第三章　存在和唯一性定理

我们在第二章讨论了一阶微分方程的初等积分法, 解决了几类特殊的方程. 但是, 我们也知道, 对许多微分方程, 例如形式上很简单的里卡蒂方程 $y' = x^2 + y^2$, 不能通过初等积分法求解. 这就产生一个问题: 一个不能用初等积分法求解的微分方程是否意味着没有解呢? 或者说, 一个微分方程的初值问题在何种条件下一定有解呢? 当有解时, 它的解是否唯一呢? 毫无疑问, 这是一个很基本的问题. 不解决这个问题, 对微分方程的进一步研究 (无论是定性的还是定量的) 就无从谈起. 柯西 (Cauchy, 1789—1857) 在 19 世纪 20 年代第一个成功地建立了微分方程初值问题解的存在和唯一性定理 (因此, 后人把初值问题称为柯西问题). 在 1876 年李卜西兹 (Lipschitz, 1832—1903) 减弱了柯西定理的条件. 而在 1893 年皮卡 (Picard, 1856—1941) 用逐次逼近法在李卜西兹条件下对定理给出了一个新证明. 此外, 佩亚诺 (Peano, 1858—1932) 在更一般的条件下建立了柯西问题解的存在性定理 (不顾及唯一性). 本章主要介绍皮卡定理和佩亚诺定理, 并介绍解的延伸和解的最大存在区间等有关问题.

§3.1　皮卡存在和唯一性定理

本节将利用皮卡的逐次迭代法, 来证明微分方程初值问题解的存在和唯一性定理. 为此, 我们首先介绍一个条件. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内满足不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

其中常数 $L > 0$. 则称函数 $f(x, y)$ 在区域 D 内对 y 满足**李卜西兹条件** (或简称**李氏条件**).

易知, 若函数 $f(x, y)$ 在凸形区域 D 内对 y 有连续的偏微商 (这正是柯西当年建立微分方程初值问题解的存在和唯一性定理时所假

设的一个条件), 并且 D 是有界闭区域, 则 $f(x,y)$ 在 D 内对 y 满足李氏条件; 反之, 结论不一定正确. 例如，$f(x,y)=|y|$ (对 y) 满足李氏条件, 但当 $y=0$ 时它对 y 没有微商.

现在, 我们要证明下述皮卡定理.

定理 3.1 设初值问题

$$(E): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \quad y(x_0)=y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x-x_0|\leqslant a, \quad |y-y_0|\leqslant b$$

内连续, 而且对 y 满足李氏条件. 则 (E) 在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 上有并且只有一个解, 其中常数

$$h=\min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}, \quad M>\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

【附注 1】从这个定理看出, 解的存在区间 I 与三个正数 a,b,M 的相对大小有关: 当 M 相对于 b (以及 a) 较小时, "解" 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的绝对值较小, 从而积分曲线从 (x_0,y_0) 向左右延伸的走向较平缓, 它有可能在 R 内达到左右边界 (即 $h=a$). 反之, 当 M 相对于 b (以及 a) 较大时, 积分曲线从 (x_0,y_0) 向左右延伸的走向较陡峭, 有可能在 R 内首先达到上下边界 (即 $h<a$). 我们在 §3.2 中构造欧拉折线时, 读者将会对此更加明了.

定理 3.1 的证明 为了突出思路, 我们把证明分成以下四步:

(一) 初值问题 (E) 等价于积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

事实上, 设 $y=y(x)$ $(x\in I)$ 是 (E) 的解, 则有

$$y'(x)=f(x,y(x)) \quad (x\in I) \tag{3.2}$$

和

$$y(x_0) = y_0. \tag{3.3}$$

由此, 对恒等式 (3.2) 积分并利用初值条件 (3.3), 得到

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\mathrm{d}x \quad (x \in I),$$

即 $y = y(x)$ 是积分方程 (3.1) 的解.

反之, 设 $y = y(x)$ $(x \in I)$ 是 (3.1) 的解, 则只要逆转上面的推导就可知道 $y = y(x)$ 是 (E) 的解.

因此, 上述定理的证明等价于证明积分方程 (3.1) 在区间 I 上有且只有一个解.

(二) 用逐次迭代法构造皮卡序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\mathrm{d}x \quad (x \in I) \tag{3.4}$$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 其中 $y_0(x) = y_0$.

当 $n = 0$ 时, 注意到 $f(x, y_0(x))$ 是 I 上的连续函数, 所以由 (3.4) 可见

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0(x))\mathrm{d}x \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的, 而且满足不等式

$$|y_1(x) - y_0| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0(x)|\mathrm{d}x \right| \leqslant M|x - x_0|. \tag{3.5}$$

这就是说, 在区间 I 上 $|y_1(x) - y_0| \leqslant Mh \leqslant b$.

因此,$f(x, y_1(x))$ 在 I 上是连续的. 所以由 (3.4) 可见

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\mathrm{d}x \quad (x \in I)$$

在 I 上是连续可微的, 而且满足不等式

$$|y_2(x)-y_0|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_1(x))|\mathrm{d}x\right|\leqslant M|x-x_0|,$$

从而我们有:$|y_2(x)-y_0|\leqslant Mh\leqslant b\ \ (x\in I)$.

如此类推, 用归纳法不难证明: 由 (3.4) 给出的皮卡序列 $y=y_n(x)$ 在 I 上是连续的, 而且满足不等式

$$|y_n(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

(三) 现证: 皮卡序列 $y=y_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛到积分方程 (3.1) 的解.

注意, 序列 $y_n(x)$ 的收敛性等价于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_{n+1}(x)-y_n(x)] \tag{3.6}$$

的收敛性. 下面证明级数 (3.6) 在 I 上是一致收敛的. 为此, 我们用归纳法证明不等式

$$|y_{n+1}(x)-y_n(x)|\leqslant\frac{M}{L}\frac{(L|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.7}$$

在 I 上成立 $(n=0,1,2,\cdots)$.

事实上, 当 $n=0$ 时由 (3.5) 可知 (3.7) 成立.

假设当 $n=k$ 时 (3.7) 成立. 先由 (3.4) 推出

$$|y_{k+2}(x)-y_{k+1}(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y_{k+1}(x))-f(x,y_k(x))]\mathrm{d}x\right|.$$

再利用李氏条件和归纳法假设, 我们得到

$$\begin{aligned}|y_{k+2}(x)-y_{k+1}(x)|&\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}L|y_{k+1}(x)-y_k(x)|\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant M\left|\int_{x_0}^{x}\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{d}x\right|\\&=\frac{M}{L}\frac{L|x-x_0|^{k+2}}{(k+2)!}.\end{aligned}$$

由此可见, 当 $n = k + 1$ 时 (3.7) 也成立. 因此, (3.7) 得证.

显然, 不等式 (3.7) 蕴含级数 (3.6) 在区间 I 上是一致收敛的. 因此, 皮卡序列 $y = y_n(x)$ 是一致收敛的. 则极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \quad (x \in I)$$

在区间 I 上是连续的. 然后, 利用 $f(x, y)$ 的连续性以及皮卡序列 $y_n(x)$ 的一致收敛性, 我们在 (3.4) 中令 $n \to \infty$ 就得到

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x \quad (x \in I).$$

因此, $y = \varphi(x)$ 在 I 上是积分方程 (3.1) 的一个解.

(四) 最后证明唯一性

设积分方程 (3.1) 有两个解分别为 $y = u(x)$ 和 $y = v(x)$. 令 $J = [x_0 - d, x_0 + d]$ 为它们的共同存在区间, 其中 d 为某一正数 ($d \leqslant h$). 则由 (3.1) 推出

$$u(x) - v(x) = \int_{x_0}^{x} [f(x, u(x)) - f(x, v(x))]\mathrm{d}x \quad (x \in J).$$

再利用李氏条件, 我们得到

$$|u(x) - v(x)| \leqslant L \left| \int_{x_0}^{x} |u(x) - v(x)|\mathrm{d}x \right|. \tag{3.8}$$

注意, 在区间 J 上,$|u(x) - v(x)|$ 是连续有界的. 因此可取它的一个上界 K. 则由 (3.8) 可见

$$|u(x) - v(x)| \leqslant LK|x - x_0|.$$

然后, 把它代入 (3.8) 的右端, 我们推出

$$|u(x) - v(x)| \leqslant K\frac{(L|x - x_0|)^2}{2}.$$

如此递推, 我们可用归纳法得到

$$|u(x)-v(x)| \leqslant K\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!} \quad (x \in J).$$

然后, 令 $n \to \infty$, 则上面不等式的右端趋于零. 因此, 我们推出

$$u(x) = v(x) \quad (x \in J).$$

这就是说, 积分方程 (3.1) 的解是唯一的.

