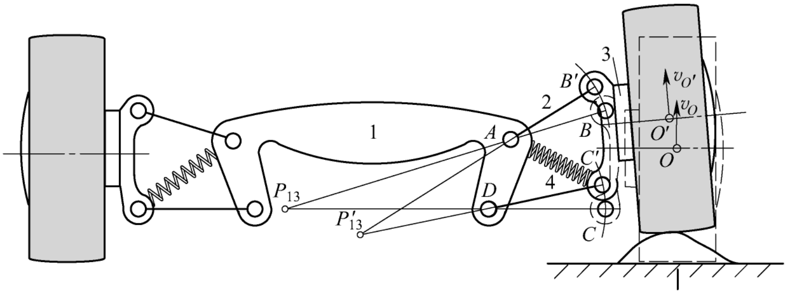


图3-10　汽车后悬挂系统

§3-3　用解析法作机构的运动分析

用解析法作机构的运动分析,应首先建立机构的位置方程,然后将位置方程对时间求导数,即可求得机构的速度和加速度方程,进而完成机构的运动分析。由于所采用的数学工具不同,所以解析法有很多种。这里介绍两种比较容易掌握且便于应用计算机计算求解的方法——复数矢量法(method of complex vector)和矩阵法(matrix method)。复数矢量法由于利用了复数运算十分简便的优点①,不仅可对任何机构包括较复杂的连杆机构进行运动分析和动力分析,而且可用来进行机构的综合,并可利用计算器或计算机进行求解。而矩阵法则可方便地运用标准计算程序来求解。由于用这两种方法对机构作运动分析时,均需先列出所谓机构的封闭矢量方程,故对此先加以介绍。

1. 机构的封闭矢量位置方程

在用矢量法建立机构的位置方程时,需将构件用矢量来表示,并作出机构的封闭矢量多边形。如图3-11所示,先建立一直角坐标系。设构件1的长度为 l_1,其方位角为 θ_1,$\boldsymbol{l}_1$ 为构件1的杆矢量(link vector),即 $\boldsymbol{l}_1=\overline{AB}$。机构中其余构件均可表示为相应的杆矢量,这样就形成由各杆矢量组成的一个封闭矢量多边形,即 $ABCDA$。在这个封闭矢量多边形中,其各矢量之和必等于零。即

$$\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_2-\boldsymbol{l}_4-\boldsymbol{l}_3=0 \tag{3-7}$$

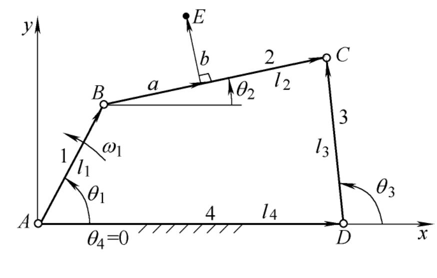


图3-11　封闭矢量多边形

对一欲作运动分析的四杆机构,其各构件的长度和原动件1的运动规律,即 θ_1 为已知,而 $\theta_4=0$,故可求得两个未知方位角 θ_2 及 θ_3。各杆矢量的方向可自由确定,但各杆矢量的方位角 θ 均应由 x 轴开始,并以沿逆时针方向计量为正②。

由上述分析可知,对于一个四杆机构,只需作出一个封闭矢量多边形,即可求解。而对四杆

① 用复数符号表示平面矢量,如 $R=R\angle\theta$,它既可写成极坐标形式 $Re^{i\theta}$,又可写成直角坐标形式 $R\cos\theta+iR\sin\theta$。可利用欧拉公式 $e^{\pm i\theta}=\cos\theta\pm i\sin\theta$ 方便地在上述两种表示形式之间进行变换。此外,它的导数就是其自身,即 $de^{i\theta}/d\theta=ie^{i\theta}$,故对其微分或积分运算十分便利。

② 坐标系和各杆矢量方向的选取不影响解题结果。

以上的多杆机构,则需作出一个以上的封闭矢量多边形才能求解。

2. 复数矢量法

用复数矢量法作平面机构运动分析的关键,是先用复矢量写出机构的封闭矢量位置方程,再将位置复矢量方程对时间求导,即得其速度及加速度的复矢量方程;然后再应用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 分别将这些复矢量方程的实部和虚部分离再联立解之,即可完成机构的运动分析。下面举例来加以说明:

例 **3-5** 在如图3-11所示的铰链四杆机构中,设已知各构件的尺寸及原动件1的方位角 θ_1 和等角速度 ω_1,试用复数矢量法对其位置、速度和加速度进行分析。

解:如前所述,为了对机构进行运动分析,先要建立坐标系,并将各构件表示为杆矢量。

(1) 位置分析

将机构封闭矢量方程式(3-7)改写并表示为复数矢量形式

$$l_1 e^{i\theta_1}+l_2 e^{i\theta_2}=l_4+l_3 e^{i\theta_3} \tag{3-8}$$

应用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 将上式的实部和虚部分离,得

$$\left.\begin{aligned} l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2&=l_4+l_3\cos\theta_3\\ l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2&=l_3\sin\theta_3\end{aligned}\right\} \tag{3-9}$$

由此方程组可求得两个未知方位角 θ_2、θ_3。当要求解 θ_3 时,应将 θ_2 消去,为此可先将以上两分式左端含 θ_1 的项移到等式右端,然后分别两端平方并相加,可得

$$l_2^2=l_3^2+l_4^2+l_1^2-2l_3l_4\cos\theta_3-2l_1l_3\cos(\theta_3-\theta_1)-2l_1l_4\cos\theta_1$$

经整理并可简化为

$$A\sin\theta_3+B\cos\theta_3+C=0 \tag{3-10}$$

式中,$A=2l_1l_3\sin\theta_1$;

$B=2l_3(l_1\cos\theta_1-l_4)$;

