第三章　正交试验设计的方差分析

§3—1　极差分析与方差分析

一、极差分析

实际应用表明,极差分析法直观形象、简单易懂。通过非常简便的计算和判断就可以求得试验的优化成果——主次因素、优水平、优搭配及最优组合。能比较圆满迅速地达到一般试验的要求。它在试验误差不大、精度要求不高的各种场合中,在筛选因素的初步试验中,在寻求最优生产条件、最佳工艺、最好配方的科研生产实际中都能得到广泛的应用。极差分析法是正交设计中常用的方法之一。但是,由于极差分析法不能充分利用试验数据所提供的信息,因此,其应用还受到一定的限制。

极差分析法不能估计试验误差。实际上,任何试验都不可避免地存在着试验误差,而极差分析法却不能估计这种试验误差的大小,无法区分某因素各水平所对应的试验指标平均值间的差异究竟有多少是由因素水平不同引起的,又有多少是由试验误差引起的。对于误差较大或精度要求较高的试验,若用极差法分析试验结果而不考虑试验误差的影响,就会给准确分析带来困难,影响获得正确的结论。

极差法无法确定试验的优化成果的可信度,也不能应用于回归分析与回归设计。

二、方差分析

设有一组相互独立的试验数据

$$y_1, y_2, \cdots, y_n$$

其均值为 $\bar{y}$,则差值 $y_i - \bar{y}(i=1,2,\cdots,n)$称为这组数据的偏差(也称离差或变差)。偏差的大小通常用样本方差(或均方和、均方)$\hat{\sigma}^2$ 来量度。

我们知道,在数理统计中,总体方差被定义为

$$\sigma^2 = D(y) = E\{[y - E(y)]^2\}$$

其估计值即样本方差可由下式计算

$$\hat{\sigma}^2 = S/f$$

式中 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$；$E(y)$为 y 的数学期望；$S=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2$ 称为这组数据 y_i 的偏差平方和；f 为 S 的自由度。

方差 σ^2 是某偏差的平方和的均值。它的大小反映了数据的离散程度，是衡量试验条件稳定性的一个重要尺度。不同的方差具有不同的意义，不同方差间存在一定的关系，反映数据间的某些统计规律。如果我们能从条件因素和试验因素的影响所形成的总的方差中，将属于试验误差范畴的方差与试验因素及其交互作用引起的方差分离开来，并将两类方差在一定条件下进行比较，就可以了解每个试验因素及试验考察的交互作用对试验指标的影响大小，从而为有针对性地控制各种试验因素与进一步改善试验条件指明方向。

根据 Fisher 偏差平方和加和性原理，在偏差平方和分解的基础上借助于 F 检验法，对影响总偏差平方和的各因素效应及其交互效应进行分析，这种分析方法就称为方差分析。它是处理试验数据的一种常用方法，有着广泛的应用。

通常，方差分析的一般程序是：

(1) 由试验数据计算各项偏差平方及其相应的自由度，并算出各项方差估计值。

(2) 计算并确定试验误差方差估计值 $\hat{\sigma}_e^2$。

(3) 计算检验统计量 F 值，给定显著性水平 α，将 F 值同其临界值 F_α 进行比较。

(4) 为简明起见，将方差分析过程与结果列成方差分析表。

方差分析的目的在于区别不同方差，计算其值并进而寻求它们间的关系与规律。将方差分析应用于正交设计，主要为了解决如下问题：①估计试验误差并分析其影响；②判断试验因素及其交互作用的主次与显著性；③给出所作结论的置信度；④确定最优组合及其置信区间。

正交设计的方差分析可以在正交表上直接进行，不必另列方差分析表。与极差分析法比较，方差分析法计算较复杂，计算量也大。为此，在正交设计的结果分析中，常采用如下的数据简化方法：①将每个数据减(加)去同一个数 a，偏差平方和 S 仍不变；②将每一个数据除(乘)以同一个不为零的数 b，相应的偏差平方和 S 缩小(扩大) b^2 倍。

采用上述方法可使计算工作量大大减少。

§ 3—2 正交试验设计方差分析

我们知道,方差分析是数理统计的基本方法之一,是科研与生产中分析试验数据的一种有效工具。将方差分析法用于正交设计中的结果分析,同样也是十分有效的。本节主要以等水平无重复正交试验为例阐明正交设计方差分析的基本方法与主要特点。

设选用正交表 $L_a(b^c)$进行正交试验。应用方差分析法处理其试验结果时,主要可归纳为:① 计算偏差平方和及其自由度;② 显著性检验;③ 求最优组合及其置信区间。

一、计算偏差平方和及其自由度

主要计算总偏差平方和 S,列偏差平方和 $S_j(j=1,2,\cdots,c)$及其相应的自由度 f、f_j。具体计算时,根据方差分析的有关公式,按照试验方案扩展表中所列的项目,分向按序进行,行向计算 S,列向计算 S_j,如表 3—1。

表 **3—1** 拖拉机噪声试验结果及方差分析

因素 试验号	A (1)	B (2)	$A\times B$ (3)	C (4)	$A\times C$ (5)	 (6)	D (7)	y_i/dB	y_i-90	$(y_i-90)^2$
1	1	1	1	1	1	1	1	92	2	4
2	1	1	1	2	2	2	2	98	8	64
3	1	2	2	1	1	2	2	94	4	16
4	1	2	2	2	2	1	1	97	7	49
5	2	1	2	1	2	1	2	94	4	16
6	2	1	2	2	1	2	1	93	3	9
7	2	2	1	1	2	2	1	86	−4	16
8	2	2	1	2	1	1	2	91	1	1
y_{j1}	21	17	7	6	10	14	8	$\sum_{i=1}^{8}(y_i-90)=25\quad\sum_{i=1}^{8}=175$		
y_{j2}	4	8	18	19	15	11	17			
Δ_j	17	9	11	13	5	3	9	$S=\sum_{i=1}^{8}y_i^2-\frac{1}{8}\left[\sum_{i=1}^{8}y_i\right]^2$		
Δ_j^2	289	81	121	169	25	9	81			
S_f	36.13	10.13	15.13	21.13	3.13	1.13	10.13	$=175-\frac{1}{8}\times25^2=96.88$		
F_j	16.96	4.76	7.10	9.92	—	—	4.76	$S_e=S_{A\times C}+S_{空}=4.26$ $f_e=2$		
α_j	0.1	0.25	0.25	0.1	—	—	0.25			

无重复试验时，方差分析的一般公式为

$$S=\sum_{i=1}^{a}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{a}y_i^2-\frac{1}{a}\Big(\sum_{i=1}^{a}y_i\Big)^2 \qquad (3-1)$$

总偏差平方和 S 是所有试验数据与其总平均值的偏差平方和，它表明试验数据的总波动。

$$S_j=\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{jk}-\bar{y})^2=\frac{b}{a}\sum_{k=1}^{b}y_{jk}^2-\frac{1}{a}\Big(\sum_{i=1}^{a}y_i\Big)^2 \qquad (3-2)$$

列偏差平方和 S_j 是第 j 列中各水平对应试验指标平均值与总平均值的偏差平方和，它表明该列水平变动所引起的试验数据的波动。若该列安排的是因素，就称 S_j 为该因素的偏差平方和；若该列安排的是交互作用，就称 S_j 为该交互作用的偏差平方和；若该列为空列，则 S_j 表示由于试验误差和未被考察的某交互作用或某条件因素所引起的波动。在正交设计的方差分析中，通常把空列的偏差平方和作为试验误差的偏差平方和。虽然它属于模型误差，一般比试验误差大，但用它作为试验误差进行显著性检验时，可使检验结果更可靠些。

当 $b=2$ 时，公式(3－2)可简化为

$$S_j=\frac{1}{a}(y_{j1}-y_{j2})^2=\frac{1}{a}\Delta_j^2=\frac{a}{b^2}R_j^2 \qquad (3-3)$$

总偏差平方和的自由度 f 等于正交表的试验号减 1，即

$$f=a-1 \qquad (3-4)$$

第 j 列偏差平方和的自由度等于该列水平数减 1，此即该列安排的因素或交互作用的自由度，即

$$f_j=b-1 \qquad (3-5)$$

此外，总偏差平方和 S 及其自由度还满足下列关系式

$$S=\sum_{j=1}^{c}S_j=\sum_{c_{因}}S_j+\sum_{c_{交}}S_j+\sum_{c_{空}}S_j \qquad (3-6)$$

$$f=\sum_{j=1}^{c}f_j=\sum_{c_{因}}f_j+\sum_{c_{交}}f_j+\sum_{c_{空}}f_j \qquad (3-7)$$

式中 $c_{因}$，$c_{交}$ 和 $c_{空}$ 分别为试验因素、试验考察的交互作用和空列在正交表中所占的列数，且

$$c=c_{因}+c_{交}+c_{空} \qquad (3-8)$$

式(3－6)和式(3－7)表明，总偏差平方和 S 等于正交表所有列偏差平方和之和，也等于所有试验因素、试验考察的交互作用和空列偏差平方和之和；其自由度 f 等于各列自由度之和，等于试验因素、试验考察的交互作用和空列的自由度之和。