定理 3.1 的证明到此结束. □

有了皮卡定理, 对于一般微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{3.9}$$

只要能判别函数 $f(x,y)$ 在某个区域 D 内连续并且对 y 有连续的偏微商 (或满足李氏条件), 我们就可断言在区域 D 内经过每一点有并且只有一个解.

例如, 里卡蒂方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

虽不能用初等积分法求解, 但由皮卡定理容易知道它在 (x,y) 平面上经过每一点有且只有一个解.

一般而言, 如果函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 而对 y 不满足李氏条件, 那么微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点仍有一个解 (即佩亚诺存在定理, 见 §3.2), 但这解可能是唯一的, 也可能不是唯一的 (参考本节习题 1). 也就是说, 李氏条件只是解的唯一性的一个充分条件. 在微分方程的一般理论中还没有保证解的唯一性的一种充要条件. 因此, 时至今日有关这方面的研究并没有终结.

下面我们介绍一个比李氏条件更弱的条件.

设函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续, 而且满足不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant F(|y_1 - y_2|),$$

其中 $F(r) > 0$ 是 $r > 0$ 的连续函数, 而且瑕积分

$$\int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{F(r)} = \infty$$

($r_1 > 0$ 为常数). 则称 $f(x, y)$ 在 G 内对 y 满足 **Osgood 条件**.

注意, 李氏条件是 Osgood 条件的特例, 这是因为 $F(r) = Lr$ 满足上述要求.

现在, 我们把最先由美国数学家 Osgood 证明的有关解的一个唯一性定理叙述如下.

定理 3.2 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内对 y 满足 Osgood 条件, 则微分方程 (3.9) 在 G 内经过每一点的解都是唯一的.

证明 假设不然. 则在 G 内可以找到一点 (x_0, y_0) 使得方程 (3.9) 有两个解 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ 都经过 (x_0, y_0), 而且至少存在一个值 $x_1 \neq x_0$, 使得 $y_1(x_1) \neq y_2(x_1)$. 不妨设 $x_1 > x_0$, 且 $y_1(x_1) > y_2(x_1)$. 令

$$\bar{x} = \sup_{x \in [x_0, x_1]} \{x\colon y_1(x) = y_2(x)\},$$

则显然有 $x_0 \leqslant \bar{x} < x_1$, 而且

$$r(x) \overset{\mathrm{d}}{=} y_1(x) - y_2(x) > 0, \quad \bar{x} < x \leqslant x_1$$

和 $r(\bar{x}) = 0$. 因此, 我们有

$$\begin{aligned} r'(x) &= y_1'(x) - y_2'(x) = f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) \\ &\leqslant F(|y_1(x) - y_2(x)|) = F(r(x)), \end{aligned}$$

亦即

$$\frac{\mathrm{d}r(x)}{F(r(x))} \leqslant \mathrm{d}x \quad (\bar{x} < x \leqslant x_1).$$

从 $\bar{x}$ 到 x_1 积分上式, 得到

$$\int_0^{r_1} \frac{\mathrm{d}r}{F(r)} \leqslant x_1 - \bar{x},$$

其中 $r_1 = r(x_1) > 0$. 但这不等式的左端是 ∞, 而右端是一个有限的数. 因此, 这是一个矛盾, 它证明了定理 3.2. □

最后, 我们还要指出: 如果没有李氏条件, 那么一般也不能保证皮卡序列的收敛性. 请看下面 Müller 的反例.

【例 1】设初值问题

$$(E_0): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), \quad y(0)=0,$$

其中函数

$$F(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x=0,\ -\infty<y<\infty; \\ 2x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\ -\infty<y<0; \\ 2x-\dfrac{4y}{x}, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\ 0\leqslant y<x^2; \\ -2x, & \text{当 } 0<x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y<\infty. \end{cases}$$

容易验证, 函数 $F(x,y)$ 在条形区域

$$S: \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad -\infty<y<\infty$$

内是连续的, 可是对 y 不满足李氏条件.

对于上述初值问题 (E_0), 我们有皮卡序列

$$y_{n+1}(x)=\int_0^x F(x,y_n(x))\mathrm{d}x \quad (y_0(x)=0)$$

$(0\leqslant x\leqslant 1;\ n=0,1,2,\cdots)$. 而且容易推出

$$y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2 \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

$(n=1,2,\cdots)$. 由此可见, 初值问题 (E_0) 的皮卡序列是不收敛的.

另外, 可以验证 $y=\frac{1}{3}x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 是 (E_0) 的解; 而且只要利用 $F(x,y)$ 关于 y 的递减性就可证明 (E_0) 的解是唯一的 (见本节习题 3). 但是,(E_0) 的皮卡序列和它的任何子序列都不能充分接近 (E_0) 的解. 这就是说, 对初值问题 (E_0) 的求解, 皮卡逐次迭代法是无效的.

习题 3-1

1. 利用右端函数的性质讨论下列微分方程满足初值条件 $y(0)=0$ 的解的唯一性问题:

   (1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=|y|^{\alpha}$, (常数 $\alpha>0$);

   (2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}0, & \text{当 } y=0,\\ y\ln|y|, & \text{当 } y\neq 0.\end{cases}$

2. 试求初值问题:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x+y+1,\quad y(0)=0$$
   的皮卡序列, 并由此取极限求解.

*3. 设连续函数 $f(x,y)$ 对 y 是递减的, 则初值问题 (E) 在右侧 (即 $x\geqslant x_0$) 的解是唯一的. (试问: 在左侧 (即 $x\leqslant x_0$) 的解是否唯一? 能举一个反例吗?)

§3.2* 佩亚诺存在定理

本节旨在放宽有关微分方程解的存在定理的条件. 简言之, 在皮卡定理中如果只假定 $f(x,y)$ 在 R 内的连续性, 那么利用下述欧拉折线仍可证明初值问题 (E) 的解在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是存在的 (但不一定是唯一的). 这就是本节要介绍的佩亚诺定理.

为此, 需要先做一些准备工作.

§3.2.1 欧拉折线

早在 18 世纪, 欧拉就依据微分方程的几何解释 (见第一章的 §1.2), 提出用简单的折线来近似地描绘所要寻求的积分曲线——后人称这种方法为欧拉折线法. 它是微分方程近似计算方法的开端.

设微分方程
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \tag{3.10}$$

和相关的初值问题

$$(E): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 $f(x,y)$ 是在矩形区域

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b$$

内给定的连续函数. 令正数 M 为 $|f(x,y)|$ 在 R 上的一个上界. 则微分方程 (3.10) 在 R 内各点 P 的线素 $l(P)$ 的斜率界于 $-M$ 和 M 之间. 由此不难推出: 若 $y = y(x)$ 是初值问题 (E) 的一个解, 则它满足不等式

$$|y(x) - y_0| \leqslant M|x - x_0|.$$

因此, 为了保证初值问题 (E) 的积分曲线 $y = y(x)$ 在矩形 R 内, 我们只需作下面的限制:

$$M|x - x_0| \leqslant b, \quad \text{亦即 } |x - x_0| \leqslant \frac{b}{M}.$$

因此, 只要令

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

则在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上 (E) 的积分曲线 Γ: $y = y(x)$ 停留在 R 内. 事实上, 它停留在 R 内的一个角形区

$$\Delta_h: \qquad |y - y_0| \leqslant M|x - x_0| \quad (|x - x_0| \leqslant h)$$

之中 (见图 3-1).

现在, 把区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 分成 $2n$ 等份. 则每等份的长度为 $h_n = h/n$, 而 $2n + 1$ 个分点为

$$x_k = x_0 + kh_n \quad (k = 0, \pm 1, \cdots, \pm n).$$

注意,x_{-n} 和 x_n 为区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 的两个端点.