$C=l_2^2-l_1^2-l_3^2-l_4^2+2l_1l_4\cos\theta_1$。

解之可得

$$\tan(\theta_3/2)=(A\pm\sqrt{A^2+B^2-C^2})/(B-C) \tag{3-11}$$

在求得了 θ_3 之后,可利用式(3-9)求得 θ_2。式(3-11)有两个解,可根据机构的初始安装情况和机构运动的连续性来确定式中“±”号的选取。

(2) 速度分析

将式(3-8)对时间 t 求导,可得

$$l_1\omega_1 e^{i\theta_1}+l_2\omega_2 e^{i\theta_2}=l_3\omega_3 e^{i\theta_3} \tag{3-12}$$

上式为 $v_B+v_{CB}=v_C$ 的复数矢量表达式。

将上式的实部和虚部分离获得两分式之后,再联解可求得两个未知角速度 ω_2、ω_3,即

$$\omega_3=\omega_1 l_1\sin(\theta_1-\theta_2)/[l_3\sin(\theta_3-\theta_2)] \tag{3-13}$$

$$\omega_2=-\omega_1 l_1\sin(\theta_1-\theta_3)/[l_2\sin(\theta_2-\theta_3)] \tag{3-14}$$

(3) 加速度分析

将式(3-12)对时间 t 求导,可得

$$il_1\omega_1^2 e^{i\theta_1}+l_2\alpha_2 e^{i\theta_2}+il_2\omega_2^2 e^{i\theta_2}=l_3\alpha_3 e^{i\theta_3}+il_3\omega_3^2 e^{i\theta_3} \tag{3-15}$$

上式为 $\boldsymbol{a}_B+\boldsymbol{a}_{CB}^{t}+\boldsymbol{a}_{CB}^{n}=\boldsymbol{a}_C^{t}+\boldsymbol{a}_C^{n}$ 的复数矢量表达式。

将上式的实部和虚部分离,再联解可求得两个未知的角加速度 α_2、α_3,即

$$\alpha_3=\frac{\omega_1^2 l_1\cos(\theta_1-\theta_2)+\omega_2^2 l_2-\omega_3^2 l_3\cos(\theta_3-\theta_2)}{l_3\sin(\theta_3-\theta_2)} \tag{3-16}$$

$$\alpha_2=\frac{-\omega_1^2 l_1\cos(\theta_1-\theta_3)-\omega_2^2 l_2\cos(\theta_2-\theta_3)+\omega_3^2 l_3}{l_3\sin(\theta_2-\theta_3)} \tag{3-17}$$

现再来讨论图示四杆机构中连杆 2 上任一点 E 的速度和加速度的求解方法。当机构中所有构件的角位移、角速度和角加速度一旦求出后，则该机构中任何构件上的任意点的速度及加速度就很容易求得。

设连杆上任一点 E 在其上的位置矢量为 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$，E 点在坐标系 Axy 中的绝对位置矢量为 $\boldsymbol{l}_E=\overline{AE}$，则

$$\boldsymbol{l}_E=\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

即

$$\boldsymbol{l}_E=l_1 e^{i\theta_1}+ae^{i\theta_2}+be^{i(\theta_2+90°)} \tag{3-18}$$

将上式对时间 t 分别求一次和二次导数，并经变换整理可得 v_E 和 $\boldsymbol{a}_E$ 的矢量表达式，即

$$v_E=-[\omega_1 l_1\sin\theta_1+\omega_2(a\sin\theta_2+b\cos\theta_2)]+i[\omega_1 l_1\cos\theta_1+\omega_2(a\cos\theta_2-b\sin\theta_2)] \tag{3-19}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_E=&-[\omega_1^2 l_1\cos\theta_1+\alpha_2(a\sin\theta_2+b\cos\theta_2)]+\omega_2^2(a\cos\theta_2-b\sin\theta_2)]\\&+i[-\omega_1^2 l_1\sin\theta_1+\alpha_2(a\cos\theta_2-b\sin\theta_2)-\omega_2^2(a\sin\theta_2+b\cos\theta_2)]\end{aligned} \tag{3-20}$$

例 **3－6**　试用复数矢量法求例 3－1 所给四杆机构中各从动件的方位角、角速度和角加速度。

解：先建立一直角坐标系，并标出各杆矢及方位角，如图 3－12 所示。由机构的结构可知，$\theta_2=\theta_3+\gamma$。故此机构有两个未知量 s_2 及 θ_3。其中，$s_2=\overline{CB}$为一变量。

（1）位置分析

由矢量封闭图形 $ABCD$ 可得封闭矢量方程为

$$\boldsymbol{s}_2+\boldsymbol{l}_3+\boldsymbol{l}_4=\boldsymbol{l}_1 \tag{a}$$

即

$$s_2 e^{i\theta_2}+l_3 e^{i\theta_3}+l_4=l_1 e^{i\theta_1} \tag{b}$$

应用欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，将上式的实部和虚部分离，得

$$s_2\cos\theta_2+l_3\cos\theta_3=l_1\cos\theta_1-l_4 \tag{c}$$

$$s_2\sin\theta_2+l_3\sin\theta_3=l_1\sin\theta_1 \tag{d}$$

式中仅有两个未知量，可联立求解。由式(d)可得

$$s_2=(l_1\sin\theta_1-l_3\sin\theta_3)/\sin\theta_2 \tag{e}$$

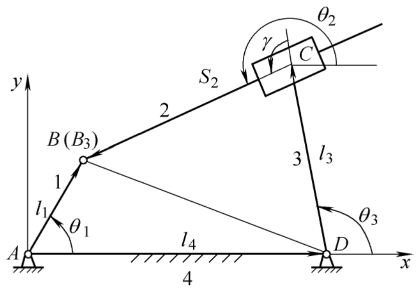


图 3－12　四杆机构的矢量封闭形

将式(e)代入式(c)，再将 $\theta_2=\theta_3+\gamma$ 代入，经整理并简化为

$$A\sin\theta_3+B\cos\theta_3+C=0$$

式中，$A=l_1\sin\theta_1\sin\gamma+(l_1\cos\theta_1-l_4)\cos\gamma$

$B=-l_1\sin\theta_1\cos\gamma+(l_1\cos\theta_1-l_4)\sin\gamma$

$C=-l_3\sin\gamma$

解之可得

$$\tan(\theta_3/2)=(A\pm\sqrt{A^2+B^2-C^2})/(B-C) \tag{f}$$

在求得了 θ_3 后，可由 $\theta_2=\theta_3+\gamma$ 求得 θ_2，最后由式(e)可求得 s_2。

（2）速度分析

将式(d)对时间 t 求导可得

$$\dot{s}_2 e^{i\theta_2}+is_2\omega_2 e^{i\theta_2}+il_3\omega_3 e^{i\theta_3}=il_1\omega_1 e^{i\theta_1} \tag{g}$$