尚需注意，当某个交互作用占有正交表的某几列时，该交互作用的偏差平方和就等于所占各列偏差平方和之和，其自由度也等于所占各列自由度之和。

二、显著性检验

在进行因素和交互作用的显著性检验时，我们采用 F 检验法。例如对 k 水平因素 A 进行 F 检验。首先作原假设

$$H_0: a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0 \tag{3-9}$$

式中 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 为 A 因素相应水平下的效应。若式(3—9)成立，则因素 A 对试验指标无影响。其偏差平方和 S_A 只受试验误差的影响，其均方和 S_A/f_A 是总体方差 σ^2 的无偏估计。于是 S_A/σ^2 是一个自由度为 f_A 的 χ^2 分布的随机变量，而试验误差的偏差平方和与总体方差之比 S_e/σ^2 是一个自由度为 f_e 的 χ^2 分布随机变量，两者相互独立，所以统计量

$$F_A = \frac{(S_A/f_A)\sigma^2}{(S_e/f_e)\sigma^2} = \frac{S_A/f_A}{S_e/f_e} = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_e^2} \tag{3-10}$$

是一个自由度为(f_A, f_e)的 F 分布随机变量，F_A 称为 A 因素的 F 比。然后，选取显著性水平 α，由 F 分布表查得临界值 $F_\alpha(f_A, f_e)$，F_A 应使 $P[F_A \leqslant F_\alpha(f_A, f_e)] = 1-\alpha$。$\alpha$ 是一个很小的数，因此 $F_A > F_\alpha(f_A, f_e)$ 是一个小概率事件，在一次试验中一般不应发生。如果在一次试验中居然发生了 $F_A > F_\alpha(f_A, f_e)$的情况，那么，我们就拒绝接受原假设，并认为在显著性水平 α 下，A 因素的水平变动对试验指标有显著影响，而作这一结论的置信度为 $100(1-\alpha)\%$，犯错误的可能为 $100\alpha\%$。

不同的 α，表示犯错误的不同程度。α 的选择根据问题的重要程度而定。当问题很重要即要求置信度高或要求犯错误的可能小时，则 α 可选小些；反之，当问题的重要程度低时，α 可选大些。对于一般工程问题，α 通常选为 0.1～0.01。

进行 F 检验，还需要计算误差偏差平方和 S_e 及其自由度 f_e。试验误差的偏差平方和等于正交表中所有空列偏差平方和之和，其自由度也等于所有空列的自由度之和，即

$$S_e = \sum_{c_{空}} S_j \qquad\qquad f_e = \sum_{c_{空}} f_j$$

很明显，式(3—6)、(3—7)中的最后一项分别是试验误差的偏差平方和 S_e 及其自由度 f_e。有时，某因素或交互作用所在列的偏差平方和很小，表明其对试验指标的影响也很小，因而可将该列偏差平方和作为试验误

差偏差平方和的一部分。通常把显著性水平 $\alpha>0.25$ 的那些因素或交互作用的偏差平方和归入试验误差的偏差平方和，其自由度也一并归入。

在具体施行 F 检验时，各因素及交互作用的 $F_{比}$ 可在 S_j、S_e 和 f_j、f_e 计算的基础上直接在表中列算，然后相应标出其显著性水平 α，如表 3－1；当然也可以另列方差分析表，如表 3－2。

表 **3－2**　方差分析表

方差来源	偏差平方和	自由度	均方和	$F_{比}$	显著性水平 α
A	$S_A=36.13$	1	36.13	16.96	0.1
B	$S_B=10.13$	1	10.13	4.76	0.25
$A\times B$	$S_{A\times B}=15.13$	1	15.13	7.10	0.25
C	$S_C=21.13$	1	21.13	9.92	0.1
D	$S_D=10.13$	1	10.13	4.76	0.25
误　差	$S_e=4.26$	2	2.13	—	—
总　和	$S=96.91$	7	$F_{0.25}=(1,2)=2.57$　$F_{0.1}(1,2)=8.53$ $F_{0.05}(1,2)=18.5$		

尚需注意：① 应首先计算 $\hat{\sigma}_e^2=S_e/f_e$，而 $S_e=\sum\limits_{c_空} S_空$，$f_e=\sum\limits_{c_空} f_j$，因此选用正交表时应留有一定空列。但当无空列时，或者根据类似试验资料，确定总体方差 σ^2 的数值，并认为其自由度为∞，则 $F_A=\dfrac{S_A/f_A}{\sigma^2}$，临界值为 $F_\alpha(f_A,\infty)$；或者选用较大正交表以便留有空列；或者进行重复试验以求得 $\hat{\sigma}_e^2$；② 试验误差的自由度 f_e 一般不应小于 2。f_e 很小时，F 检验的灵敏度很低。从 F 分布表可以看出，当 $f_2\leqslant 2$ 时，F_α 很大，有时即使因素对试验指标有影响，用 F 检验法也无法判定。为提高检验的灵敏度，可以将数值较小的 S_j 归入 S_e，或者选用较大的正交表，或者进行重复试验，以增大 f_e。

【例 3－1】　对例 1－3 的试验结果进行方差分析。

如表 3－1，本例将试验数据化简，使计算简化，但不影响显著性检验的结果。这是试验结果分析中常用的方法。

本例为二水平因素试验，故可利用式(3－3)先列向计算 S_j，即如表 3－1从上往下按所列各项依次计算，如将 Δ_j^2 项乘以 1/8 就是 S_j 项。因此 S_j 即可直接列算于表中。各列的自由度均为 1，即各因素及交互作用

自由度均为 1。由于 $S_{A\times C}=S_5$ 较小，且 $F_{A\times C}=\dfrac{S_{A\times C}/f_{A\times C}}{S_{空}/f_{空}}=2.77<F_{0.25}(1.1)=5.83$，所以 $S_{A\times C}$ 可以归入 S_e，则 $S_e=S_{A\times C}+S_{空}=4.26$，$f_e=f_{A\times C}+f_{空}=2$，$\hat{\sigma}_e^2=2.13$。于是各因素及交互作用的 $F_{比}$ 和显著性水平可列算于表中。通常把 $\alpha\leqslant 0.1$ 的因素叫显著因素。本例中仅有因素 A 和 C 为显著因素。

如表 3－1，行向计算 S，既可以按式(3－1)计算，也可以按式(3－6)计算，以便检验整个计算是否正确。例 3－1 中，按式(3－1)计算得 $S=96.88$，而按式(3－6)计算得 $S=96.91$，二者之差甚微，仅为计算误差，说明全部计算正确。

方差分析的结果还可以列于方差分析表中，如表 3－2。

三、求最优组合及置信区间

确定最优组合时，必须选取显著因素的优水平和显著交互作用的优搭配。当优水平与优搭配发生矛盾时，应选优搭配。对于不显著因素，可以兼顾其它要求选取适当水平，不显著交互作用不予考虑。本例的最优组合应选显著因素 A、C 的优水平 A_2、C_1，对于不显著因素 B、D，可以选取适当水平，如选 B_2、D_1，则最优组合为 $A_2B_2C_1D_1$。

在选定最优组合后，如§1－8 所述，可以运用试验数据的线性结构模型，求得最优组合试验指标的点估计 $\hat{y}_{优}$，并且 $\hat{y}_{优}$ 是其真值 $y_{优}$ 的无偏估计。但由于最优组合试验指标的真值 $y_{优}$ 实际上无法得到，所以点估计 $\hat{y}_{优}$ 的可靠性尚不清楚。估计值 $\hat{y}_{优}$ 有可能恰好等于真值 $y_{优}$，也可能在真值的附近或左右。而点估计也没有给出误差大小的估计，并且在实际生产中，总是需要掌握最优生产条件下长期稳定生产时指标变动的范围和可靠程度。因此，这就需要对最优组合的试验指标进行区间估计，并同时给出区间估计的置信度。

在进行区间估计时，可先求点估计 $\hat{y}_{优}$，再求其误差 ε_α。α 为显著因素和显著交互作用的最大显著性水平。本例中的显著因素 A、C 的显著性水平都是 0.1，所以最大显著性水平即为 0.1。

若 $y_{优}$ 的区间估计为 $\hat{y}_{优}\pm\varepsilon_\alpha$，我们就有 $1-\alpha$ 的把握断定最优组合的试验指标真值 $y_{优}$ 将在 $\hat{y}_{优}-\varepsilon_\alpha$ 与 $\hat{y}_{优}+\varepsilon_\alpha$ 之间。现以例 3－1 具体说明之。

在例 3－1 中

$$\hat{y}_{优}=\hat{\mu}+\hat{a}_2+\hat{b}_2+(\hat{ab})_{22}+\hat{c}_1+(\hat{ac})_{21}+\hat{d}_1$$

通过计算得 $\hat{\mu}=\bar{y}=93.125$，$\hat{a}_2=-2.125$，$\hat{b}_2=-1.125$，$(\hat{ab})_{22}=-1.375$，$\hat{c}_1=-1.625$，$(\hat{ac})_{21}=0.625$，$\hat{d}_1=-1.125$，最后得

$$\hat{y}_{优}=86.375$$

误差限 ε_α 的一般计算公式是

$$\varepsilon_\alpha=\sqrt{F_\alpha(1,f_e+f_e')(S_e+S_e')\Big/\left[(f_e+f_e')\frac{N}{1+f^*}\right]} \tag{3-11}$$