其次, 从初值点 $P_0(x_0, y_0)$ 出发先向右作折线如下.

延长在 P_0 的线素 $l(P_0)$, 使它与垂线 $x = x_1$ 交于点 $P_1(x_1, y_1)$. 则由线素的定义 (第一章 §1.2) 可知

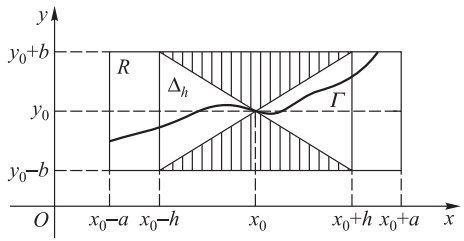

图 3-1

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0).$$

取直线段 $[P_0, P_1]$ 作为折线的第一段, 易知它停留在角形区 Δ_h 内; 再在 P_1 点延长线素 $l(P_1)$, 使它与垂线 $x = x_2$ 相交于点 $P_2(x_2, y_2)$. 则有

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

取直线段 $[P_1, P_2]$ 作为折线的第二段, 易知它停留在角形区 Δ_h 内; 如此类推, 我们在 P_0 点的右侧作出一条折线

$$[P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n] \subset \Delta_h,$$

它的节点依次为 P_0, P_1, P_2, $\cdots$, P_n. 用相同的方法, 再从 P_0 点出发可以向左作出一条折线

$$[P_{-n}, \cdots, P_{-2}, P_{-1}, P_0] \subset \Delta_h.$$

然后, 就在 Δ_h 内得到一条连续的折线

$$\gamma_n = [P_{-n}, \cdots, P_{-k}, \cdots, P_{-1}, P_0, P_1, \cdots, P_k, \cdots, P_n],$$

其中节点 P_k 的坐标为 (x_k, y_k),

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})(x_k - x_{k-1});$$

而 P_{-k} 的坐标为 (x_{-k}, y_{-k}),

$$y_{-k} = y_{-k+1} + f(x_{-k+1}, y_{-k+1})(x_{-k} - x_{-k+1})$$

$(k=1,2,\cdots,n)$. 称 γ_n 为初值问题 (E) 的**欧拉折线.**

令欧拉折线 γ_n 的表达式为

$$y=\varphi_n(x) \quad (|x-x_0|\leqslant h). \tag{3.11}$$

当 $x_0<x\leqslant x_0+h$ 时, 则有整数 s, 使得

$$x_s<x\leqslant x_{s+1} \quad (0\leqslant s\leqslant n-1).$$

由此不难推出欧拉折线的计算公式:

$$\varphi_n(x)=y_0+\sum_{k=0}^{s-1}f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_s,y_s)(x-x_s). \tag{3.12}$$

同理, 当 $x_0-h\leqslant x<x_0$ 时, 可推出

$$\varphi_n(x)=y_0+\sum_{k=0}^{-s+1}f(x_k,y_k)(x_{k-1}-x_k)+f(x_{-s},y_{-s})(x-x_{-s}). \tag{3.13}$$

从线素场的几何意义可以看出, 把上述欧拉折线 $y=\varphi_n(x)$ 作为初值问题 (E) 的一个近似解是合理的. 而且可以猜想: 只要增大 n, 就能提高近似的精度. 这在理论上需要证明欧拉折线 $y=\varphi_n(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上是收敛的 (或至少有一个收敛的子序列), 而且收敛到初值问题 (E) 的解. 但是, 由于在欧拉时代的数学分析还没有足够严格的基础, 所以欧拉未能解决这个收敛性问题.

后来, 有了 Ascoli 引理, 解决上面所说的问题已经不在话下.

§3.2.2 Ascoli 引理

设在区间 I 上给定一个函数序列

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x),\ \cdots, \tag{3.14}$$

如果存在常数 $K>0$, 使得不等式

$$|f_n(x)| < K \quad (x \in I)$$

对一切 $n = 1, 2, \cdots$ 都成立, 则称函数序列 (3.14) 在区间 I 上是**一致有界**的.

如果对任意的正数 ε, 存在正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得只要 $x_1, x_2 \in I$ 和 $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有

$$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则称函数序列 (3.14) 在区间 I 上是**等度连续**的.

例如, 函数序列

$$f_n(x) = (-1)^n + x^n \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.15}$$

在区间 $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ 上是一致有界和等度连续的; 在区间 $|x| \leqslant 1$ 上是一致有界但不是等度连续的; 而在区间 $|x| \leqslant 2$ 上既不是一致有界又不是等度连续的.

Ascoli 引理 设函数序列 (3.14) 在有限闭区间 I 上是一致有界和等度连续的, 则可以选取它的一个子序列

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \cdots, f_{n_k}(x), \cdots,$$

使它在区间 I 上是一致收敛的.

证明见 [4] 或 [8].

§3.2.3 佩亚诺存在定理

我们先证明两个引理.

引理 3.1 欧拉序列 (3.11) 在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上至少有一个一致收敛的子序列.

证明 在 §3.2.1 中我们已经指出, 所有欧拉折线 γ_n 都停留在矩形区域 R 内; 亦即

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant b \quad (|x - x_0| \leqslant h)$$

$(n=1,2,\cdots)$. 这就是说, 欧拉序列 (3.11) 是一致有界的.

其次, 注意折线 γ_n 的各个直线段的斜率界于 $-M$ 和 M 之间, 其中 M 为 $|f(x,y)|$ 在 R 的一个上界. 因此, 容易证明折线 γ_n 的任何割线的斜率也界于 $-M$ 和 M 之间; 亦即

$$|\varphi_n(s)-\varphi_n(t)|\leqslant M|s-t| \quad (n=1,2,\cdots),$$

其中 s 和 t 是区间 $[x_0-h,x_0+h]$ 内的任何两点. 由此可见, 序列 (3.11) 也是等度连续的.

因此, 由 Ascoli 引理直接完成了引理 3.1 的证明. □

引理 3.2 欧拉折线 $y=\varphi_n(x)$ 在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上满足关系式

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,\varphi_n(x))\mathrm{d}x+\delta_n(x), \tag{3.16}$$

其中函数 $\delta_n(x)$ 趋于零, 即

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(x)=0 \quad (|x-x_0|\leqslant h). \tag{3.17}$$

证明 我们只考虑右侧的情形:$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$. 对于左侧的情形可作类似的讨论.

利用恒等式

$$f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i)\equiv\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i,y_i)\mathrm{d}x,$$

就可得到

$$f(x_i,y_i)(x_{i+1}-x_i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,\varphi_n(x))\mathrm{d}x+d_n(i),$$

其中

$$d_n(i)=\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x_i,y_i)-f(x,\varphi_n(x))]\mathrm{d}x$$

$(i=0,1,\cdots,s-1)$; 同样对于 $x_s<x\leqslant x_{s+1}$, 可得

$$f(x_s,y_s)(x-x_s)=\int_{x_s}^{x} f(x,\varphi_n(x))\mathrm{d}x+d_n^*(x),$$

其中

$$d_n^*(x) = \int_{x_s}^{x} [f(x_s, y_s) - f(x, \varphi_n(x))]\mathrm{d}x.$$

因此, 可把 (3.12) 写成如下形式:

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_n(x))\mathrm{d}x + \delta_n(x),$$

其中

$$\delta_n(x) = \sum_{i=0}^{s-1} d_n(i) + d_n^*(x).$$

另一方面, 根据欧拉折线的构造, 可知不等式

$$|x - x_i| \leqslant \frac{h}{n}, \quad |\varphi_n(x) - y_i| \leqslant M|x - x_i| \leqslant \frac{Mh}{n}$$

在区间 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 上成立. 因此, 只要利用 $f(x, y)$ 的连续性, 我们就可以推出如下结论.

任给正数 ε, 存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得

$$|f(x_i, y_i) - f(x, \varphi_n(x))| < \frac{\varepsilon}{h} \quad (x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}),$$

只要 $n > N$.