因 $\omega_2=\omega_3$，故上式仅有两个未知量 $\dot{s}_2$ 及 ω_3。将上式的实部和虚部分开，并联解可得

$$\dot{s}_2=[-l_1\omega_1\sin\theta_1+\omega_3(s_2\sin\theta_2+l_3\sin\theta_3)]/\cos\theta_2$$

$$\omega_2=\omega_3=l_1\omega_1\cos(\theta_1-\theta_2)/[s_2+l_3\cos(\theta_3-\theta_2)]=l_1\omega_1\cos(\theta_1-\theta_2)/(s_2+l_3\cos\gamma)$$

（3）加速度分析

将式(g)对时间 t 求导，可得

$$\ddot{s}_2 e^{i\theta_2} + 2i\dot{s}_2\omega_2 e^{i\theta_2} + i s_2\alpha_2 e^{i\theta_2} - s_2\omega_2^2 e^{i\theta_2} + i l_3\alpha_2 e^{i\theta_3} - l_3\omega_3^2 e^{i\theta_3} = -l_1\omega_1^2 e^{i\theta_1}$$

其中有 $\omega_2=\omega_3$，$\alpha_2=\alpha_3$，故上式仅有 $\ddot{s}_2$ 及 α_3 两个未知量。将上式的实部和虚部分开，并联解可得

$$\ddot{s}_2=\frac{\{l_1\omega_1^2[s_2\cos(\theta_2-\theta_1)+l_3\cos(\theta_3-\theta_1)]+2\dot{s}_2 l_3\omega_3\sin(\theta_3-\theta_2)-\omega_3^2[s_2^2+l_3^2+2s_2 l_3\cos(\theta_3-\theta_2)]\}}{\dot{s}_2+l_3\cos(\theta_2-\theta_3)}$$

$$\alpha_3=\frac{l_1\omega_1^2\sin(\theta_2-\theta_1)+l_3\omega_3^2\sin(\theta_3-\theta_2)-2\dot{s}_2\omega_2}{s_2+l_3\cos(\theta_2-\theta_3)}$$

3. 矩阵法

仍以图3－11所示四杆机构为例，已知条件同前，现用矩阵法求解如下：

（1）位置分析

将机构的封闭矢量方程式(3－7)写成在两坐标轴上的投影式，并改写成方程左边仅含未知量项的形式，即得

$$\left.\begin{aligned}l_2\cos\theta_2-l_3\cos\theta_3&=l_4-l_1\cos\theta_1\\ l_2\sin\theta_2-l_3\sin\theta_3&=-l_1\sin\theta_1\end{aligned}\right\}\tag{3－21}$$

解此方程即可得二未知方位角 θ_2、θ_3。

（2）速度分析

将式(3－23)对时间取一次导数，可得

$$\left.\begin{aligned}-l_2\omega_2\sin\theta_2+l_3\omega_3\sin\theta_3&=\omega_1 l_1\sin\theta_1\\ l_2\omega_2\cos\theta_2-l_3\omega_3\cos\theta_3&=-\omega_1 l_1\cos\theta_1\end{aligned}\right\}\tag{3－22}$$

解之可求得 ω_2、ω_3。式(3－22)可写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix}-l_2\sin\theta_2 & l_3\sin\theta_3\\ l_2\cos\theta_2 & -l_3\cos\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}=\omega_1\begin{bmatrix}l_1\sin\theta_1\\ -l_1\cos\theta_1\end{bmatrix}\tag{3－23}$$

（3）加速度分析

将式(3－21)对时间取导，可得加速度关系

$$\begin{bmatrix}-l_2\sin\theta_2 & l_3\sin\theta_3\\ l_2\cos\theta_2 & -l_3\cos\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-\omega_2 l_2\cos\theta_2 & \omega_3 l_3\cos\theta_3\\ -\omega_2 l_2\sin\theta_2 & \omega_3 l_3\sin\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_2\\ \omega_3\end{bmatrix}+\omega_1\begin{bmatrix}\omega_1 l_1\cos\theta_1\\ \omega_1 l_1\sin\theta_1\end{bmatrix}\tag{3－24}$$

由式(3－24)可解得 α_2、α_3。

若还需求连杆上任一点 E 的位置、速度和加速度时，可由下列各式直接求得：

$$\left.\begin{aligned}x_E&=l_1\cos\theta_1+a\cos\theta_2+b\cos(90°+\theta_2)\\ y_E&=l_1\sin\theta_1+a\sin\theta_2+b\sin(90°+\theta_2)\end{aligned}\right\}\tag{3－25}$$

$$\begin{bmatrix}v_{Ex}\\ v_{Ey}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{x}_E\\ \dot{y}_E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1\sin\theta_1 & -a\sin\theta_2-b\sin(90°+\theta_2)\\ l_1\cos\theta_1 & a\cos\theta_2+b\cos(90°+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\tag{3－26}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_{Ex}\\ \boldsymbol{a}_{Ey}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\ddot{x}_E\\ \ddot{y}_E\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}-l_1\sin\theta_1 & -a\sin\theta_2-b\sin(90°+\theta_2)\\ l_1\cos\theta_1 & a\cos\theta_2+b\cos(90°+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \alpha_2\end{bmatrix}\\ &-\begin{bmatrix}l_1\cos\theta_1 & a\cos\theta_2+b\cos(90°+\theta_2)\\ l_1\sin\theta_1 & a\sin\theta_2+b\sin(90°+\theta_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1^2\\ \omega_2^2\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3－27}$$