式中 f_e' 为不显著因素与不显著交互作用的自由度之和；S_e' 为不显著因素与不显著交互作用的偏差平方和之和；N 为试验总次数，无重复试验时为正交表的试验号 a；f^* 为显著因素与显著交互作用的自由度之和。

在例 3－1 中，$S_e=4.26$，$S_e'=35.39$，$f_e=2$，$f_e'=3$，$f^*=2$，$N=8$，并查得 $F_{0.1}(1,2+3)=4.06$，于是

$$\varepsilon_{0.1}=\sqrt{4.06\times(4.26+35.39)\Big/\left[(2+3)\times\frac{8}{1+2}\right]}=3.47$$

因此，本例若以组合处理 $A_2B_2C_1D_1$ 为最优组合，则其指标真值将在 86.375－3.47 到 86.375＋3.47 之间，即在 82.91～89.85 之间，此时的置信度为 90％。

§3－3 重复试验的方差分析

通常等水平多因素试验用 $L_a(b^c)$ 正交表进行试验方案设计。如果每项试验重复 T 次，则试验数据的总偏差平方和 S 及其自由度 f 为

$$S=\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}(y_{it}-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y_{it}^2-\frac{1}{aT}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\right]^2 \tag{3-12}$$

或

$$S=W-P \tag{3-13}$$

$$f=aT-1 \tag{3-14}$$

式中 y_{it} 为第 i 号试验的第 t 次重复试验的结果，$t=1,2,\cdots,T$；$\bar{y}$ 为试验数据的总平均值；$W=\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y_{it}^2$；$P=\frac{1}{aT}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\right]^2$。

列偏差平方和 S_j 及其自由度 f_j 为

$$S_j=\frac{aT}{b}\sum_{k=1}^{b}(\bar{y}_{jk}-\bar{y})^2=\frac{b}{aT}\sum_{k=1}^{b}y_{ik}^2-\frac{1}{aT}\left[\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\right]^2 \tag{3-15}$$

或
$$S_j = Q_j - P \tag{3—15)'$$

$$f_j = b - 1 \tag{3—16}$$

式中 $Q_j = \frac{b}{aT}\sum_{k=1}^{b} y_{jk}^2$；$S_j$ 的自由度 f_j 仍等于水平数减 1。

当 $b=2$ 时，公式(3—15)可简化为

$$S_j = \frac{1}{aT}(y_{j1} - y_{j2})^2 \tag{3—17}$$

S_j 或者是因素的偏差平方和，或者是交互作用的偏差平方和，或者是空列的偏差平方和。如果正交表中留有空列，则将

$$S_{e1} = \sum_{c_{空}} S_j \tag{3—18}$$

作为试验误差偏差的平方和 S_e 的一部分，其自由度为

$$f_{e1} = \sum_{c_{空}} f_j \tag{3—19}$$

在重复试验的情况下，试验误差的偏差平方和 S_e 由两部分组成

$$S_e = S_{e1} + S_{e2} \tag{3—20}$$

$$f_e = f_{e1} + f_{e2} \tag{3—21}$$

式中 S_{e2} 为纯试验误差的偏差平方和，它完全是由重复试验引起的；f_{e2} 为 S_{e2} 的自由度。S_{e2} 和 f_{e2} 的一般公式为

$$S_{e2} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T} y_{it}^2 - \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right]^2 \tag{3—22}$$

或
$$S_{e2} = W - Z \tag{3—22)'$$

$$f_{e2} = a(T - 1) \tag{3—23}$$

式中 $Z = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{a}\left[\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right]^2$；$\bar{y}_i$ 为第 i 号试验的平均值，即

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it} \tag{3—24}$$

当 $T=2$ 时，式(3—22)可简化为

$$S_{e2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{a}(y_{i1} - y_{i2})^2 \tag{3—25}$$

当正交表无空列时，可直接用 S_{e2}/f_{e2} 作为试验误差的方差估计 $\hat{\sigma}_e^2$ 进行方差分析；当因素或交互作用的偏差平方和较小时，根据前述原则，也可归入 S_e。

在重复试验时，总偏差平方和 S 及其自由度还满足下列关系式

$$S = \sum_{j=1}^{c} S_j + S_{e2} = \sum_{c_{因}} S_j + \sum_{c_{交}} S_j + \sum_{c_{空}} S_j + S_{e2} \quad (3-26)$$

或
$$S_{e2} = S - \sum_{c_{因}} S_j - \sum_{c_{交}} S_j - \sum_{c_{空}} S_j \quad (3-27)$$

$$f = \sum_{j=1}^{c} f_j + f_{e2} = \sum_{c_{因}} f_j + \sum_{c_{交}} f_j + \sum_{c_{空}} f_j + f_{e2} \quad (3-28)$$

或
$$f_{e2} = f - \sum_{c_{因}} f_j - \sum_{c_{交}} f_j - \sum_{c_{空}} f_j \quad (3-29)$$

显然,在重复试验的情况下,总偏差平方和 S 不等于各列偏差平方和之和 $\sum_{j=1}^{c} S_j$,总自由度 f 也不等于各列的自由度之和 $\sum_{j=1}^{c} f_j$。这是重复试验与无重复试验的基本区别。式(3－26)、(3－28)可用来检验整个计算的正确性,而式(3－27)、(3－29)可用来计算试验误差的偏差平方和 S_{e2} 及其自由度 f_{e2}。

顺便指出,式(3－12)、(3－15)、(3－22)中,第二个等号前的表达式分别是 S、S_j 和 S_{e2} 的定义式,而第二个等号后的表达式分别是其计算式。它们的自由度 f、f_j 和 f_{e2} 可分别由其定义式中括号内两字母表示的数据个数之差直接求得。例如式(3－12)中定义式括号内,字母 y_{it} 表示有 aT 个数据,而 $\bar{y}$ 仅表示 1 个,所以 $f = aT - 1$;同样,在式(3－15)中,由于 $K=1,2,\cdots,b$,$\bar{y}_{jk}$ 共有 b 个,$\bar{y}$ 仅有 1 个,所以 $f_j = b-1$。对于 S_j 和 S_{e2} 的简化式(3－17)和(3－25),其自由度 f_j 和 f_{e2} 就等于式中括号内任一个字母所表示的数据个数。例如式(3－25)中,括号内 y_{i1}、y_{i2} 各有 a 个,所以 $f_{e2} = a$。上述直接确定各偏差平方和的自由度的方法也适用于无重复试验的情况。同样,也适用于回归分析和回归设计。利用定义式直接计算 S 是比较麻烦的。其原因是计算 $\bar{y}$ 时有效位数增加了,因而计算工作量就大大增加;同时,在计算 $\bar{y}$ 时,由于除不尽而四舍五入,在计算 S 时,每一项平方和都增加了误差。当数据较多时,这种误差累积起来是不可忽略的。因此,通常都是直接利用计算式计算 S。

在进行重复试验的方差分析时,各项计算及显著性检验仍可在表中分向按序进行,方法步骤与无重复试验时基本相同。现举实例说明之。

【例 3－2】 电解腐蚀试验,考察4个三水平因素,交互作用均不考虑。试验指标为产品质量,以规定标准进行综合评分,满分为 100 分,合格为 80 分。选用 $L_9(3^4)$ 正交表安排试验,每项试验重复 3 次。试验结果及方差分析列于表 3－3。

例 3－2 中,为了使计算简便,减少计算量,将试验数据进行线性变

换，$y'_{it}=(y_{it}-70)/5$，以 y'_{it} 进行方差分析，不影响分析结果。例 3—2 无空列，所以 $S_{e1}=0$。但 S_c/f_c 小于 S_{e2}/f_{e2}，因此应将 S_c 归入试验误差的偏差平方和 S_e，则 $S_e=S_{e2}+S_c=67.85$，$f_e=f_{e2}+f_c=20$，然后再用 S_e/f_e 作为试验误差的方差估计值 $\hat{\sigma}_e^2$，对各因素进行显著性检验。检验结果表明，A、B 和 D 因素都是显著因素。显然优水平应取 A_3、B_2 和 D_3，而对于不显著因素 C 取适当水平。假定从节约出发，选定 C_3，则本试验的最优组合为 $A_3B_2C_3D_3$。

现估计最优组合的置信区间。先按化简的数据求 $\hat{y}'_{优}$

$$\hat{y}'_{优}=\hat{\mu}'+\hat{a}'_3+\hat{b}'_2+\hat{c}'_3+\hat{d}'_3$$

由计算得，$\hat{\mu}'=\bar{y}'=-0.93$，$\hat{a}'_2=1.48$，$\hat{b}'_2=1.04$，$\hat{c}'_3=-0.37$，$\hat{d}'_3=1.59$，则 $\hat{y}'_{优}=2.81$。再将 $\hat{y}'_{优}$ 进行线性变换得

$$\hat{y}'_{优}=70+5\times2.81=84.05$$

然后再按简化数据计算 ε'_α。由于本例显著因素的最大显著性水平 $\alpha=0.05$，$S_e=67.85$，$S'_e=0$，$f_e=20$，$f'_e=0$，$f^*=6$，$N=aT=27$，并查得 $F_{0.05}(1,20)=4.35$，则

$$\varepsilon'_{0.05}=\sqrt{4.35\times(67.85+0)\Big/\left[(20+0)\times\frac{27}{1+6}\right]}\approx1.96$$