这样一来, 就有

$$\begin{aligned} |d_n(i)| &\leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x_i, y_i) - f(x, \varphi_n(x))|\mathrm{d}x \\ &< \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{h}\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{n}, \end{aligned}$$

只要 $n > N$; 同样, 由于 $x_s < x \leqslant x_{s+1}$, 我们有

$$|d_n^*(x)| < \frac{\varepsilon}{n},$$

只要 $n > N$. 由此推出

$$|\delta_n(x)| < \frac{s\varepsilon}{n} + \frac{\varepsilon}{n} \leqslant \varepsilon,$$

只要 $n > N$. 这就证明了 (3.17). 引理 3.2 从而得证. □

现在, 容易证明下述佩亚诺的存在定理.

定理 3.3 设函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 R 内连续, 则初值问题

$$(E): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上至少有一个解 $y = y(x)$, 这里矩形区域 R 和正数 h 的定义同定理 3.1.

证明 利用引理 3.1, 我们可以选取欧拉折线序列 (3.11) 的一个子序列

$$\varphi_{n_1}(x),\ \varphi_{n_2}(x),\ \cdots,\ \varphi_{n_k}(x),\ \cdots,$$

使它在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上一致收敛. 则极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x)$$

在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上是连续的.

再利用引理 3.2, 由 (3.16) 可知

$$\varphi_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_{n_k}(x))\mathrm{d}x + \delta_{n_k}(x);$$

令 $k \to \infty$, 则由 $\varphi_{n_k}(x)$ 的一致收敛性和 (3.17), 以及 $f(x,y)$ 的连续性, 我们推出

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x \quad (|x-x_0| \leqslant h).$$

这就证明了 $y = \varphi(x)$ 在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上是 (E) 的一个解.

定理 3.3 从而得证. □

【附注 1】由上述佩亚诺定理的证明可知, 初值问题 (E) 的欧拉序列的任何一致收敛子序列都趋于 (E) 的某个解. 因此, 如果 (E) 的解是唯一的, 那么它的欧拉序列就一致收敛到那个唯一的解. 另外, 我们从 §3.1 例 1 (Müller 之例) 看到, 对于初值问题 (E) 的皮卡序列就不具有欧拉序列的上述性质. 从这个意义上讲, 欧拉序列似乎比皮卡序列合理.

【附注 2】佩亚诺定理在相当广泛的条件 (即, 只要求函数 $f(x,y)$ 的连续性) 下保证了初值问题解的存在性, 而不保证唯一性. 1925 年苏联数学家拉甫仑捷夫曾在矩形区域 R 内构造了一个连续函数 $F(x,y)$, 使得对应的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y)$$

在 R 内经过每一点至少有两条不同的积分曲线. 人们称这种复杂的现象为拉甫仑捷夫现象[1]. 如果微分方程在区域 G 内每一点都满足解的存在和唯一性条件, 那么积分曲线族在局部范围内的结构是非常简单的: 局部等价于一族平行直线. 这一点在几何上很容易想象, 而严格的分析证明留在第五章 §5.3.

【附注 3】一般说来, 如果不要求 $f(x,y)$ 的连续性, 那么上面的初值问题 (E) 可能是无解的. 例如, 设函数

$$f^*(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 1 \leqslant |x+y| < \infty; \\ (-1)^n, & \text{当 } \frac{1}{n+1} \leqslant |x+y| \leqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\cdots); \\ 0, & \text{当 } |x+y| = 0. \end{cases}$$

则用反证法易证初值问题

$$(E^*): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f^*(x,y), \quad y(0) = 0$$

没有 (连续的) 解.

习题 3-2

1. 利用 Ascoli 引理证明: 若一函数序列在有限区间 I 上是一致有界和等度连续的, 则在 I 上它至少有一个一致收敛的子序列.
2. 试举例说明, 当 I 是无限区间时上面的结论不成立.

[1]拉甫仑捷夫的例子见参考文献 [1]. 在教科书 [17] 的 18∼23 页给出了一个类似的例子.

3. 我们知道: 皮卡序列满足 Ascoli 引理的条件. 试问: 能用皮卡序列来证明佩亚诺的存在定理吗? 说明理由.

*4. 对于与初值问题 (E) 等价的积分方程

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\mathrm{d}x,$$

在区间 $I=[x_0,x_0+h]$ 上 (其中正数 h 的意义同定理 3.3) 构造序列 $y_n(x)$ 如下: 任给正整数 n, 令 $x_k=x_0+kd_n$, 其中 $d_n=h/n$, $k=0,1,\cdots,n$. 则分点

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n(=x_0+h)$$

把区间 I 分成 n 等份. 我们从 $[x_0,x_1]$ 到 $[x_1,x_2]$, 再从 $[x_1,x_2]$ 到 $[x_2,x_3]$,$\cdots$, 最后从 $[x_{n-2},x_{n-1}]$ 到 $[x_{n-1},x_0+h]$ 用递推法定义下面的函数:

$$y_n(x)=\begin{cases} y_0, & \text{当 } x\in[x_0,x_1];\\ y_0+\int_{x_0}^{x-d_n} f(x,y_n(x))\mathrm{d}x, & \text{当 } x\in[x_1,x_0+h]. \end{cases}$$

我们称序列

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ \cdots \quad (x\in I)$$

为 Tonelli 序列.

试用 Tonelli 序列和 Ascoli 引理证明佩亚诺存在定理 (即定理 3.3).

*5. 令函数

$$\alpha(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-1/x^2}\mathrm{d}x \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

其中规定 $\alpha(0)=0$. 再在条形区域

$$G: \qquad 0\leqslant x\leqslant 1, \quad -\infty<y<\infty$$

上定义一个连续的函数 $f^*(x,y)$, 使得它满足条件:

$$f^*(x,y)=\begin{cases} x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y>\alpha(x);\\ x\cos\dfrac{\pi}{x}, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0;\\ -x, & \text{当 } 0\leqslant x\leqslant 1,\ y<-\alpha(x). \end{cases}$$

然后考虑初值问题

$$(E^*): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f^*(x,y), \quad y(0)=0.$$

我们把区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 分成 n 等份, 再仿本节 §3.2.1 中的方法可以得到一条欧拉折线 $y=\varphi_n^*(x)$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 则当 $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$ 时, 我们有下述结论:

(1) 若 n 为偶数, 则 $\varphi_n^*(x) \geqslant \alpha(x)$;

(2) 若 n 为奇数, 则 $\varphi_n^*(x) \leqslant -\alpha(x)$.

由此可见, 这欧拉序列 $y=\varphi_n^*(x)$ 当 $n \to \infty$ 时是不收敛的 (从而 (E^*) 的解是不唯一的).

§3.3 解的延伸

在上面我们只满足于在局部范围内讨论初值问题解的存在性. 本节准备把这种讨论扩大到整体.

设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \tag{3.18}$$

其中函数 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续. 因此, 我们可以利用上节的佩亚诺定理推出: 对于区域 G 内任何一点 $P_0(x_0,y_0)$, 微分方程 (3.18) 至少有一个解 $y=\varphi(x)$ 满足初值条件

$$y(x_0)=y_0, \tag{3.19}$$

其中 $y=\varphi(x)$ 的存在区间为 $|x-x_0| \leqslant h$, 而正数 h 与初值点 P_0 的邻域 R 有关. 因此, 我们只知道上面的解在局部范围内是存在的. 现在, 我们要讨论这解在大范围内的存在性. 主要的结果为下述解的延伸定理.

定理 3.4 设 P_0 为区域 G 内任一点, 并设 Γ 为微分方程 (3.18) 经过 P_0 点的任一条积分曲线. 则积分曲线 Γ 将在区域 G 内延伸到边界 (换句话说, 对于任何有界闭区域 G_1 $(P_0 \in G_1 \subset G)$, 积分曲线 Γ 将延伸到 G_1 之外).

证明 设微分方程 (3.18) 经过 P_0 的解 Γ 有如下表达式:

$$\Gamma: \qquad y=\varphi(x) \quad (x\in J),$$

其中 J 表示 Γ 的**最大存在区间.**

先讨论积分曲线 Γ 在 P_0 点右侧的延伸情况. 令 J^+ 为 Γ 在 P_0 点右侧的最大存在区间, 即 $J^+=J\cap[x_0,\infty)$.