在矩阵法中，为便于书写和记忆，速度分析关系式可表示为

$$\boldsymbol{A}\omega = \omega_1 \boldsymbol{B} \tag{3－28}$$

式中：$\boldsymbol{A}$——机构从动件的位置参数矩阵；

ω——机构从动件的速度列阵；

$\boldsymbol{B}$——机构原动件的位置参数列阵；

ω_1——机构原动件的速度。

而加速度分析的关系式则可表示为

$$\boldsymbol{A}\alpha = -\dot{\boldsymbol{A}}\ \omega + \omega_1 \dot{\boldsymbol{B}} \tag{3－29}$$

式中，α 是机构从动件的加速度列阵；$\dot{\boldsymbol{A}} = \mathrm{d}\boldsymbol{A}/\mathrm{d}t$；$\dot{\boldsymbol{B}} = \mathrm{d}\boldsymbol{B}/\mathrm{d}t$。

通过上述对四杆机构进行运动分析的过程可见，用解析法进行机构运动分析的关键是位置方程的建立和求解。至于速度分析和加速度分析只不过是对其位置方程作进一步的数学运算而已。位置方程的求解需解非线性方程组，难度较大；而速度方程和加速度方程的求解，则只需解线性方程组，相对而言较容易。

上述方法对于复杂的机构同样适用，下面举例说明。

例 **3－7**　图3－13所示为一牛头刨床的机构运动简图。设已知各构件的尺寸为：$l_1 = 125$ mm，$l_3 = 600$ mm，$l_4 = 150$ mm，原动件1的方位角 $\theta_1 = 0° \sim 360°$ 和等角速度 $\omega_1 = 1$ rad/s。试用矩阵法求该机构中各从动件的方位角、角速度和角加速度以及 E 点的位移、速度和加速度的运动线图。

解：如图3－13所示，先建立一直角坐标系，并标出各杆矢量及其方位角。其中共有四个未知量 θ_3、θ_4、s_3 及 s_E。为求解需建立两个封闭矢量方程，为此需利用两个封闭图形 $ABCA$ 及 $CDEGC$，由此可得

$$\boldsymbol{l}_6 + \boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{s}_3,\ \boldsymbol{l}_3 + \boldsymbol{l}_4 = \boldsymbol{l}'_6 + \boldsymbol{s}_E$$

再写成投影方程为

$$\begin{aligned} s_3\cos\theta_3 &= l_1\cos\theta_1 \\ s_3\sin\theta_3 &= l_6 + l_1\sin\theta_1 \\ l_3\cos\theta_3 + l_4\cos\theta_4 - s_E &= 0 \\ l_3\sin\theta_3 + l_4\sin\theta_4 &= l'_6 \end{aligned}$$

由以上各式即可求得 s_3、θ_3、θ_4 及 s_E 四个运动变量，而滑块2的方位角 $\theta_2 = \theta_3$。

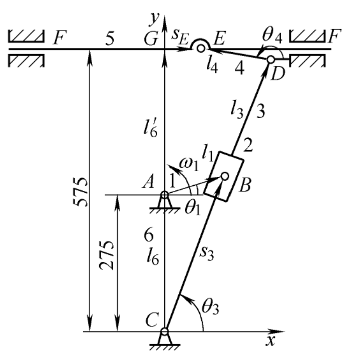


图3－13　牛头刨床机构

然后，分别将上列各式对时间取一次、二次导数，并写成矩阵形式，即得以下速度和加速度方程式：

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -s_3\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & s_3\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & -l_3\sin\theta_3 & -l_4\sin\theta_4 & -1 \\ 0 & l_3\cos\theta_3 & l_4\cos\theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s}_3 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ v_E \end{bmatrix} = \omega_1 \begin{bmatrix} -l_1\sin\theta_1 \\ l_1\cos\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -s_3\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & s_3\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & -l_3\sin\theta_3 & -l_4\sin\theta_4 & -1 \\ 0 & l_3\cos\theta_3 & l_4\cos\theta_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s}_3 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ a_E \end{bmatrix}$$

$$
= -\begin{vmatrix} -\omega_3\sin\theta_3 & -\dot{s}_3\sin\theta_3 - s_3\omega_3\cos\theta_3 & 0 & 0 \\ \omega_3\cos\theta_3 & \dot{s}_3\cos\theta_3 - s_3\omega_3\sin\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & -l_3\omega_3\cos\theta_3 & -l_4\omega_4\cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -l_3\omega_3\sin\theta_3 & -l_4\omega_4\sin\theta_4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{s}_3 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ v_E \end{vmatrix} + \omega_1 \begin{vmatrix} -l_1\omega_1\cos\theta_1 \\ -l_1\omega_1\sin\theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}
$$

而 $\omega_2=\omega_3$、$\alpha_2=\alpha_3$。

根据以上各式，将已知参数代入，即可应用计算机进行计算，现将求得的数值列于表3-1中。并可根据所得数据作出机构的位置线图(图3-14)、速度线图(图3-15)和加速度线图(图3-16)。这些线图称为机构的运动线图(kinematic diagram)。通过这些线图可以一目了然地看出机构在一个运动循环中位移、速度和加速度的变化情况，有利于进一步掌握机构的性能。

表**3-1**　各构件的位置、速度和加速度

θ_1	θ_3	θ_4	s_E	ω_3	ω_4	v_E	α_3	α_4	a_E
/(°)			/m	/(rad/s)		/(m/s)	/(rad/s²)		/(m/s²)
0	65.556 10	169.938 20	0.101 07	0.171 23	0.288 79	−0.101 84	0.247 70	0.292 66	−0.164 22
10	67.466 88	172.027 30	0.081 38	0.209 27	0.323 91	−0.122 72	0.190 76	0.117 19	−0.134 43
20	69.712 52	175.326 60	0.058 54	0.238 59	0.332 02	−0.138 34	0.147 15	−0.018 53	−0.111 13
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
360	65.556 10	169.938 20	0.101 07	0.171 23	0.288 79	−0.101 84	0.247 70	0.292 67	−0.164 22