再将 ε'_α 进行变换，得 $\varepsilon_{0.05}=5\varepsilon'_{0.05}=9.80$。

因此，本试验最优组合指标真值将在 84.05—9.80～84.05+9.80 之间，即在 74.25～93.85 之间，此时的置信度为 95%。可见，这个最优工艺条件基本上符合规定要求。顺便说明，本项产品原来生产时，废品超过一半，但按上面选出的最优组合进行验证性试验时产品质量良好，基本上消灭了废品。考虑到 D 因素(电流强度)增大时，效果有变好的趋势。于是又继续增加 D 因素的水平数进行了试验，结果在电流强度为 120 A 时，不仅产品质量完全符合要求，加工时间也缩短到原来的 1/4，大大提高了生产率。

表 3-3 电解腐蚀试验结果及方差分析

试验号 \ 因素	A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	y'_{i1}	y'_{i2}	y'_{i3}	y'^2_{i1}	y'^2_{i2}	y'^2_{i3}	$y_{i\Sigma}=\sum_{t=1}^{T} y_{it}$	$y^2_{i\Sigma}$
					$y'_{it}=(y_{it}-70)/5$			y'^2_{it}				
1	1	1	1	1	−1	−2	0	1	4	0	−3	9
2	1	2	2	2	0	−1	3	0	1	9	2	4
3	1	3	3	3	−1	0	2	1	0	4	1	1
4	2	1	2	3	−3	−2	2	9	4	4	−3	9
5	2	2	3	1	−4	−5	0	16	25	0	−9	81
6	2	3	1	2	−6	−6	−6	36	36	36	−18	324
7	3	1	3	2	4	0	−1	16	0	1	3	9
8	3	2	1	3	3	3	2	9	9	4	8	64
9	3	3	2	1	−4	−1	−1	16	1	1	−6	36
y_{j1}	0	−3	−13	−18	−12	−14	1	104	80	59	−25	537
y_{j2}	−30	1	−7	−13								
y_{j3}	5	−23	−5	6								
y^2_{j1}	0	9	169	324								
y^2_{j2}	900	1	49	169								
y^2_{j3}	25	529	25	36								
Q_j	102.78	59.89	27.00	58.78								
S_j	79.63	36.74	3.85	35.63								
F_j	11.74	5.41	−	5.25								
α_j	0.01	0.05	−	0.05								

$$W=\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y^2_{it}=104+80+59=243$$

$$P=\frac{1}{aT}\Big(\sum_{i=1}^{a}\sum_{t=1}^{T}y_{it}\Big)^2=\frac{1}{27}\times(-25)^2=23.15$$

$$Q_j=\frac{b}{aT}\sum_{k=1}^{b}y^2_{jk}=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{3}y^2_{jk}$$

$$Z=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{a}\Big(\sum_{t=1}^{T}y_{it}\Big)^2=\frac{1}{3}\times537=179$$

$S=W-P=243-23.15=219.85$　　$f=26$

$S_j=Q_j-P=Q_j-23.15$　　$f_j=2$

$S_{e2}=W-Z=243-179=64$　　$f_{e2}=18$

$F_{0.1}(2,20)=2.59$，　$F_{0.05}=(2,20)=3.49$，　$F_{0.01}=(2,20)=5.85$

§3—4　不等水平试验设计方差分析

如第一章所述,不等水平因素试验的正交设计方法较多,应用灵活。运用方差分析法处理试验结果时,也要根据各种设计方法的不同特点,具体问题具体分析。本节着重讨论几种常用的基本情况,且假定都是无重复试验。

一、混合型正交表上的方差分析

在混合型正交表上进行方差分析时,方法步骤基本与等水平情况相同,只需注意

$$S_j = \frac{b_j}{a}\sum_{k=1}^{b_j} y_{jk}^2 - \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a} y_i\right)^2 \qquad (3-30)$$

$$f_j = b_j - 1 \qquad (3-31)$$

式中 b_j 为第 j 列的水平数。由于因素水平不等,不同水平隐藏重复次数不等,所以计算列偏差平方和 S_j 时,系数$\frac{b_j}{a}$随 b_j 而变化。例如三水平列 $S_j = \frac{3}{a}\sum_{k=1}^{3} y_{jk}^2 - P$,而四水平列 $S_j = \frac{4}{a}\sum_{k=1}^{4} y_{jk}^2 - P$,其中 $P = \frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a} y_i\right)^2$。

其余各公式同等水平情况一样,不再重列。

二、并列法

并列法时的方差分析完全等同于混合型的情况。但为了简化计算,通常方差分析都统一在并列前的原标准表上进行。

如表 3—4,将 $L_8(2^7)$正交表 1、2、3 列并成一四水平新列安排四水平因素 A,二水平因素 B 排在第 4 列,而 $A\times B$ 应在 5、6、7 列,则有

$$S_A = S_1 + S_2 + S_3$$

$$f_A = f_1 + f_2 + f_3 = b_A - 1$$

$$S_{A\times B} = S_5 + S_6 + S_7$$

$$f_{A\times B} = f_5 + f_6 + f_7 = (b_A - 1)(b_B - 1)$$

上式表明,并列后新列的偏差平方和等于新列所包含的原标准表中各列的偏差平方和之和,其交互作用的偏差平方和等于原标准表中相应列间交互作用所占列的偏差平方和之和;它们的自由度也等于其所包含的原标准表中的各列自由度之和。

表 **3—4** 并列法设计

因 素	A			B	A×B		
列 号	1	2	3	4	5	6	7

总偏差平方和及其自由度仍满足式(3—6)、式(3—7)。

三、赋闲列

当表头设计有赋闲列而无拟水平因素时，通常回复到原二水平标准表上进行方差分析比较方便。其特点如下：

(1) 共用赋闲列的各因素的偏差平方和及因素间交互作用的偏差平方和，等于其在原标准表中所占的有效列的偏差平方和之和。所谓有效列是指除赋闲列外，因素与交互作用实际所占有的列。如表 3—5，若四水平因素 A、B 与 C 的二次效应不大，利用第 1 列赋闲，因素 A、B、C 可分别排在第 2 与 3，4 与 5，6 与 7 列，二水平因素 D 排在第 8 列，则交互作用 $C\times D$ 排在第 14 与第 15 列。于是有

$$S_A = S_2 + S_3 \qquad S_B = S_4 + S_5$$

$$S_C = S_6 + S_7 \qquad S_{C\times D} = S_{14} + S_{15}$$

表 **3—5** 赋闲列设计

因 素	赋闲	A		B		C		D						C×D	
列 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

(2) 使用赋闲列的各因素及交互作用的自由度，也等于其在原标准表上所占有效列的自由度之和，即

$$f_A = f_2 + f_3 \qquad f_B = f_4 + f_5$$

$$f_C = f_6 + f_7 \qquad f_{C\times D} = f_{14} + f_{15}$$

显然，在因素二次效应不大的条件下，利用赋闲列，使得上述因素与交互作用的自由度都比其原自由度减小。

(3) 总偏差平方和仍等于各列偏差平方和之和，总自由度也等于各列自由度之和，但赋闲列的偏差平方和不能用作任何计算。

四、追加法

在用追加法进行正交设计时，如§1—7 所述，试验结果分析必须用

计算数据 y_i'。设选用 $L_a(b^c)$正交表,若因素 A 为追加 q 个水平的因素,那么

$$N=(q+1)a \tag{3-32}$$

$$M=\left[1+\frac{q}{b}\right]a=a+n \tag{3-33}$$

式中 N 为基本表和追加表试验次数的总和;M 为实际试验次数;n 为追加试验次数。

则

$$S_A=\sum_{k=1}^{b+q}\lambda_k y_{Ak}^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M}y_i'\right)^2 \tag{3-34}$$

$$f_A=b+q-1 \tag{3-35}$$

式中 y_{Ak}为 A 因素 k 水平所对应的指标 y_i' 的合计值;

$$\lambda_k=\begin{cases} b/a,k\text{ 为代换水平和追加水平时;}\\ b/N,k\text{ 为非代换水平时。}\end{cases}$$

其余非追加水平因素的偏差平方和及其自由度为

$$S_j=\frac{b}{N}\sum_{k=1}^{b}y_{jk}^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M}y_i'\right)^2 \tag{3-36}$$

$$f_j=b-1 \tag{3-37}$$

总偏差平方和及其自由度为

$$S=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{M}\lambda_i y_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M}\lambda_i y_i\right)^2 \tag{3-38}$$

$$f=M-1 \tag{3-39}$$

式中 $\lambda_i=\begin{cases} q+1,i\text{ 对应于非代换水平所指的试验号时;}\\ 1\quad,i\text{ 对应于代换水平及追加水平所指的试验号时。}\end{cases}$