如果 $J^+=[x_0,\infty)$, 那么积分曲线 Γ 在 G 内就延伸到无限远, 从而延伸到区域 G 的边界. 否则, 我们就有下面两种可能:

(1) J^+ 是有限闭区间.

令 $J^+=[x_0,x_1]$, 其中常数 $x_1>x_0$. 注意, 当 $x\in J^+$ 时, 积分曲线 Γ 停留在区域 G 内. 令 $y_1=\varphi(x_1)$, 则 $(x_1,y_1)\in G$.

因为区域 G 是一个开集, 所以存在矩形区域

$$R_1: \qquad |x-x_1|\leqslant a_1, \quad |y-y_1|\leqslant b_1,$$

使得 $R_1\subset G$. 在矩形区域 R_1 内我们可以利用定理 3.3 推出, 微分方程 (3.18) 至少有一个解

$$y=\varphi_1(x) \quad (|x-x_1|\leqslant h_1)$$

满足初值条件 $\varphi_1(x_1)=y_1$, 其中 h_1 是某个正数. 然后, 令

$$y(x)=\begin{cases}\varphi(x), & 当 \quad x_0\leqslant x\leqslant x_1;\\ \varphi_1(x), & 当 \quad x_1\leqslant x\leqslant x_1+h_1.\end{cases}$$

则 $y=y(x)$ 是连续可微的, 而且它在区间 $[x_0,x_1+h_1]$ 上满足微分方程 (3.18). 因此, 它是积分曲线 Γ 在区间 $[x_0,x_1+h_1]$ 上的表达式. 由于已设积分曲线 Γ 的最大右侧存在区间为 $J^+=[x_0,x_1]$, 所以 J^+ 必需包含区间 $[x_0,x_1+h_1]$. 这是一个矛盾. 因此,J^+ 不可能是有限闭区间.

(2) J^+ 是有限半开区间.

令 $J^+=[x_0,x_1)$, 其中常数 $x_1>x_0$. 注意, 当 $x\in J^+$ 时, 积分曲线 Γ 停留在区域 G 内, 即

$$(x,\varphi(x))\in G, \quad x\in J^+.$$

我们要证: 对于任何有限闭区域 $G_1 \subset G$, 不可能使

$$(x, \varphi(x)) \in G_1, \quad \forall x \in J^+ \tag{3.20}$$

成立. 否则, 设 G_1 是 G 内一个有限闭区域, 使得 (3.20) 成立. 则有 $\varphi(x_0) = y_0$ 和

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \text{当 } x \in J^+. \tag{3.21}$$

它等价于

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x \quad (x_0 \leqslant x < x_1). \tag{3.22}$$

因为 $f(x, y)$ 在 G_1 上是连续的, 而且 G_1 是一个有限的闭区域, 所以 $|f(x, y)|$ 在 G_1 上有上界 $K > 0$. 因此, 由 (3.20) 和 (3.21) 可见, 在 J^+ 上 $|\varphi'(x)|$ 有上界 K. 从而由拉格朗日中值公式推出不等式

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in J^+.$$

由此不难证明: 当 $x \to x_1$ 时,$\varphi(x)$ 的极限存在. 然后, 令

$$y_1 = \lim_{x \to x_1} \varphi(x). \tag{3.23}$$

再定义函数

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{当 } x_0 \leqslant x < x_1; \\ y_1, & \text{当 } x = x_1. \end{cases}$$

显然, $y = \tilde{\varphi}(x)$ 是连续的. 由 (3.22) 和 (3.23) 可见,$y = \tilde{\varphi}(x)$ 在区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ 上满足

$$\tilde{\varphi}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{\varphi}(x))\mathrm{d}x.$$

它蕴含 $y = \tilde{\varphi}(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 上是微分方程 (3.18) 的一个解, 而且满足初值条件 (3.19). 这就是说, 上面的积分曲线 Γ 可延伸到区间

$[x_0, x_1]$ 上. 这与 Γ 的最大存在区间为 $[x_0, x_1)$ 是矛盾的. 因此, 对任何有限闭区域 $G_1 \subset G$, 关系式 (3.20) 是不可能成立的.

总结上面的讨论可知, 积分曲线 Γ 在 P_0 点的右侧将延伸到区域 G 的边界. 同样可证, 积分曲线 Γ 在 P_0 点的左侧也将延伸到区域 G 的边界. 因此, 定理 3.4 得证. □

由定理 3.1 和定理 3.4 立即可以得出下面的

推论 设函数 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 而且对 y 满足局部的李氏条件 [即, 对区域 G 内任一点 q, 存在以 q 点为中心的一个矩形区域 $Q \subset G$, 使得在 Q 内 $f(x, y)$ 对 y 满足李氏条件 (注意, 相应的李氏常数 L 与矩形区域 Q 有关)], 则微分方程 (3.18) 经过 G 内任一点 P_0 存在唯一的积分曲线 Γ, 并且 Γ 在 G 内延伸到边界.

【附注 1】由有限覆盖定理容易推出: 如果 G 是有界闭区域, 则 $f(x, y)$ 在 G 上满足局部李氏条件等价于它在 G 上满足整体李氏条件. 但当 G 是开区域时, G 上的局部李氏条件则弱于 G 上的整体李氏条件. 对于任意区域 G, 如果 $f(x, y)$ 在 G 上对 y 有连续的偏导数, 则 f 对 y 满足局部李氏条件.

【例 1】试证微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \tag{3.24}$$

任一解的存在区间都是有界的.

事实上, 由于 $x^2 + y^2$ 在整个 (x, y) 平面上连续, 并且对 y 有连续的偏导数, 所以利用上面的推论可知, 这微分方程经过平面上任何一点 P_0 的积分曲线 Γ 是唯一存在的, 并将延伸到无限远. 但我们还不能说, 积分曲线 Γ 的最大存在区间是无界的. 其实, 我们要证明它的存在区间是有界的. 设 $y = y(x)$ 是微分方程 (3.24) 满足初值条件 $y(x_0) = y_0$ 的解. 令 $J^+ = [x_0, \beta_0)$ 为它的右侧最大存在区间, 其中 $\beta_0 > x_0$. 当 $\beta_0 \leqslant 0$ 时,J^+ 显然是一有限区间. 当 $\beta_0 > 0$ 时, 则存在正数 x_1, 使得 $[x_1, \beta_0) \subset J^+$. 因此, 上面的解 $y = y(x)$ 在区间 $[x_1, \beta_0)$ 内满足 (3.24), 亦即

$$y'(x) = x^2 + y^2(x) \quad (0 < x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

由此推出

$$y'(x) \geqslant x_1^2 + y^2(x) \quad (x_1 \leqslant x < \beta_0),$$

或

$$\frac{y'(x)}{x_1^2 + y^2(x)} \geqslant 1 \quad (x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

然后, 从 x_1 到 x 积分此不等式, 即得

$$\frac{1}{x_1}\left[\arctan\frac{y(x)}{x_1} - \arctan\frac{y(x_1)}{x_1}\right] \geqslant x - x_1 \geqslant 0,$$

它蕴含

$$0 \leqslant x - x_1 \leqslant \frac{\pi}{x_1} \quad (x_1 \leqslant x < \beta_0).$$

由此推出 β_0 是一个有限数, 亦即 J^+ 是一有限区间.

同样可证, 解 $y = y(x)$ 的左侧最大存在区间 $J^- = (\alpha_0, x_0]$ 也是一有限区间. 因此, 这解 $y = y(x)$ 的最大存在区间是有限区间 (α_0, β_0), 它与解的初值 (x_0, y_0) 有关.

【例 2】 在平面上任取一点 $P_0(x_0, y_0)$, 试证初值问题

$$(E): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x - y)\mathrm{e}^{xy^2}, \quad y(x_0) = y_0$$

的右行解 (即从 P_0 点出发向右延伸的解) 都在区间 $x_0 \leqslant x < \infty$ 上存在.

事实上, 首先由上面的推论可知, 对于平面上任意一个包含 P_0 点的区域 G, 初值问题 (E) 的解都存在且唯一, 并可延伸到 G 的边界.