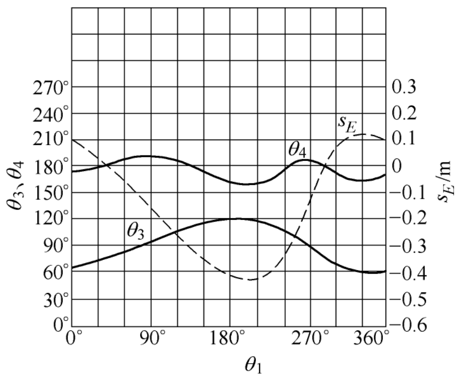


图3-14　位置线图

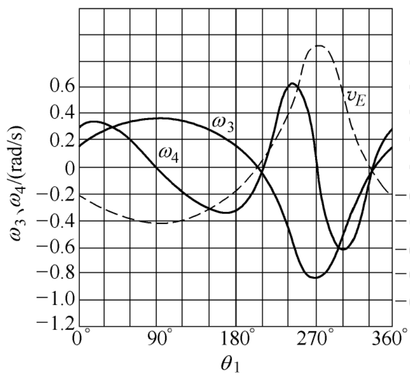


图3-15　速度线图

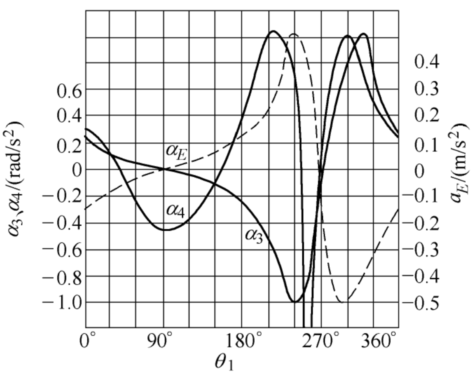


图3-16　加速度线图

*4. 机器设计中对加速度的限制

机器中所有的构件均具有质量,且在变速运动中产生的加速度会引起惯性力。这些惯性力将在机器内部的运动副中产生附加的动载荷和对零部件产生附加的动态应力。所以对高速机器设计时必须对其加速度有一定的限制,即机器的零部件对加速度的耐力有一定的要求。这一要求在机器设计时,通常可通过采取减小零部件的运动加速度或质量,或采用高强度的材料等办法来加以解决。

对于载人机器的设计,除了机器的零部件对加速度的耐力要求之外,还要考虑人对加速度的耐力要求。人们都有这样的感受:即身体对速度并不敏感,但对加速度却非常敏感。如乘坐飞机时,无论飞机以多大的速度飞行,只要飞行速度稳定,人们并感觉不到它的运动,但人们却能感觉到由于大气紊流、飞机起飞或降落所引起的速度变化。如果加速度过大,人们就感觉不舒服。因为加速度变化在人身体上引起的惯性力的变化,使血液的运动在体内沿加速度相反的方向运动,并滞后于人体的运动,这可导致大脑缺血或充血,从而引起头晕或视网膜变红等症状,若持续足够长的时间,甚至还会导致死亡。因此,在设计用于载人的装置时,必须知道人体所能忍受最大加速度的大小。

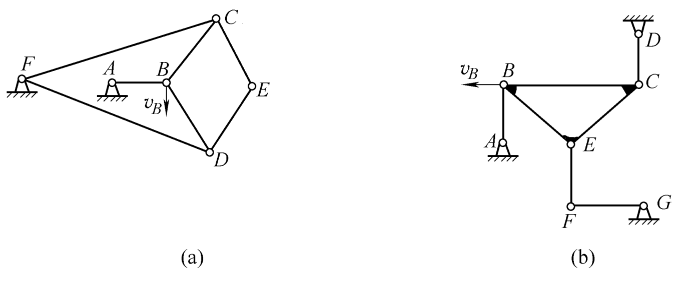
人体所能忍受的最大加速度的大小通常是以重力加速度 g 为单位,以其倍数来表示的。如 $1g$ 的加速度是我们重量的基准,$2g$ 就会感觉重量加倍,$6g$ 的加速度会使人手臂运动非常困难。人体对加速度的耐力不仅与加速度相对于人体的方向、加速度的大小以及加速度持续的时间有关,而且也与人的年龄段和健康状况以及身体素质等条件有关。要获取人体因素有关的加速度数据资料,一方面可查阅有关人体工程学或专门的设计资料如军事专业人员耐外界环境条件等所提供的试验数据。另一方面可通过日常经历的加速度的一些感受或经验来积累一些数据。如以汽车为例,汽车缓慢加速时的加速度为 $0.1g$,汽车猛烈加速时为 $0.3g$,汽车紧急刹车时为 $0.7g$,汽车快速转弯时为 $0.8g$ 等。

思考题及练习题

3-1　何谓速度多边形和加速度多边形?它们有哪些特性?

3-2　何谓速度影像和加速度影像?利用速度影像原理(或加速度影像原理)进行构件上某点的速度(或加速度)图解时应具备哪些条件?还应注意什么问题?

3-3　图示的各机构中,设已知各构件的尺寸及 B 点的速度 v_B,试作出其在图示位置时的速度多边形。



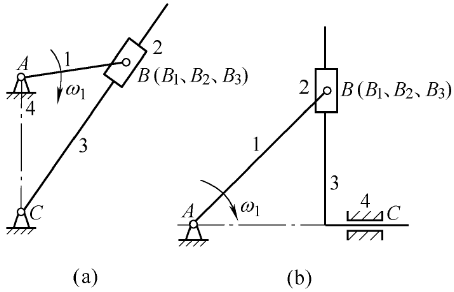
题 3-3 图　速度分析

3-4　试判断在图示的两机构中,B 点是否都存在科氏加速度?又在何位置时其科氏加速度为零?作出相应的机构位置图。并思考下列问题。

1)在什么条件下存在科氏加速度?