一般情况下,由于追加试验,使 $S>\sum_{j=1}^{c}S_j$,$f>\sum_{j=1}^{c}f_j$,多余的偏差平方和与自由度可用来估计整体试验误差,于是

$$S_{e1}=S-\sum_{j=1}^{c}S_j \tag{3-40}$$

$$f_{e1}=f-\sum_{j=1}^{c}f_j \tag{3-41}$$

若尚有空列,则一并作为 S_{e1}。

由于按上述公式计算的 S_A,S_j 和 S_{e1} 中包含的试验误差不一致,为了保证上述各偏差均方和都是方差 σ^2 的无偏估计,因此各偏差平方和需分别乘上修正系数 K_j 或 K_{e1}

$$\frac{1}{K_j}=\frac{1}{f_j}\left[\frac{3a-M}{a}(b-1)+q\right] \tag{3-42}$$

$$\frac{1}{K_{e1}}=\frac{1}{f_{e1}}\left[2a-\frac{3a-M}{a}-\sum_{j=1}^{c}\frac{f_j}{K_j}\right] \tag{3-43}$$

式中 K_j 为各因素（包括追加水平因素）的偏差平方和修正系数；K_{e1} 为 S_{e1} 的修正系数。

【例 3－3】 若例3－2的电解腐蚀试验在实际生产中又将 D 因素电流强度追加两个水平进行试验。试验方案设计时，两个追加水平均以 D_1 为代换水平。每项试验均无重复。方差分析时，基本表中试验数据以例3－2 中每项试验数据平均值计。各项计算均可在表中进行。方差分析结果如表 3－6。显然，最优组合为 $A_3B_2C_3D_5$，其估计值为

$$\hat{y}_{优}=\hat{\mu}+\hat{a}_3+\hat{b}_2+\hat{c}_3+\hat{d}_5$$

由于 $\hat{\mu}'=\bar{y}'=-0.01$，$\hat{a}_3'=1.41$，$\hat{b}_2'=0.90$，$\hat{c}_3'=0.23$，$\hat{d}_5'=2.14$，则有

$$\hat{y}_{优}=70+5(\bar{y}'+\hat{a}_3'+\hat{b}_2'+\hat{c}_3'+\hat{d}_5')=93.35$$

根据公式（3－11），并考虑到式（3－42）与（3－43），可算得 $\varepsilon_{0.05}=4.75$。因此本例最优组合指标真值将在 93.35－4.75～93.35＋4.75 之间，即在 88.6～98.1 之间，产品质量完全符合要求。

五、拟水平法

当进行拟水平设计而无赋闲列时，若 b_A 水平因素被安排在正交表的 b 水平列上（$b_A<b$），第 b_A+r 水平为 A 因素的拟水平，且用 b_A 中重点考察水平的值作为拟水平值（通常 $r=1,2$），于是

$$S_A=\frac{b}{a}\sum_{k=1}^{b_A}\lambda_k y_{Ak}^2-\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{a}y_i\right)^2 \tag{3-44}$$

$$f_A=b_A-1 \tag{3-45}$$

式中 $\lambda_k=\begin{cases}\dfrac{1}{1+r}，当\ k\ 水平值被作为拟水平值时；\\ 1\quad，当\ k\ 为其他水平时。\end{cases}$

非拟水平因素的偏差平方和及其自由度仍满足公式（3－2）和（3－5）。

在拟水平设计时，拟水平因素的偏差平方和 S_A 并不等于其所占列的偏差平方和 S_a，其差为误差偏差平方和 S_{e3}，而误差自由度 f_{e3} 为列自由度 f_a 与 A 因素自由度 f_A 之差

$$S_{e3} = S_a - S_A \tag{3—46}$$

$$f_{e3} = f_a - f_A = b - b_A \tag{3—47}$$

当既进行重复试验又有空列时，试验误差偏差平方和应由 3 部分组成

表 **3—6** 电解腐蚀追加试验方差分析

试验号＼因素	A (1)	B (2)	C (3)	D (4)	$-\frac{1}{5}(y_i-70)$	$\lambda_i y_i^2$	y_i' $(\lambda_i y_i)$
1	1	1	1	1	−1.00	1.00	−1.00
2	1	2	2	2	0.67	1.33	2.00
3	1	3	3	3	0.33	3.00	1.00
4	2	1	2	3	−1.00	3.00	−3.00
5	2	2	3	1	−3.00	9.00	−3.00
6	2	3	1	2	−6.00	108.00	−18.00
7	3	1	3	2	1.00	3.00	3.00
8	3	2	1	3	2.67	21.30	8.00
9	3	3	2	1	−2.00	4.00	−2.00
10	1	1	1	4(1)	4.20	17.64	4.20
11	2	2	2	4(1)	0	0	0
12	3	3	3	4(1)	2.0	4.00	−2.00
13	1	1	1	5(1)	3.80	14.44	3.80
14	2	2	2	5(1)	1.00	1.00	1.00
15	3	3	3	5(1)	1.60	2.56	1.60
y_{j1}	10.0	7.0	−3.0	−6.0		192.55	−0.40
y_{j2}	−23.0	8.0	0.6	−13.0	$P=\frac{1}{27}(-0.4)^2\approx 0.01$		
y_{j3}	12.6	−15.4	2.0	6.0	$W=192.55$ $S=W-P=192.54$		
y_{j4}				6.2	$f=14$		
y_{j5}				6.4	$S_{e1}=S-\sum_{j=1}^{c}S_j=3.38$		
S_j	87.53	38.91	1.48	61.24	$f_{e1}=4$		
f_j	2	2	2	4	$K_{e1}=1$		
K_j	3/4	3/4	3/4	6/7	$F_{0.05}(2,4)=6.94$		
F_j	38.84	17.28		15.53	$F_{0.01}(2,4)=18.00$ $F_{0.05}(4,4)=6.39$		
α_j	0.01	0.05		0.05	$F_{0.01}(4,4)=16.00$		

$$S_e = S_{e1} + S_{e2} + S_{e3} \tag{3-48}$$

若无重复试验又无空列时，S_{e3} 即为整个试验的试验误差偏差平方和 S_e，因此

$$S = \sum_{j=1}^{c} S_j \neq \sum_{c_{因}} S_j + \sum_{c_{交}} S_j + \sum_{c_{空}} S_j \tag{3-49}$$

$$f = \sum_{j=1}^{c} f_j \neq \sum_{c_{因}} f_j + \sum_{c_{交}} f_j + \sum_{c_{空}} f_j \tag{3-50}$$

上式表明拟水平设计时，总偏差平方和及其自由度分别等于各列偏差平方和之和及其各列自由度之和，但总偏差平方和却不等于各因素及交互作用的偏差平方和之和，总自由度也不等于各因素及各交互作用的自由度之和。

拟水平设计时，最优组合指标真值置信区间的估计方法步骤与前述一样，但误差限 ε_α 公式需修正如下

$$\varepsilon_\alpha = \sqrt{F_\alpha(1, f_e + f_e')(S_e + S_e')/[(f_e + f_e')n_e]} \tag{3-51}$$

式中 n_e 为有效重复次数，$n_e = N \Big/ \left[1 + \sum_{c^*}\left(\dfrac{N}{b_j^*} - 1\right)\right]$；$b_j^*$ 为第 j 个显著因素优水平重复次数；c^* 为显著因素个数。

拟水平设计同时又含有赋闲列时，方差分析完全同于赋闲列的情况，这里不再赘述。

【例 3－4】 对例1－10拟水平追加试验结果进行方差分析[13]。试验方案与试验结果如表 1－34 所示。

拟水平追加试验的数据处理应先按追加法对待而暂不考虑拟水平因素的分析，即暂将 D 因素作为三水平因素看待。

对于本项试验，根据 Fisher 偏差平方和加和性原理，为简便起见，可分别独立计算由重复试验引起的试验误差平方和 S_{e1} 和由第 i 号试验指标均值 $\bar{y}_i$ 引起的总偏差平方和 S，这样表 3－7 中的结果分析即可以 $\bar{y}_i$ 进行计算。

由于追加试验 $N=18$，$M=12$，则

$$S = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \bar{y}_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i \bar{y}_i\right)^2 = 699.98$$

$$f = M - 1 = 11$$

$$S_A = \sum_{k=1}^{b+g} \lambda_k y_{Ak}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i \bar{y}_i\right)^2 = 127.17$$

$$f_A = b + q - 1 = 3$$

其余非追加水平因素 B、C、D 的平方和计算如表 3－7 所示。实际上，上述计算的 S_D 仅是 S_4 而非 S_D，现在再按拟水平法计算 S_D。由于本项拟水平试验是在 A 因素追加一个水平的条件下设计和实施的，需要同时考虑追加试验的基本表和追加表。

故有
$$S_D = \frac{b}{2a}\sum_{k=1}^{b_D}\lambda_k y_{kD}^2 - \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{M}\lambda_i \bar{y}_i\right]^2 \doteq 0$$
$$f_D = b_D - 1 = 1$$

由重复试验引起的试验误差平方和为
$$S_{e1} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \bar{y}_i)^2 = 15.77$$
$$f_{e1} = M(T-1) = 12$$

追加试验误差平方和为
$$S_{ez} = S - \sum_{j=1}^{4} S_j = 5.95$$
$$f_{ez} = f - \sum_{j=1}^{4} f_j = 2$$