其次, 容易看出, 直线 L: $y = x$ 是微分方程所对应的线素场的水平等斜线 (参见第一章 §1.2), 并且线素的斜率在 L 上方为负, 而在 L 下方为正. 换句话说, 积分曲线在 L 上方是单调下降的, 而在 L 下方是单调上升的. 现在假设 P_0 位于 L 的上方 (即 $x_0 < y_0$), 则利用 (E) 的 (右行) 解 Γ 在条形域

$$S: \qquad x_0 \leqslant x < y_0, \quad -\infty < y < \infty$$

上的延伸定理, 和积分曲线 Γ 在 L 上方的单调下降性, 易知 Γ 必与 L 相交 (参见图 3-2).

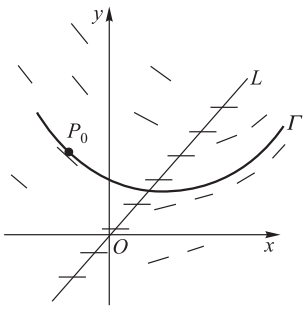

图 3-2

再假设 $P_0 \in L$ 或 P_0 在 L 下方 (即 $x_0 \geqslant y_0$), 则在区域

$$G: \qquad x_0 \leqslant x < \infty, \quad -\infty < y < \infty$$

上应用 (右行) 解的延伸定理, 得出 (E) 的解 Γ 可延伸到 G 的边界. 另一方面, 在 L 下方, 积分曲线 Γ 是单调上升的, 并且它在向右延伸时不可能从水平等斜线 L 的下方穿越到上方. 因此, 它必可向右延伸直至跨越区间 $x_0 \leqslant x < \infty$. □

一般而言, 微分方程解的最大存在区间因解而异, 对不同的解需要在不同的区间上进行讨论. 因此, 当我们并不知道解的最大存在区间时, 就无从下手. 在特定的条件下, 下面的定理对解的最大存在区间作出了先验的断言.

定理 3.5 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{3.25}$$

其中函数 $f(x, y)$ 在条形区域

$$S: \qquad \alpha < x < \beta, \quad -\infty < y < \infty$$

内连续, 而且满足不等式

$$|f(x,y)| \leqslant A(x)|y| + B(x), \tag{3.26}$$

其中 $A(x) \geqslant 0$ 和 $B(x) \geqslant 0$ 在区间 $\alpha < x < \beta$ 上是连续的. 则微分方程 (3.25) 的每一个解都以区间 $\alpha < x < \beta$ 为最大存在区间.

证明 设微分方程 (3.25) 满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in S$$

的一个解为 Γ: $y = y(x)$. 要证:Γ 的最大存在区间为 $\alpha < x < \beta$.

先证它的右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta)$.

假设不然. 令它的右侧最大存在区间为 $[x_0, \beta_0)$, 其中 β_0 是一常数 $(x_0 < \beta_0 < \beta)$.

我们在 β_0 的两侧分别取常数 x_1 和 x_2, 使得

$$x_0 < x_1 < \beta_0 < x_2 < \beta, \quad x_2 - x_1 < x_1 - x_0.$$

因此, 在有限闭区间 $[x_0, x_2]$ 上函数 $A(x)$ 和 $B(x)$ 是连续有界的; 令 A_0 和 B_0 分别是它们正的上界. 再利用 (3.26), 我们得到

$$|f(x,y)| \leqslant A_0|y| + B_0 \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_2, \quad -\infty < y < \infty). \tag{3.27}$$

而且不妨设正数

$$a_1 \overset{\mathrm{d}}{=} x_2 - x_1 < \frac{1}{4A_0}.$$

因为 $y = y(x)$ 在 $[x_0, \beta_0)$ 上存在, 所以我们有

$$y(x_1) = y_1, \quad (x_1, y_1) \in S.$$

现在, 以 (x_1, y_1) 点为中心作一矩形区域

$$R_1: \qquad |x - x_1| \leqslant a_1, \quad |y - y_1| \leqslant b_1,$$

其中正数 b_1 是充分大的. 显然,R_1 是条形区 S 内的一个有限闭区域. 由 (3.27) 容易推出, 不等式

$$|f(x,y)| \leqslant A_0(|y_1| + b_1) + B_0, \quad (x,y) \in R_1 \tag{3.28}$$

成立. 令

$$M_1 = A_0(|y_1| + b_1) + B_0 + 1, \quad h_1 = \min\left(a_1, \ \frac{b_1}{M_1}\right),$$

并以 (x_1, y_1) 点为中心作矩形区域

$$R_1^*: \qquad |x - x_1| \leqslant h_1, \quad |y - y_1| \leqslant b_1.$$

则 $R_1^* \subseteq R_1$. 我们在 R_1^* 内可以应用定理 3.4 推出, 微分方程 (3.25) 过 (x_1, y_1) 的解 Γ 必可向右延伸到 R_1^* 的边界. 另一方面, 从 (3.28) 可知, 解 Γ 在 R_1^* 内必停留在角形区域

$$|y - y_1| \leqslant M_1|x - x_1|, \quad |x - x_1| \leqslant h_1.$$

因此, 解 Γ 可向右延伸直至跨越区间 $[x_0, x_1 + h_1)$. 由于

$$a_1 < \frac{1}{4A_0} \qquad \text{和} \qquad \lim_{b_1 \to \infty} \frac{b_1}{M_1} = \frac{1}{A_0},$$

所以只要取充分大的正数 b_1, 我们就有

$$h_1 = a_1 = x_2 - x_1.$$

由此推出,Γ 在区间 $x_0 \leqslant x < x_2$ 上存在. 但是, 区间 $[x_0, x_2)$ 严格大于 Γ 的右侧最大存在区间 $[x_0, \beta_0)$. 这是一个矛盾, 它证明了 Γ 的右侧最大存在区间必定是 $[x_0, \beta)$.

同样可证 Γ 的左侧最大存在区间必定是 $(\alpha, x_0]$. 因此,Γ 的最大存在区间是 (α, β). □

习题 3-3

1. 利用定理 3.5 证明: 线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y + b(x) \quad (x \in I)$$

的每一个解 $y = y(x)$ 的 (最大) 存在区间为 I, 这里假设 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在区间 I 上是连续的.

2. 讨论下列微分方程解的存在区间:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y(y-1)$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\sin(xy)$;

(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+y^2$.

3. 考虑对称形式的微分方程 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$, 它的定义域为 $G=\{(x,y):x^2+y^2>0\}$. 则单位圆 $(x^2+y^2=1)$ 是一条积分曲线, 它在区域 G 的内部; 它并没有延伸到 G 的边界, 这一点是否与上述解的延伸定理相矛盾? 为什么?

*4. 设初值问题

$$(E):\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(y^2-2y-3)\mathrm{e}^{(x+y)^2},\quad y(x_0)=y_0$$

的解的最大存在区间为:$a<x<b$, 其中 (x_0,y_0) 是平面上的任一点. 则 $a=-\infty$ 和 $b=\infty$ 中至少有一个成立.

*5. 设初值问题

$$(E):\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x^2-y^2)f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在全平面连续且满足 $yf(x,y)>0$, 当 $y\neq 0$. 则对于任意的 (x_0,y_0), 当 $x_0<0$ 和 $|y_0|$ 适当小时 (E) 的解可延拓到 $-\infty<x<\infty$.

§3.4* 比较定理及其应用

我们在上节已经看到, 为了对微分方程的解的存在区间作出估计, 仅应用延伸定理经常是不够的, 有时须要分析有关线素场的几何特性 (见上节例 2). 下面的几个定理为这种分析提供了一般的原理 (它的基本思想其实已含于上节例 1 之中).