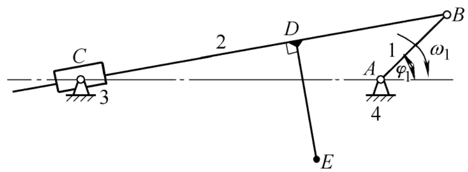
2)根据上一条,请检查一下所有科氏加速度为零的位置是否已全部找出?

3)在图 a 中,$a_{B2B3}^{k} = 2\omega_2 v_{B2B3}$ 对吗?为什么?



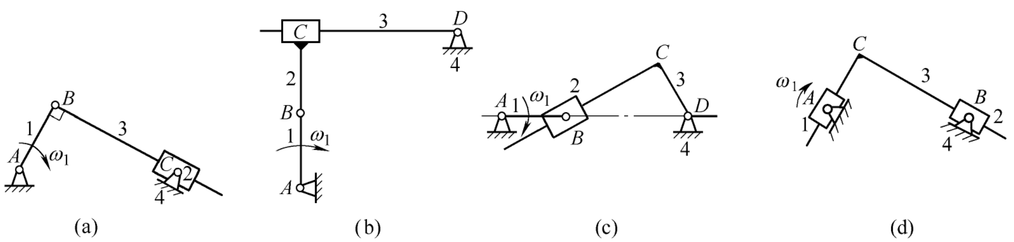
题3-4图　科氏加速度的判断

3-5　在图示的曲柄摇块机构中，已知 $l_{AB}=30$ mm，$l_{AC}=100$ mm，$l_{BD}=50$ mm，$l_{DE}=40$ mm，曲柄以等角速度 $\omega_1=10$ rad/s 回转，试用图解法求机构在 $\varphi_1=45°$位置时，点 D 和 E 的速度和加速度，以及构件 2 的角速度和角加速度。



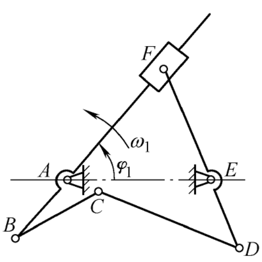
题3-5图　曲柄摇块机构的运动分析

3-6　在图示各机构中，设已知各构件的尺寸，原动件 1 以等角速度 ω_1 顺时针方向转动，试以图解法求机构在图示位置时构件3 上 C 点的速度及加速度（比例尺任选）。



题3-6图　四杆机构特殊位置的运动分析

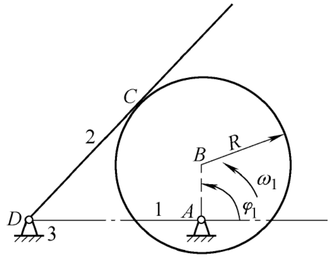
3-7　在图示机构中，已知 $l_{AE}=70$ mm，$l_{AB}=40$ mm，$l_{EF}=60$ mm，$l_{DE}=35$ mm，$l_{CD}=75$ mm，$l_{BC}=50$ mm，原动件以等角速度 $\omega_1=10$ rad/s 回转。试以图解法求在 $\varphi_1=50°$时 C 点的速度v_C 和加速度 $\boldsymbol{a}_C$。



题3-7图　六杆机构的运动分析

3-8　在图示的凸轮机构中，已知凸轮 1 以等角速度 $\omega_1=10$ rad/s 转动，凸轮为一偏心圆，其半径 $R=25$ mm，$l_{AB}=15$ mm，$l_{AD}=50$ mm，$\varphi_1=90°$。试用图解法求构件 2 的角速度 ω_2 与角加速度 α_2。

提示:可先将机构进行高副低代,然后对其替代机构进行运动分析。

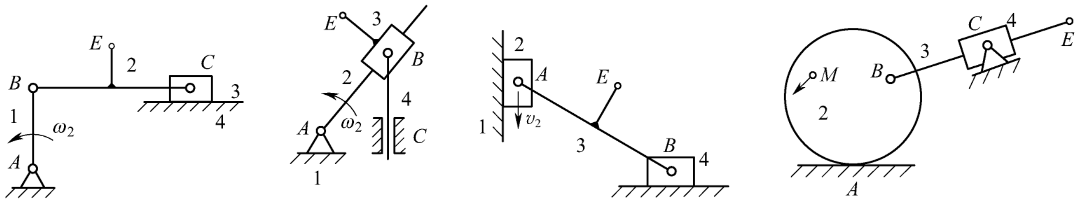


题3－8 图　凸轮高副机构的运动分析

3－9　何谓速度瞬心?相对瞬心与绝对瞬心有何异同点?

3－10　何谓三心定理?何种情况下的瞬心需用三心定理来确定?

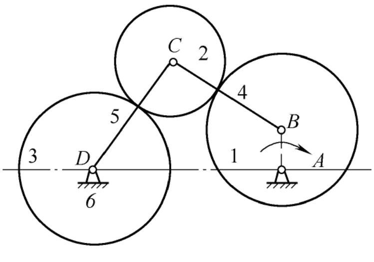
3－11　试求图示各机构在图示位置时全部瞬心的位置,并给出连杆上 E 点的速度方向。



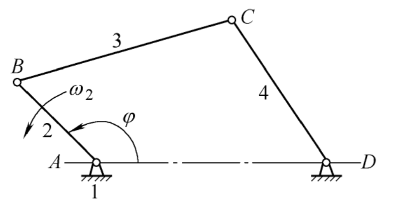
(a)　(b)　(c)　(d)