拟水平试验误差平方和为
$$S_{en} = S_4 - S_D \doteq S_4 = 10.49$$
$$f_{en} = f_4 - f_D = 1$$

总的试验误差平方和 S_e 应是上述 3 项整体误差平方和之和，但由于 S_{e1}、S_{ez} 与 S_{en} 中包含的试验误差不一致，其中 S_{ez} 和 S_{en} 的均方和并非为本项试验总体方差 σ^2 的无偏估计，因此必须进行修正，即必须将 S_{ez} 和 S_{en} 分别乘以修正系数 K_{ez} 和 K_{en}：
$$K_{ez} = \frac{f_{ez}}{2a - \dfrac{3a-M}{a} - \sum\limits_{j=1}^{c}\dfrac{f_j}{K_j}} = \frac{3}{5}$$

式中 K_j 为 S_j 的修正系数，$K_j = af_j/[(3a-M)(b-1)+aq]$（$j=1,2,3,4$）。其计算结果如表 3－7 中的 K_j 行。

由于拟水平试验的计算中 $S_{en} = S_4$，故
$$K_{en} = K_4 = 6/13$$

总的试验误差平方和 S_e 为
$$S_e = S_{e1} + K_{ez}S_{ez} + K_{en}S_{en} = 24.8$$
$$f_e = f_{e1} + f_{ez} + f_{en} = 15$$

表 **3—7** 拟水平追加试验方案及结果分析

i \ j	1 A	2 B	3 C	4 D	$\bar{y}_i$	$\lambda_i \bar{y}_i^2$
1	1（A_1）	1（B_1）	1（C_1）	1（D_1）	11.42	130.42
2	1	2（B_2）	2（C_2）	2（D_2）	18.30	334.89
3	1	3（B_3）	3（C_3）	3（D_1）	25.20	653.04
4	2（A_2）	1	2	3	17.80	2×316.84
5	2	2	3	1	21.80	2×475.24
6	2	3	1	2	8.20	2×67.24
7	3（A_3）	1	3	2	21.14	2×446.90
8	3	2	1	3	7.10	2×50.41
9	3	3	2	1	9.42	2×88.74
10	4（A_4）	1	1	1	6.32	39.94
11	4	2	2	2	8.60	73.96
12	4	3	3	3	16.40	268.96
y_{j1}	54.92	95.62	48.34	80.18	$\sum$=257.16	4373.94
y_{j2}	95.60	84.70	81.34	85.58		
y_{j3}	75.32	76.84	127.48	91.40		
y_{j4}	31.32					
S_j	127.17	29.65	526.72	10.49		
f_j	3	2	2	2		
K_j	9/13	6/13	6/13	6/13		
F_j	23.11	4.22	95.71			
α_j	0.01	0.05	0.01			

因此，本项拟水平追加试验总体方差 σ^2 的无偏估计 $\hat{\sigma}_e^2$ 为

$$\hat{\sigma}_e^2 = S_e / f_e = 1.62$$

各因素 F 检验结果如表 3—7 所示。可以看出，因素 A、C、B 对试验指标土壤粘附力的影响显著，而因素 D 对土壤粘附力基本无影响。

尚需指出，虽然因素 B 是显著因素，显著性水平为 0.05，但是与因素 A 和 C 相比，其对指标的影响仍然可以忽略，这是因为因素 B 贡献率 β_B 小（详见§3—7）。

$$\beta_A=\frac{S_A-\frac{S_e}{f_e}f_A}{S}\times100\%\doteq17.48\%$$

$$\beta_B=\frac{S_B-\frac{S_e}{f_e}f_B}{S}\times100\%\doteq3.78\%$$

$$\beta_C=\frac{S_C-\frac{S_e}{f_e}f_C}{S}\times100\%\doteq74.79\%$$

因素 B 的贡献率 β_B 远小于因素 A 和 C 的贡献率 β_A 和 β_C，表明因素 B 对指标影响很小。

六、组合因素法

如图 1—4，将 2 个二水平因素 C、D 组合成 1 个三水平因素 $\overline{CD}$ 且安排在 $L_a(3^c)$ 正交表的某列上，若因素 C、D 间交互作用可忽略，则

$$\begin{cases} S_C=\dfrac{3}{2a}(y_{\overline{CD}_3}-y_{\overline{CD}_1})^2 \\ S_D=\dfrac{3}{2a}(y_{\overline{CD}_2}-y_{\overline{CD}_1})^2 \end{cases}\tag{3—52}$$

式中 $y_{\overline{CD}_k}$（$k=1,2,3$）为组合因素 $\overline{CD}$ 第 k 水平所对应的试验指标和；S_C 和 S_D 的自由度分别为其因素水平数减 1。

其余非组合因素的偏差平方和及自由度仍按式（3—2）和式（3—5）计算。

当 C、D 因素间有明显的交互作用时，将它们的所有水平组合作为组合因素 $\overline{CD}$ 的水平，计算组合因素的偏差平方和 $S_{\overline{CD}}$ 以检验 $C\times D$ 的显著性，并根据 $\overline{CD}$ 各水平所对应的指标值直接判断 $C\times D$ 的优搭配，而不必考察 C、D 因素的单独作用。

此外，拟因素法设计的方差分析可按赋闲列与拟水平法的情况综合处理。裂区法和套表法设计时，其方差分析可按前述的等水平表或混合型表设计的一般情况进行处理。

§3—5　非饱和正交设计方差分析

设有正交表 $L_a(b^c)$ 或 $L_a(b_1^{c_1}\times b_2^{c_2})$，若其总自由度满足

$$f=\sum_{j=1}^{c}f_j=a-1\tag{3—53}$$

或
$$f=\sum_{j=1}^{c_1+c_2}f_j=a-1 \tag{3-53'}$$
则称该正交表为饱和表或完备表;若其总自由度 f 满足
$$f=\sum_{j=1}^{c}f_j<a-1 \tag{3-54}$$
或
$$f=\sum_{j=1}^{c_1+c_2}f_j<a-1 \tag{3-54'}$$
则称该正交表为非饱和表或不完备表。

标准正交表全部是饱和表。非标准正交表中,二水平非标准表都是饱和表,其它水平非标准表则是非饱和表,如 $L_{18}(3^7)$, $L_{32}(4^9)$等。混合型正交表中,有些是饱和表,如 $L_8(4\times2^4)$, $L_{16}(4\times2^{12})$, $L_{18}(6\times3^6)$等;有些则是非饱和表,如 $L_{12}(3\times2^4)$, $L_{18}(2\times3^7)$, $L_{20}(5\times2^8)$, $L_{24}(3\times4\times2^4)$等。以前所讨论的都是饱和表的方差分析,本节以实例说明非饱和表的方差分析。

对于非饱和表 $L_{12}(3\times2^4)$,其总自由度 $f=(3-1)+4\times(2-1)=6$,而 $a-1=11$,二者相差 5 个自由度。显然,选用非饱和表进行正交试验时,与用饱和表相比,或者只能安排较少的因素,或者只能安排水平较少的因素,从而使部分实施 λ 值增加。这对于科研与生产的实际试验是不利的。因此,在进行正交试验设计时,应尽量少选用非饱和表。当必须选用这类正交表进行方差分析时一定要注意:即使因素间无交互作用,也不能用空列直接计算试验误差。

【例 3-5】 早强高强混凝土试验。试验考察水泥用量、Mt-150 外加剂与水泥品种对混凝土强度的影响并选择最佳工艺条件。试验因素及水平如表 3-8。试验指标 y 为 28d 抗压强度,其值越大越好。试验方案及结果分析列于表 3-9。

表 **3-8** 因素水平表

水平 \ 因素	A 水泥用量/kg·m^{-3}	B Mt-150 剂量(占水泥重%)	C 水泥品种
1	400	0	普通水泥
2	500	1	快硬水泥
3	600	—	—

表 3—9 试验方案及结果分析

试验号＼因素	A 1	B 2	C 3	4	5	$y_i/10^5$ Pa
1	2(500)	1(0)	1(普通)	1	2	802
2	2	2(1)	1	2	1	1009
3	2	1	2(快硬)	2	2	752
4	2	2	2	1	1	1078
5	1(400)	1	1	2	2	635
6	1	2	1	2	1	976
7	1	1	2	1	1	685
8	1	2	2	1	2	968
9	3(600)	1	1	1	1	850
10	3	2	1	1	2	1150
11	3	1	2	2	1	805
12	3	2	2	2	2	1210
y_{j1}	3641	4529	5422	5533	5403	$\sum_{i=1}^{12} y_i = 10\,920$
y_{j2}	3264	6391	5498	5387	5517	
y_{j3}	4015					
R_j	751	1862	76	146	114	

总偏差平方和为

$$S = \sum_{i=1}^{12} y_i^2 - \frac{1}{12}\left(\sum_{i=1}^{12} y_i\right)^2 = 370\,848.00$$

而按正交设计方差分析的基本特点应有

$$S' = \sum_{j=1}^{5} S_j = S_A + S_B + S_C + S_4 + S_5 = 362\,761.49$$

显然，S 与 S'不等，这是由于正交表 $L_{12}(3\times2^4)$的自由度非饱和的缘故。二者之差

$$S_{ew} = S - S' = 8\,086.51$$

即自由度非饱和正交表产生的误差称为列外误差。它可以用来估计试验误差或作为试验误差的一部分。本例中，由于 S_C 较 S_A、S_B 小几个量级，故可将其与空列误差、列外误差归并于一起，作为试验误差。方差分析列于表 3—10。