定理 3.6 (第一比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(x,y) < F(x,y), \quad (x,y) \in G; \tag{3.29}$$

又设函数 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\Phi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是初值问题

$$(E_1): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0)=y_0$$

与

$$(E_2): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), \quad y(x_0)=y_0$$

的解, 其中 $(x_0,y_0)\in G$. 则我们有

$$\begin{cases} \varphi(x) < \Phi(x), & \text{当 } x_0 < x < b; \\ \varphi(x) > \Phi(x), & \text{当 } a < x < x_0. \end{cases} \tag{3.30}$$

证明 在区间 $a<x<b$ 上令函数 $\psi(x) \overset{\mathrm{d}}{=} \Phi(x)-\varphi(x)$, 则由初值条件和不等式 (3.29) 有

$$\psi(x_0)=0, \quad \psi'(x_0)=F(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)>0.$$

因此, 存在 $\sigma>0$, 使得

$$\psi(x)>0, \quad \text{当} \quad x_0<x<x_0+\sigma. \tag{3.31}$$

如果 (3.30) 的第一式不成立, 则至少存在一个 $x_1(>x_0)$, 使得 $\psi(x_1)=0$. 再令

$$\beta = \min\{x \mid \quad \psi(x)=0, \quad x_0<x<b\}.$$

利用 (3.31), 我们推出

$$\begin{cases} \psi(\beta)=0, \\ \psi(x)>0 \quad (x_0<x<\beta), \end{cases}$$

它蕴含

$$\psi'(\beta) \leqslant 0.$$

但是另一方面, 由于 $\psi(\beta) = 0$, 则有 $\gamma \overset{\mathrm{d}}{=} \Phi(\beta) = \varphi(\beta)$. 所以再利用 (3.29), 我们有

$$\psi'(\beta) = \Phi'(\beta) - \varphi'(\beta) = F(\beta,\gamma) - f(\beta,\gamma) > 0.$$

这一矛盾证明了 (3.30) 的第一式成立.

同理可证第二式也成立. □

【附注 1】定理 3.6 的几何意义是明显的: 斜率小的曲线向右不可能从斜率大的曲线的下方穿越到上方. 应该注意的是, 两个线素场只有在同一点, 才能比较它们斜率的大小.

现在考虑初值问题

$$(E): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

其中函数 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b$$

上连续, 并且令

$$M = \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|, \quad h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

如果在区间 $|x - x_0| \leqslant h$ 上初值问题 (E) 有两个解 $y = Z(x)$ 和 $y = W(x)$, 使得 (E) 的任何解 $y = y(x)$ 都满足不等式:

$$W(x) \leqslant y(x) \leqslant Z(x), \quad (|x - x_0| \leqslant h),$$

则称 $y = W(x)$ 和 $y = Z(x)$ 分别为初值问题 (E) 的**最小解**和**最大解**. 由这个定义容易看出，最大解和最小解都是唯一的. 下面的定理肯定了最大解和最小解的存在性，并为第二比较定理的证明作了必要的准备.

定理 3.7 存在正数 $\sigma < h$, 使得在区间 $|x - x_0| \leqslant \sigma$ 上, 上述初值问题 (E) 有最小解和最大解.

证明 考虑与 (E) 相联系的初值问题

$$(E_m): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) + \varepsilon_m, \quad y(x_0) = y_0,$$

其中 $\varepsilon_m > 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$, 并且当 $m \to \infty$ 时 ε_m 单调下降且趋于 0. 由佩亚诺定理, 存在 $h_m > 0$ $(h_m \to h$, 当 $m \to \infty)$, 使得初值问题 (E_m) 在区间 $|x - x_0| \leqslant h_m$ 上有解 $y = \varphi_m(x)$, 即函数 $\varphi_m(x)$ 满足方程

$$\varphi_m(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [f(x, \varphi_m(x)) + \varepsilon_m]\mathrm{d}x. \tag{3.32}$$

由于 $h_m \to h (m \to \infty)$, 所以可取到正数 $\sigma < h$, 使得初值问题 (E) 和 $(E_m)(m = 1, 2, \cdots)$ 的解都在区间 I: $|x - x_0| \leqslant \sigma$ 上存在.

注意到

$$|\varphi_m(x) - y_0| \leqslant b \quad (x \in I; \quad m = 1, 2, \cdots),$$

和由 (3.32) 所得的估计式

$$\begin{aligned} |\varphi_m(x_1) - \varphi_m(x_2)| &\leqslant \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x, \varphi_m(x) + \varepsilon_m)\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant (M + \varepsilon_1)|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$(x_1, x_2 \in I; \quad m = 1, 2, \cdots)$, 所以 $\varphi_m(x)$ 在 I 上为一致有界与等度连续. 利用 Ascoli 引理可知,$\varphi_m(x)$ 在区间 I 上有一致收敛的子序列. 这里不妨设 $\varphi_m(x)$ 本身在 I 上一致收敛. 令

$$\Phi(x) = \lim_{m \to \infty} \varphi_m(x),$$

则在 (3.32) 式中 (令 $m \to \infty$) 取极限, 就可推出 $y = \Phi(x)$ 是初值问题 (E) 在 I 上的一个解.

最后, 我们来证明 $y = \Phi(x)$ 是 (E) 在 I 上的右行最大解和左行最小解. 事实上, 设 $y = y(x)$ 是 (E) 的任一解, 则对初值问题 (E) 和 (E_m) 应用第一比较定理可得

$$\begin{cases} y(x) < \varphi_m(x), \text{当 } x_0 < x < x_0 + \sigma, \\ y(x) > \varphi_m(x), \text{当 } x_0 - \sigma < x < x_0. \end{cases}$$

在上面两式中令 $m \to \infty$, 取极限就推出:$y = \Phi(x)$ 是右行最大解和左行最小解.

在初值问题 (E_m) 中以 $-\varepsilon_m$ 代换 ε_m, 同样可证在区间 I 上初值问题 (E) 有左行最大解和右行最小解.

由于初值问题 (E) 的所有解在 (x_0, y_0) 点均相切, 所以 (E) 的左行最大 (小) 解和右行最大 (小) 解就可拼接为整个区间上的最大 (小) 解. □

【附注 2】类似于解的延伸定理, 我们可以把 (E) 的最大解和最小解从局部延伸到区域 G 的边界. 此外, 容易知道:(E) 的解是唯一的, 当且仅当它的最小解和最大解是恒同的.

定理 3.8 (第二比较定理) 设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足

$$f(x,y) \leqslant F(x,y), \quad (x,y) \in G;$$

又设函数 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题

$$(E_1): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

与

$$(E_2): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

的解 $[(x_0, y_0) \in G]$, 并且 $y = \varphi(x)$ 是 (E_1) 的右行最小解和左行最大解 (或者: $y = \Phi(x)$ 是 (E_2) 的右行最大解和左行最小解), 则有如下比较关系:

$$\varphi(x) \leqslant \Phi(x), \ \text{当 } x_0 \leqslant x < b;$$
$$\varphi(x) \geqslant \Phi(x), \ \text{当 } a < x \leqslant x_0.$$

证明 此定理容易从定理 3.6 和定理 3.7 推出. □

【例 1】讨论微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin(xy) \tag{3.33}$$

的解的延伸趋向.

易见 $y = 0$ 是这微分方程的零解. 而且由定理 3.1 和定理 3.5 推出, 这方程过任何一点的解 $y = y(x)$ 都是唯一的, 并在无穷区间 $-\infty < x < \infty$ 上存在. 现在, 我们讨论解 $y = y(x)$ 当 $x \to \infty$(和 $-\infty$) 时的延伸趋向.

注意, 当 x 换成 $-x$ 或 y 换成 $-y$ 时, 方程 (3.33) 的形式不变. 所以它的积分曲线的分布既对 y 轴又对 x 轴对称. 因此我们只需讨论在第一象限的情形.

令 $y(0) = y_0$, 其中 $y_0 \geqslant 0$. 当 $y_0 = 0$ 时, 则由解的唯一性可知 $y = y(x)$ 就是零解 $y = 0$. 以下设 $y_0 > 0$, 则由解的唯一性可知 $y = y(x) > 0$ $(0 \leqslant x < \infty)$; 我们要证明

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0. \tag{3.34}$$

首先, 假设积分曲线 Γ: $y = y(x)$ $(x \geqslant 0)$ 与直线 L: $y = x$ 相交于一点 $\bar{P}(\bar{x}, \bar{x})$, $\bar{x} > 0$. 由方程 (3.33) 可知积分曲线 Γ 的斜率 $y'(x) \leqslant 1$, 而直线 L 的斜率等于 1, 所以由第二比较定理得出: 当 $x \geqslant \bar{x}$ 时 Γ 将留在 L 的下方.