题3－11 图　求机构瞬心位置

3－12　在图示的齿轮－连杆组合机构中,试用瞬心法求齿轮 1 与 3 的传动比 ω_1/ω_3。



题 3－12 图　齿轮－连杆组合机构



题 3－13 图　铰链四杆机构

3－13　在图示的四杆机构中,$l_{AB}=60$ mm,$l_{CD}=90$ mm,$l_{AD}=l_{BC}=120$ mm,$\omega_2=10$ rad/s,试用瞬心法求:

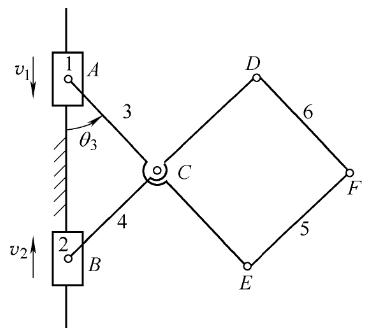
1)当 $\varphi=165°$时,点 C 的速度 v_C;

2)当 $\varphi=165°$时,构件 3 的 BC 线上(或其延长线上)速度最小的一点 E 的位置及其速度的大小;

3)当 $v_C=0$ 时,φ 角之值(有两个解)。

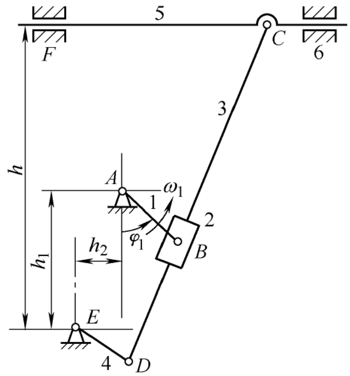
3－14　在图示机构中,已知 $l_{AC}=l_{BC}=l_{CD}=l_{CE}=l_{DF}=l_{EF}=20$ mm,滑块 1 及 2 分别以匀速且 $v_1=v_2=0.002$ m/s 作反向移动,试用速度瞬心法求机构在 $\theta_3=45°$位置时的速度之比 v_F/v_1 的大小。

3－15　在图示的牛头刨床机构中,已知 $h=800$ mm,$h_1=360$ mm,$h_2=120$ mm,$l_{AB}=200$ mm,$l_{CD}=960$ mm,$l_{DE}=160$ mm。设曲柄以等角速度 $\omega_1=5$ rad/s 逆时针方向回转,试以综合法求机构在 $\varphi_1=135°$位置时,刨头上 C 点的速度 v_C。

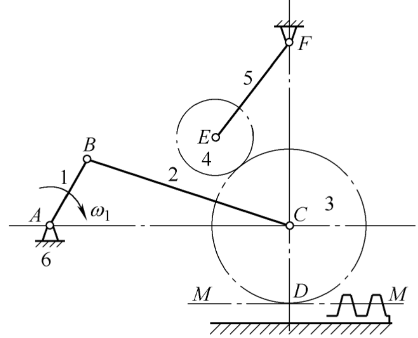


题3－14 图　剪刀机构

提示：因此刨床机构为Ⅲ级机构，故三副构件3的位置作图需借助于其模板 CBD 来确定位置。



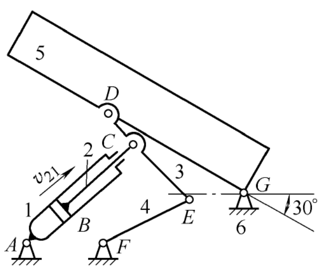
题3－15图　牛头刨床机构



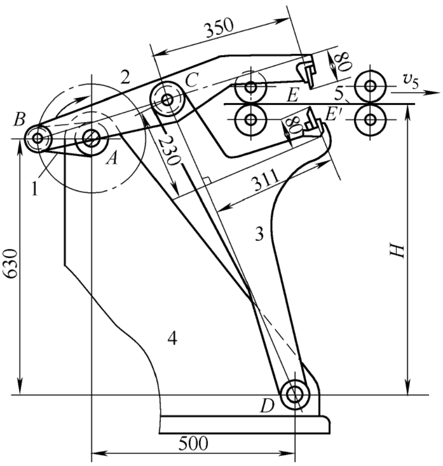
题3－16图　齿轮－连杆组合机构

3－16　在图示的齿轮－连杆组合机构中，MM 为固定齿条，齿轮3的直径为齿轮4的2倍，设已知原动件1以等角速度 ω_1 顺时针方向回转，试以综合法求机构在图示位置时，E 点的速度 v_E 以及齿轮3、4的速度影像。

3－17　如图所示为一自卸货车的翻转机构。已知各构件的尺寸及液压缸活塞的相对移动速度 v_{21} = 常数，试用综合法求当车厢倾转至30°时车厢的倾转角速度 ω_5。



题3－17图　自卸车翻转机构



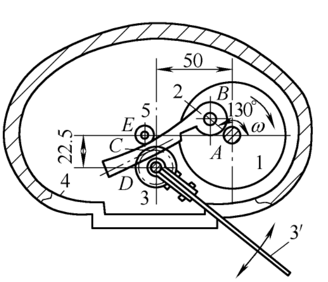
题3－18图　飞剪机构

3－18　如图所示的摆动式飞剪机用于剪切连续运动中的钢带。设机构的尺寸为 l_{AB} = 130 mm，l_{BC} = 340 mm，l_{CD} = 800 mm。试联合用图解法和解析法确定剪床相对钢带的安装高度 H（两切刀 E 及 E' 应同时开始剪切钢带5）；若钢带5以速度 v_2 = 0.5 m/s 送进时，求曲柄1的角速度 ω_1 应为多少才能作到同步剪切？