方差分析结果表明，因素 A、B 对试验指标影响显著，最大显著性水平为 $\alpha=0.01$。本例试验误差的均方差估计值为

$$\hat{\sigma}_e = \sqrt{S_e/f_e} = 37.79$$

从例 3－5 可看出，如果不了解 $L_{12}(3\times2^4)$是一张自由度非饱和的正交表，方差分析就会得出错误的结论。

表 3－10 方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方和	F	临界值	α	贡献率 β/%
A	$S_A=70\ 500.50$	2	35 250.50	24.68	$F_{0.01}(2,8)=8.65$	0.01	18.24
B	$S_B=288\ 920.33$	1	288 920.33	202.27	$F_{0.01}(1,8)=11.26$	0.01	77.52
C	$S_C=481.33$	1	—	—	—	—	—
e_m	$S_4=1\ 776.33$	1	—	—	—	—	—
（空列）	$S_5=1\ 083.00$	1	—	—	—	—	—
e_w（列外）	$S_{外}=8\ 086.51$	5	— —	— —	— —	— —	— —
误差	$S_e=S_4+S_5+S_{外}+S_C=11\ 427.17$	8	1 428.40	—	—	—	4.24
总和	$S=370\ 848.00$	11					

§3－6 区组设计方差分析

在区组设计方差分析时，不论是单向干扰控制，还是两向干扰控制，凡选用正交表进行区组设计，其方差分析完全同于正交试验设计计算与分析，只是把安排干扰的列如同因素列一样进行方差计算与分析即可。

本节主要介绍选用拉丁方、尧登方进行区组设计的情形。

一、拉丁方区组设计

K 阶拉丁方设计的数据结构模型为

$$\begin{cases} y_{ijl}=\mu+\alpha_i+\tau_j+\beta_l+\varepsilon_{ijl} & i,j,l=1,2,\cdots,K \\ \text{约束条件：}\sum_{i=1}^{K}\alpha_i=0,\sum_{j=1}^{K}\tau_j=0,\sum_{l=1}^{K}\beta_l=0 \end{cases} \tag{3－55}$$

式中 y_{ijl}为因素行、列和拉丁字母分别取第 i，j 和 l 水平时的试验指标值；α_i 为第 i 行的效应，即行因素第 i 水平效应；τ_j 为第 j 列的效应，即列因素第 j 水平效应；β_l 为拉丁因素第 l 水平的效应；ε_{ijl} 为随机误差，$\varepsilon_{ijl}\sim N(0,\sigma^2)$。

方差分析时主要公式如下。

偏差平方和及其自由度分解式

$$S=S_{行}+S_{列}+S_{拉丁}+S_e \tag{3－56}$$

$$f = f_{行} + f_{列} + f_{拉丁} + f_e \qquad (3-56)'$$

各偏差平方和及其自由度计算式

$$S = \sum_i \sum_j \sum_l y_{ijl}^2 - y_{ijl}^2 / n \quad (n = K^2) \qquad (3-57)$$

$$f = K^2 - 1 \qquad (3-57)'$$

$$S_{行} = \sum_i \frac{y_{ijl}^2}{K} - \frac{y_{ijl}^2}{n} \qquad (3-58)$$

$$S_{列} = \sum_j \frac{y_{ijl}^2}{K} - \frac{y_{ijl}^2}{n} \qquad (3-59)$$

$$S_{拉丁} = \sum_l \frac{y_{ijl}^2}{K} - \frac{y_{ijl}^2}{n} \qquad (3-60)$$

$$f_{行} = f_{列} = f_{拉丁} = K - 1 \qquad (3-61)$$

$$S_e = S - (S_{行} + S_{列} + S_{拉丁}) \qquad (3-62)$$

$$f_e = f - (f_{行} + f_{列} + f_{拉丁}) \qquad (3-62)'$$

方差分析可总结为方差分析表 3—11。

表 3—11　***K*** 阶拉丁方设计方差分析表

方差来源	偏差平方和	自由度	均方和	F 值
行	$S_{行}$	$K-1$	$\frac{S_{行}}{f_{行}}$	$F_{行} = \frac{S_{行}/f_{行}}{S_e/f_e}$
列	$S_{列}$	$K-1$	$\frac{S_{列}}{f_{列}}$	$F_{列} = \frac{S_{列}/f_{列}}{S_e/f_e}$
拉丁	$S_{拉丁}$	$K-1$	$\frac{S_{拉丁}}{f_{拉丁}}$	$F_{拉丁} = \frac{S_{拉丁}/f_{拉丁}}{S_e/f_e}$
误差	S_e	$(K-2)(K-1)$	$\frac{S_e}{f_e}$	
总和	S	K^2-1		

K 阶希腊—拉丁方区组设计方差分析基本同于 K 阶拉丁方区组设计计算与分析，只需再增加希腊因素的偏差平方和 $S_{希腊}$ 的计算与分析即可。K 阶超方区组设计只需在前述基础上再增加若干正交重叠上的字母元素的偏差平方和即可。

二、尧登方区组设计

通常 $K' \times K(K' < K)$ 尧登方区组设计行向区组是随机化完全区组设计，行向因素与拉丁(或处理)因素正交，而列向区组则是对称平衡不完

全区组设计，列向因素与拉丁因素不正交，故需对试验指标进行矫正，消除列向干扰影响后，才可进行拉丁因素的方差和效应分析。

$K'\times K(K'<K)$阶尧登方区组设计的数据结构模型为

$$\begin{cases} y_{ijl}=\mu+\alpha_i+\tau_i+\beta_l+\varepsilon_{ijl} \\ i=1,2,\cdots,K';j=1,2,\cdots,K;l=1,2,\cdots,K \\ \text{约束条件：}\sum_{i=1}^{K'}\alpha_i=0,\sum_{j=1}^{K}\tau_j=0,\sum_{l=1}^{K}\beta_l=0 \end{cases} \tag{3-63}$$

式中 β_l 为试验指标矫正后计算的拉丁因素第 l 水平的效应。其余字母含义见式(3－55)。

方差分析时，如一般文献所介绍的那样，除了还要计算行向区组间平方和及其自由度外，尧登方的分析与平衡不完全区组设计的分析相似。

偏差平方和及其自由度分解式

$$S=S_{行}+S_{列}+S_{处理}+S_e \tag{3-64}$$

$$f=f_{行}+f_{列}+f_{处理}+f_e \tag*{(3-64)$'$}$$

各偏差平方和及其自由度计算公式为

$$S=\sum_i\sum_j\sum_l y_{ijl}^2-y_{ijl}^2/(K\cdot K') \tag{3-65}$$

$$f=K\cdot K'-1 \tag*{(3-65)$'$}$$

$$S_{行}=\sum_{i}^{K'}\frac{y_i^2}{K}-\frac{y_{ijl}^2}{K\cdot K'} \tag{3-66}$$

$$f_{行}=K'-1 \tag*{(3-66)$'$}$$

$$S_{列}=\sum_{j=1}^{K}\frac{y_j^2}{K'}-\frac{y_{ijl}^2}{K\cdot K'} \tag{3-67}$$

$$f_{列}=K-1 \tag*{(3-67)$'$}$$

$$S_{处理}=\frac{k}{\lambda K}\sum_{l=1}^{K}Q_l^2 \tag{3-68}$$

$$f_{处理}=K-1 \tag*{(3-68)$'$}$$

$$S_e=S-(S_{行}+S_{列}+S_{处理}) \tag{3-69}$$

$$f_e=f-(f_{行}+f_{列}+f_{处理}) \tag*{(3-69)$'$}$$

式中 y_i 为行因素第 i 水平对应指标和；y_j 为列因素第 j 水平对应指标和；Q_l 为处理第 l 水平的效应，$Q_l=y_l-\frac{1}{k}\sum y_{l\Sigma}$；$y_l$ 为处理第 l 水平对应的所有指标之和；$y_{l\Sigma}$ 为处理第 l 水平所在区组指标和之和。k 为列区组内处理数；λ 为每对处理在同一区组中出现的次数。

需要说明的是 $S_{处理}$ 是消除试验干扰的处理因素偏差平方和，有时亦

写作 $S_{处理(矫正)}$。

$K' \times K$ 尧登方方差分析总结如表 3－12。

表 3－12　$K' \times K$ 尧登方方差分析表

方差来源	偏差平方和	自由度	均方和	F 值
行	$S_{行}$	$K'-1$	$\frac{S_{行}}{f_{行}}$	$F_{行}=\frac{S_{行}/f_{行}}{S_e/f_e}$
列	$S_{列}$	$K-1$	$\frac{S_{列}}{f_{列}}$	$F_{列}=\frac{S_{列}/f_{列}}{S_e/f_e}$
处理(矫正)	$S_{处理(矫正)}$	$K-1$	$\frac{S_{处理}}{f_{处理}}$	$F_{处理}=\frac{S_{处理}/f_{处理}}{S_e/f_e}$
误差	S_e	$(K'-2)(K-1)$	$\frac{S_e}{f_e}$	
总和	S	$KK'-1$		