现取最小的正整数 m, 使它满足不等式

$$\bar{x}^2 < (2m - \frac{1}{2})\pi. \tag{3.35}$$

然后, 考虑双曲线

$$H: \qquad xy = \left(2m - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (x > 0,\ y > 0).$$

则由 (3.35) 可见上述交点 $\bar{P}$ 在 H 的下方. 现在我们要证: 当 $x > \bar{x}$ 时, Γ 也在 H 的下方.

事实上, 如果上述结论不成立, 则存在 $x_1 > \bar{x}$, 使得当 $x = x_1$ 时 Γ 与 H 相交于 P_1 点, 而且 Γ 从 H 的左下方进入右上方. 由此可见, 在 P_1 点 Γ 的斜率 $y'(x_1) \geqslant H$ 的斜率 K_1. 由于 P_1 点在直线 L 的下方, 所以双曲线 H 在 P_1 点的斜率

$$K_1 = -\left(2m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{x_1^2} > -1,$$

然而

$$y'(x_1) = \sin(x_1 y(x_1)) = \sin(2m - 2^{-1})\pi = -1.$$

这是一个矛盾. 因此, 当 $x > \bar{x}$ 时 Γ 必需在 H 的下方, 亦即

$$0 < y(x) < \left(2m - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{x}.$$

由这不等式就直接推出 (3.34).

其次, 要证:Γ 与 L 确实相交.

为此, 考虑双曲线族

$$H_k: \qquad xy = k\pi \quad (x > 0,\ y > 0)$$

$(k = 1, 2, \cdots)$ 及其界定的区域

$$G_k: \qquad (k-1)\pi < xy < k\pi \quad (x > 0,\ y > 0)$$

$(k = 1, 2, \cdots)$. 则由 (3.33) 可见, 积分曲线 Γ 的斜率 $y'(x)$ 满足不等式:

$$\begin{cases} 0 < y'(x) < 1, & \text{当} \quad (x, y(x)) \in G_{2n-1}; \\ -1 < y'(x) < 0, & \text{当} \quad (x, y(x)) \in G_{2n} \end{cases}$$

$(n = 1, 2, \cdots)$.

现在, 从点 $P_0(0, y_0)$ 出发向右作一连续的折线 Λ: $y = u(x)$ $(x \geqslant 0)$, 使得它的节点 P_k 分别在双曲线 H_k 上, 而各直线段的斜率满足条件:

$$u'(x) = \begin{cases} 1, & \text{当} \quad (x, u(x)) \in G_{2n-1}; \\ 0, & \text{当} \quad (x, u(x)) \in G_{2n}. \end{cases}$$

因此由第一比较定理得出, 从 P_0 点出发的积分曲线 Γ: $y = y(x)$, $(x \geqslant 0)$ 一定在折线 Λ 的下方 (参见图 3-3).

考虑折线 Λ 的节点 $P_k(x_k, y_k)$. 注意, $x_k y_k = k\pi$. 现任取三个相邻的节点 P_n, P_{n+1}, 和 P_{n+2}, 其中 n 为奇数. 则有

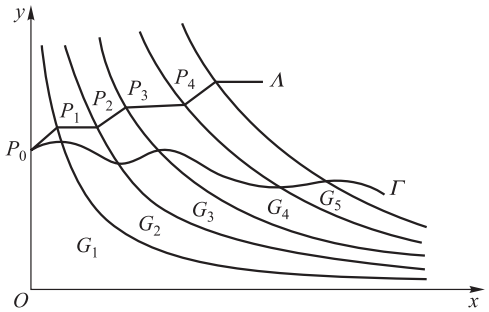

图 3-3

$$x_{n+2}=\frac{(n+2)\pi}{y_{n+2}},\quad x_{n+1}=\frac{(n+1)\pi}{y_{n+1}},\quad x_n=\frac{n\pi}{y_n}.$$

而且 $y_{n+1}=y_n,\quad y_{n+2}>y_n$. 因此, 我们推出

$$x_{n+1}-x_n=\frac{\pi}{y_n},\quad x_{n+2}-x_{n+1}<\frac{\pi}{y_n}.$$

从而

$$x_{n+2}-x_{n+1}<x_{n+1}-x_n.$$

再利用

$$y_{n+2}-y_n=y_{n+2}-y_{n+1}=x_{n+2}-x_{n+1},$$

就推出

$$\begin{aligned}\frac{y_{n+2}-y_n}{x_{n+2}-x_n}&=\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{(x_{n+2}-x_{n+1})+(x_{n+1}-x_n)}\\&<\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{2(x_{n+2}-x_{n+1})}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

这就是说, 直线段 $[P_n,P_{n+2}]$ 的斜率小于 $\frac{1}{2}$, 其中 n 为奇数. 因此, 如果从 P_1 点出发作一直线

$$L_1:\quad y-y_1=\frac{1}{2}(x-x_1),$$

那么折线 Λ 将在 L_1 的下方. 所以积分曲线 Γ 也在 L_1 的下方. 因为 P_0 点在 L 的上方而在 L_1 的下方, 而且当 x 增大时直线 L_1 将从 L

的上方进入下方, 所以积分曲线 Γ 也从 L 的上方进入下方. 这就证明了 Γ 和 L 的相交性.

【例 2】设初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + (y+1)^2, \quad y(0) = 0 \tag{3.36}$$

的解在右侧的最大存在区间为 $[0, \beta)$, 试证:$\frac{\pi}{4} < \beta < 1$.

证明 由上一节的推论可知,(3.36) 的解存在且唯一, 并可延伸到包含坐标原点的任意区域的边界. 下面我们仅给出证明的梗概, 而把细节留给读者完成.

1) 先证: $\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant 1$.

当 $|x| \leqslant 1$ 时, 显然有

$$(y+1)^2 \leqslant x^2 + (y+1)^2 \leqslant 1 + (y+1)^2.$$

因此, 我们可以应用比较定理, 把初值问题 (3.36) 的解与如下两个可积的初值问题:

$$(E_1): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y+1)^2, \quad y(0) = 0$$

和

$$(E_2): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + (y+1)^2, \quad y(0) = 0$$

的解分别比较, 从而得到 $\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant 1$.

2) 再证: $\beta < 1$.

在 (3.36) 的积分曲线上取一点 (ξ, η), 其中 $0 < \xi \ll 1$, 则初值问题

$$(E_3): \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y+1)^2, \quad y(\xi) = \eta$$

是可积的, 容易算出它的解的右侧最大存在区间为 $0 \leqslant x < C(\xi)$, 其中 $C(\xi) = \xi + \frac{1}{\eta+1}$. 由于

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\xi} = 1 - \frac{1}{(\eta+1)^2}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = 1 - \frac{\xi^2 + (\eta+1)^2}{(\eta+1)^2} < 0$$

且 $C(0)=1$, 因此, 当 $0<\xi\ll 1$ 时,$C(\xi)<1$. 再对 (3.36) 和 (E_3) 应用比较定理可得 $\beta<1$.

3) 最后证: $\beta>\frac{\pi}{4}$.

取正数 λ, 使 $0<1-\lambda\ll 1$, 则初值问题

$$(E_4):\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda^2+(y+1)^2,\quad y(0)=0$$

的解在右侧的最大存在区间为 $0\leqslant x<\tilde{C}(\lambda)$. 计算表明, $\tilde{C}(1)=\frac{\pi}{4}$ 而且

$$\left.\frac{\mathrm{d}\tilde{C}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=1}<0,$$

因此当 $0<1-\lambda\ll 1$ 时 $\tilde{C}(\lambda)>\frac{\pi}{4}$. 最后, 再对 (3.36) 和 (E_4) 应用比较定理可得 $\beta>\frac{\pi}{4}$.

习题 3-4

1. 设初值问题 (E), 矩形区域 R, 和正数 h 的意义同定理 3.1. 试证在 (E) 的最小解 $y=W(x)$ 和最大解 $y=Z(x)$ 之间充满了 (E) 的其他解, 即任取一点 (x_1,y_1), 其中

   $$|x_1-x_0|\leqslant h,\quad W(x_1)\leqslant y_1\leqslant Z(x_1),$$

   则 (E) 在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上至少有一个解 $y=u(x)$ 满足: $u(x_1)=y_1$.

2. 证明定理 3.8.

3. 对本节例 2 的证明作出详细的推导.