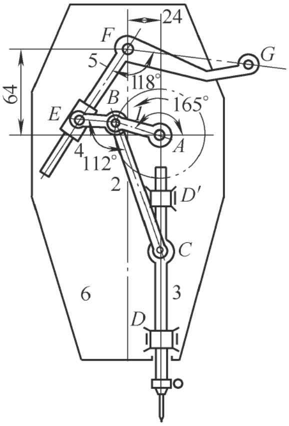
3－19　图示为一汽车雨刷机构。其构件1绕固定轴心 A 转动，齿条2与构件1在 B 点处铰接，并与绕固定轴心 D 转动的齿轮3啮合（滚子5用来保证两者始终啮合），固连于轮3上的雨刷3′作往复摆动。其优点是雨刷的摆动角很大。设机构的尺寸为 l_{AB} = 18 mm，轮3的分度圆半径 $r_3 = l_{CD}$ = 12 mm，原动件1以等角速度 ω = 1 rad/s顺时针回转，试以图解法确定雨刷的摆程角和图示位置时雨刷的角速度，并以解析法求作雨刷的角速度线图。

3－20　图示为一缝纫机针头及其挑线器机构，设已知机构的尺寸：l_{AB} = 32 mm，l_{BC} = 100 mm，l_{BE} = 28 mm，l_{FG} = 90 mm，原动件1以等角速度 ω_1 = 5 rad/s逆时针方向回转，试用图解法求机构在图示位置时缝纫机针头和

挑线器摆杆 FG 上点 G 的速度及加速度，并用解析法求作机构在原动件 1 转动一周时针头的速度及加速度线图。



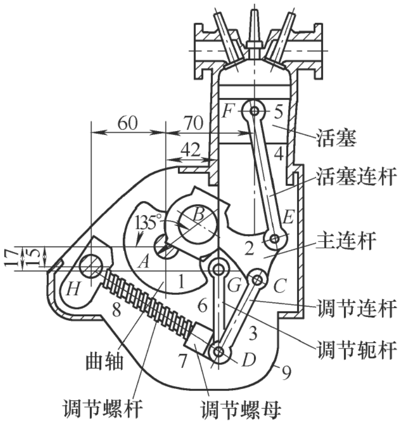
题 3－19 图　雨刷机构



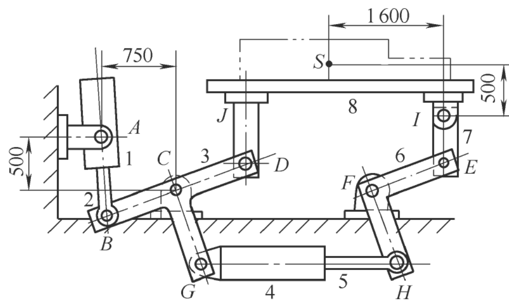
题 3－20 图　缝纫机机头

3－21　图示为一行程可调的发动机（它有利于在不同工况下的节能）。在此发动机中，已知各构件的尺寸：$l_{AB}=35$ mm，$l_{BC}=l_{BE}=65$ mm，$l_{CE}=35$ mm，$l_{CD}=l_{DG}=70$ mm，$l_{EF}=110$ mm，调节螺旋的可调范围为 $l_{DH}=55\sim125$ mm。试以图解法求该发动机的最短行程和最长行程。设机构在图示位置时曲轴的瞬时角速度 $\omega_1=5$ rad/s（顺时针方向）及瞬时角加速度 $\alpha_1=5$ rad/s^2（顺时针方向），求此时活塞 5 的速度及加速度，并用解析法求作活塞 5 在一个运动循环内的速度及加速度线图。

3－22　图示为一可倾斜的升降台机构，此升降机有两个液压缸 1、4，设已知机构的尺寸为：$l_{BC}=l_{CD}=l_{CG}=l_{FH}=l_{EF}=750$ mm，$l_{DE}=2\,000$ mm，$l_{EI}=500$ mm。若两活塞杆的相对移动速度分别为 $v_{21}=0.05$ m/s＝常数和 $v_{54}=0.03$ m/s＝常数。试求当两活塞杆的相对位移分别为 $s_{21}=350$ mm，$s_{54}=260$ mm 时（以升降台位于水平且 DE 与 CF 重合时为起始位置），工件重心 S 处的速度及加速度和工件的角速度及角加速度。



题 3－21 图　行程可调发动机

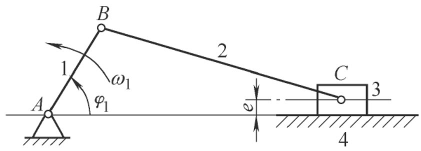


题 3－22 图　双自由度升降平台

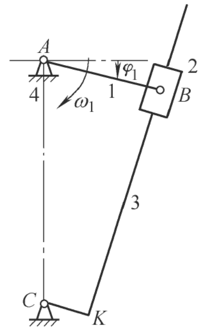
3－23　在图示的机构中，已知原动件 1 以等角速度 $\omega_1=10$ rad/s 逆时针方向转动，$l_{AB}=100$ mm，$l_{BC}=300$ mm，$e=30$ mm。当 $\varphi_1=60°$、$120°$、$220°$时，试用复数矢量法求构件 2 的转角 θ_2、角速度 ω_2 和角加速度 α_2，构件 3 的速度 v_3 和加速度 a_3。

3－24　在图示的摆动导杆机构中，已知曲柄 AB 以等角速度 $\omega_1=10$ rad/s 转动，$l_{AB}=100$ mm，$l_{AC}=200$ mm，

$l_{CK}=40$ mm。当 $\varphi_1=30°$、120°时,试用复数矢量求构件3 的角速度 ω_3 和角加速度 α_3。



题3-23 图 曲柄滑块机构



题3-24 图 摆动导杆机构

3-25 在用解析法作运动分析时,如何判断各杆的方位角所在象限?如何确定速度、加速度、角速度和角加速度的方向?

3-26 利用矩阵法对机构进行运动分析,在写位置方程、速度方程和加速度方程时,应注意哪些问题,以利于分析工作的进行和保证计算结果的正确性。

阅读参考资料

[1] 陈作模. 机械原理学习指南[M]. 5 版. 北京:高等教育出版社,2008.
[2] 曹惟庆,等. 连杆机构的分析与综合[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2002.
[3] 梁崇高,等. 连杆机构的计算机辅助设计[M]. 北京:机械工业出版社,1986.