【例 3－6】　研究 5 种照度(A、B、C、D、E)对装配工序产生次品的影响。5 天试验时间和 4 台工作站可能产生试验干扰，决定用 4×5 尧登方安排试验，4 行安排工作站，5 列安排日期，即每一行区组安排 1 台工作站，每一列区组安排一星期中的 1 天。所有规范数据如表 3－13 所示。

表 3－13　照度试验方案及数据

工作站＼日期	1	2	3	4	5	y_i	y_l
1	A　3	B　0	C　−1	D　−1	E　5	6	$y_1=12\ (A)$
2	B　1	C　0	D　0	E　6	A　2	9	$y_2=2\ (B)$
3	C　−2	D　−1	E　5	A　4	B　1	7	$y_3=-4\ (C)$
4	D　0	E　7	A　3	B　0	C　−1	9	$y_4=-2\ (D)$
							$y_5=23\ (E)$
y_j	2	6	7	9	7	$\sum=31$	

将这一设计考虑为平衡不完全区组设计，则有 $K=5$，$K'=4$，$k=4$，$\lambda=3$

$$S=\sum_i\sum_j\sum_l y_{ijl}^2-y_{ijl}^2/K\cdot K'=183-31^2/20=134.95$$

$$f=K\cdot K'-1=5\times4-1=19$$

$$S_{行}=S_{工作站}=\frac{6^2+9^2+7^2+9^2}{5}-\frac{31^2}{20}=1.35$$

$$f_{行} = f_{工作站} = 4 - 1 = 3$$

$$S_{列} = S_{日期} = \frac{2^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 + 7^2}{4} - \frac{31^2}{20} = 6.70$$

$$f_{列} = 5 - 1 = 4$$

欲计算 $S_{处理}$,则需先计算 Q_l,如

$$Q_1 = Q_A = (3+3+4+2) - \frac{1}{4}(2+7+9+7) = 23/4$$

$$Q_2 = Q_B = (1+0+0+1) - \frac{1}{4}(2+6+9+7) = -16/4$$

同理

$$Q_3 = Q_C = -38/4,\ Q_4 = Q_D = -32/4,\ Q_5 = Q_E = 63/4$$

故

$$S_{处理} = \frac{4}{3\times5}\left[\left(\frac{23}{4}\right)^2 + \left(-\frac{16}{4}\right)^2 + \left(-\frac{38}{4}\right)^2 + \left(-\frac{32}{4}\right)^2 + \left(\frac{63}{4}\right)^2\right]$$
$$= 120.37$$

$$f_{处理} = 5 - 1 = 4$$

$$S_e = S - S_{行} - S_{列} - S_{处理} = 134.45 - 1.35 - 6.70 - 120.37 = 6.53$$

$$f_e = f - f_{行} - f_{列} - f_{处理} = 19 - 3 - 4 - 4 = 8$$

上述计算结果可总结于方差分析表 3－14。

方差分析结果表明,不同照度对装配工序产生次品有显著影响,显著性水平为 0.01,而不同工作站对试验指标无影响,不同日期试验,对指标影响不大,显著性水平仅为 0.25。

表 **3－14** 照度试验方差分析表

偏差来源	偏差平方和	自由度	均方和	F_{ee}	α
行(工作站)	1.35	3	0.45	<1	
列(日期)	6.70	4	1.68	2.05	0.25
处理(矫正)	120.37	4	30.09	36.70	0.01
误差	6.53	8	0.82		
总和	134.95	19			

§3－7 误差分析与试验水平

由方差分析中 F 检验的一般原理可知,试验误差是检验试验因素及

其交互作用是否显著的标尺,其大小直接影响试验结果的分析。此外,在正交设计的方差分析中,涉及到的误差种类较多。正确地分析它们、科学地利用它们,对于提高试验效率、改善试验结果分析是有裨益的。因此,有必要对试验误差加以讨论。

一、误差分析

在正交设计中,误差可分为整体误差与局部误差。在整体误差中,主要有模型误差和纯试验误差。由正交表空列得到的误差称为模型误差 e_m,它反映试验误差与某未考虑的交互作用或条件因素的效应。由重复试验得到的误差称为纯试验误差 e,它完全是由同一试验条件下、同一组合处理的若干次重复试验结果间的差异形成的,它反映了试验单元间的差异。一般说来,模型误差 e_m 会比纯试验误差 e 大,用 e_m 作为试验误差进行结果分析,可能会把本来显著的因素判断为不显著。

由拟水平法产生的拟水平误差 e_n、由追加法产生的追加试验误差 e_z 以及由不饱和正交表产生的列外误差 e_w 也都属于整体误差。在上述误差(包括模型误差 e_m 与纯试验误差 e)都存在的情况下,可以归并起来作为试验误差。在没有重复试验,没有空列的情况下,仍然可以充分利用 e_n、e_z 与 e_w 等作为试验误差进行结果分析。这样,可以减少试验次数,提高试验效率,或增加试验误差的自由度,提高 F 检验的灵敏度。

取样误差 e_s 是由重复取样得到的误差。它是试验单元内部的误差。通常情况下,$e_s < e < e_m$。若把取样误差 e_s 作为试验误差 e,有时会以小代大,把本来不显著的因素或交互作用判断为显著。但是在一定条件下,也可以用取样误差来估计试验误差。为了充分利用重复取样的信息、节省重复试验的工作量,可以用重复取样提供的数据来检验因素与交互作用的显著性。根据经验,检验时,若有一半左右的因素或交互作用不显著,表明已基本分清了矛盾的主次,可以认为这种检验是合理的。否则,仍应选择重复试验。

由 F 分布表可以看到,当误差自由度 $f_e \leqslant 2$ 时,F 值变化较大,随着 f_e 的增加,F 值的变化逐渐减小。因此,在 f_e 较小时,由于 F 临界值较大,使 F 检验的灵敏度较低,本来应是显著的因素和交互作用,就可能被判断为不显著。通常,希望 f_e 不应小于 2。因此,在实际进行正交设计方差分析时,为了提高 F 检验的灵敏度,除了将上述各类整体误差进行归并外,还常常将某些偏差平方和较小的因素或交互作用的效应归并于试验误差。如何归并,目前尚无统一的标准,通常归并的原则是:①偏差

平方和与零相差无几；② F 比值小于或等于 1；③与其他偏差平方和比较，相差一个或几个量级；④显著性水平 $\alpha>0.25$。上述条件中，有一条满足即可归并。但在实际应用时，应具体问题具体分析，不可直接硬性套用。

显然，归并前后，误差平方和 S_e 及其自由度 f_e 都会发生变化，因而 F 临界值也会发生变化。这就可能使得某些因素或交互作用的显著性水平 α 也随之发生变化。在确定最优组合时，对归并前后显著性水平 α 不变的显著因素应取其优水平；α 不变的显著交互作用应取其优搭配。但对于归并前后，显著性水平 α 变化较大的因素或交互作用，则应根据试验要求，权衡利弊，选取适当水平，或者利用贡献率 β 加以判断；同时，在安排进一步试验时，最好研究一下重复试验，水平数及水平间的变动幅度等。

所谓贡献率，是指试验因素、交互作用以及试验误差对试验指标的总波动所作的贡献大小，通常用百分比表示。β 可由下式计算

$$\beta=\frac{S_j-\dfrac{S_e}{f_e}f_j}{S}\times 100\% \tag{3-70}$$

式中 S_j 与 f_j 分别表示试验因素或交互作用的偏差平方和与自由度。

在上节中的早强高强混凝土试验中，各因素的贡献率亦列于表 3－10。试验误差的贡献率

$$\beta_e=100\%-\beta_A-\beta_B=4.24\%$$

计算结果表明，因素 B 占试验数据总波动的 77.52%；其次是 A 因素占 18.24%。这样，不仅容易确定因素与交互作用的主次，也可能对结果进行解释，从而决定对因素与交互作用是否需要采取措施。

二、试验水平

所谓试验水平是指试验成果的质量。试验水平的高低通常反映试验成果的优劣。

我们知道，试验误差的估计值通常用其均方差 $\hat{\sigma}_e=\sqrt{S_e/f_e}$ 来表示。在科研与生产的各种实际试验中，常常用 $\hat{\sigma}_e$ 作为衡量试验成果优劣的一个重要指标。但是，即使在同一项试验中，不同的试验指标，由于单位不同，量纲不同，也会使 $\hat{\sigma}_e$ 产生较大的差异，甚至差几个量级。显然，单纯用 $\hat{\sigma}_e$ 衡量试验水平的高低是有缺陷的。

实践表明，试验误差的均方差 $\hat{\sigma}_e$ 与试验指标的平均值 $\bar{y}$ 之比，即

$C_v=\hat{\sigma}_e/\bar{y}$在同一项试验中基本保持为常数，$C_v$ 称为变异系数。因此可用 C_v 衡量试验水平的高低。

总结科研和生产的试验经验，可以初步认为，根据 C_v 值的大小，拟把试验水平分为三等：$C_v<5\%$属于优等；$C_v=5\%\sim10\%$属于一般水平；$C_v>10\%$属于不良。例如，例 3－5，$\bar{y}=910$，$\bar{\sigma}_e=37.79$，$C_v=4.15\%$，属于优等。

尚需指出，在不同的领域中，C_v 值是有差异的。但只要严格控制试验条件，在大多数情况下，试验水平是可以达到良好以上水平的。